

Posledná aktualizácia: 12. februára 2011. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii z 25. 2. 2009): Niekoľko drobných vylepšení zadaní kvôli ich vyššej zrozumiteľnosti a presnosti. Dodané hodnotenia obtiažností príkladov. Pridané toto záhlavie. Nové formátovanie.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

1 VEKTORY

1.1 D Uvažujme vektory $\vec{A} = 3\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i} - \vec{j}$, $\vec{C} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$ umiestnené v jednej rovine. Vypočítajte absolútnu hodnotu (dĺžku) vektorov: **a)** $\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$, **b)** $\vec{E} = \vec{A} - \vec{B} + \vec{C}$.

$$\left[\text{a) } \vec{D} = 6\vec{i} + 7\vec{j}, |\vec{D}| = \sqrt{85}; \text{ b) } \vec{E} = 4\vec{i} + 9\vec{j}, |\vec{E}| = \sqrt{97} \right]$$

1.2 D Uvažujte polohové vektory $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ a $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$. Vypočítajte v zložkovom tvare vektory: **a)** $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$, **b)** $\vec{D} = 2\vec{A} - \vec{B}$.

$$\left[\text{a) } \vec{C} = 5\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}; \text{ b) } \vec{D} = 4\vec{i} - 11\vec{j} + 15\vec{k} \right]$$

1.3 D Uvažujte polohové vektory $\vec{A} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$, $\vec{B} = -8\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{C} = 12\vec{i} + 24\vec{j}$. Nájdite reálne čísla a a b tak, aby platila rovnosť: $a\vec{A} + b\vec{B} + \vec{C} = \vec{0}$.

$$[a = 6, b = 6]$$

1.4 C Vypočítajte objem rovnobežnostenu určeného trojicou vektorov:

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k} \text{ a } \vec{C} = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}.$$

Návod: Objem rovnobežnostenu vypočítate pomocou zmesaného súčinu troch vektorov.

$$[V = 290]$$

1.5 C Vypočítajte plochu trojuholníka určeného dvojicou vektorov:

$$\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k} \text{ a } \vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}.$$

$$[P = 13,28]$$

1.6 D Uvažujme polohové vektory $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ a $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 7\vec{k}$. Výpočtom ukážte, že operácia vektorového súčinu je antikomutatívna - to znamená, že platí vzťah: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

1.7 D Určte absolútnu hodnotu (dĺžku) vektora $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$.

$$\left[|\vec{A}| = 6,4 \right]$$

1.8 C Uvážte či platí rovnosť: $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B}) = \vec{A} \times \vec{A} - \vec{B} \times \vec{B}$ pre ľubovoľné dva vektory \vec{A} a \vec{B} .

[Rovnosť neplatí.]

1.9 C Vypočítajte sinus uhla φ zovreného medzi vektormi $\vec{A} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 4\vec{k}$ a $\vec{B} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$.

[$\sin(\varphi) = 0,77$]

1.10 C Určite nenulové vektory \vec{A} a \vec{B} tak aby platila rovnosť $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$.

[Vektory sú na seba kolmé a určujú pravouholník s rovnakými uhlopriečkami.]

1.11 B Vektory \vec{A} a \vec{B} zvierajú uhol $\varphi = 2\pi/3$ a ich absolútne veľkosti sú $|\vec{A}| = 2$, $|\vec{B}| = 5$. Vypočítajte číslo k také aby vektory $\vec{P} = k\vec{A} + 17\vec{B}$ a $\vec{Q} = 3\vec{A} - \vec{B}$ boli na seba kolmé.

[$k = 40$]

1.12 D Dokážte, že pre ľubovoľné tri reálne čísla a, b, c a tri nenulové vektory $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ platí $(a - b + c)(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}) + (b - c - a)(\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}) = 2(a - b + c)\vec{C}$.

[Rovnosť platí.]

1.13 C Pre ktoré dva vektory platí vzťah: $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = (\vec{A})^2(\vec{B})^2$?

[\vec{A} je kolmý na \vec{B} .]

1.14 D Určte prácu, ktorú vykoná sila $\vec{F} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ pôsobiaca na bod, ktorý sa pohybuje pozdĺž vektora $\vec{A} = 0\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$.

Návod: Treba urobiť operáciu $W = \vec{F} \cdot \vec{A}$.

[$W = 16 \text{ Nm}$]

1.15 D Určte veľkosť momentu sily $\vec{F} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 9\vec{k}$ pôsobiacej v bode $B(4, 2, -3)$ vzhľadom na počiatok súradnicovej sústavy.

Návod: Treba urobiť operáciu $|\vec{D}| = |\vec{B} \times \vec{F}|$.

[51 Nm]

1.16 B Skupina poľovníkov vyrazila z tábora na poľovačku. Postupovali najskôr smerom na juh. Po hodine zmenili smer na východ a pokračovali v ňom znovu jednu hodinu a potom zmenili smer pochodu na sever. Po hodine chôdze dorazili späť do tábora, v ktorom objavili medveďa ako ničí zásoby. Na šťastie sa podarilo medveďa zastreliť skôr, ako spôsobil vážnejšie škody. Akej farby bol zastrelený medveď?

[bielej]

1.17 C Prúdové lietadlo sa pohybuje rýchlosťou 800 km h^{-1} v bezveternom počasí smerom na východ. Ako sa zmení jeho rýchlosť vzhľadom na nehybnú Zem, ak začne fúkať vietor rýchlosťou 100 km h^{-1} v smere 30° severovýchodne?

[$854 \text{ km} \cdot \text{hod}^{-1}$]

1.18 C Zablúdený hubár sa pohybuje 3 km smerom na sever, 2 km smerom na severovýchod (45° od severného smeru v smere hodinových ručičiek), 4 km smerom na západ a nakoniec 3 km juhovýchodne. **a)** Charakterizujte pohyb hubára vektormi v zložkovom tvare. Vypočítajte **b)** Celkovú dĺžku pochodu **c)** Priamu vzdialenosť medzi počiatkom a koncom pochodu.

[**a)** $\vec{A} = 0\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{B} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{C} = -4\vec{i} + 0\vec{j}$, $\vec{D} = \vec{i} - \vec{j}$; **b)** 12 km; **c)** 2,340 km]

1.19 B Motorový čln preplával rieku tečúcu rovnomernou rýchlosťou najskôr kolmo na tok v oboch smeroch. Neskôr preplával rovnakú vzdialenosť, ako je šírka rieky, po prúde a vrátil sa proti prúdu späť. Na ktorú plavbu potreboval dlhší čas?

[Plavba po prúde trvá dlhšie rozdiel v časoch je

$$\delta t = \frac{2l}{v_c} \left[\left(1 - \frac{v_R^2}{v_c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v_R^2}{v_c^2}\right)^{-1/2} \right]$$

 kde l je šírka rieky, v_R je rýchlosť toku rieky, v_C je rýchlosť člna.]

1.20 C Vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} sú dané v ortonormovanej báze vektorov \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vzťahmi

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \\ \vec{B} &= 4\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k} \\ \vec{C} &= 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \\ \vec{D} &= 6\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k} \end{aligned} \tag{1.1}$$

a) Nájdite vektory: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$, $\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} - \vec{D}$, $\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}$, $-\vec{A} + \vec{B} - \vec{C} + \vec{D}$;
 b) vypočítajte veľkosť vektorov \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} ;

c) vypočítajte uhly (v stupňoch) medzi vektorom \vec{A} a osami x, y, z .

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } 14(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \quad -4(\vec{i} + \vec{k}), \quad -6(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \quad 6(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}), \\ \text{b) } \sqrt{14}, \quad \sqrt{77}, \quad \sqrt{14}, \quad \sqrt{77}, \\ \text{c) } 74,498^\circ, \quad 57,688^\circ, \quad 36,69^\circ \end{array} \right]$$

1.21 A Aký uhol je medzi vektormi \vec{a} a \vec{b} , ak je známe, že vektor $\vec{a} + 3\vec{b}$ je kolmý na vektor $7\vec{a} - 5\vec{b}$ a vektor $\vec{a} - 4\vec{b}$ je kolmý na vektor $7\vec{a} - 2\vec{b}$?

$$[\varphi \in \{60^\circ, 120^\circ\}]$$

1.22 C Nájdite vektor ležiaci v rovine yz s dĺžkou 10 a ktorý je kolmý na vektor $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

$$[\pm(6\vec{j} + 8\vec{k})]$$

1.23 A Nájdite súčet troch vektorov, ktoré majú dĺžku a a smerujú

a) z vrcholu kocky po jej hranách

b) z vrcholu pravidelného tetraédra (pyramídy) po jeho hranách!

Návod: Telesá uložte do prvého kvadrantu, jeden vrchol do počiatku, jednu hranu do osi x a jednu stranu do roviny xy .

$$\left[\text{a) } a(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}); \quad \text{b) } 2a(\vec{i} + \vec{j} \sqrt{3}/3 + \vec{k} \sqrt{6}/6) \right]$$

1.24 C Ťažisko sústavy hmotných bodov je definované polohovým vektorom \vec{R} ,

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i},$$

kde m_i sú hmotnosti hmotných bodov, \vec{r}_i - ich polohové vektory a N - ich počet. Vypočítajte:

a) ťažisko sústavy hmotných bodov, ktoré sa nachádzajú vo vrcholoch štvorca so stranou a a majú postupne hmotnosti 1, 2, 3, 4 gramy,

b) ťažisko sústavy hmotných bodov, ak sa nachádzajú vo vrcholoch rovnostranného trojuholníka o strane a a majú hmotnosti 1, 2, 3 gramy,

c) ťažisko sústavy hmotných bodov, ak sa tieto nachádzajú vo vrcholoch kocky o hrane a s hmotnosťami 1, 2, 3, 4 gramy (na spodnej základni) 5, 6, 7, 8 gramov (na hornej základni).

Návod: štvorec a trojuholník umiestnite do roviny xy tak, že prvý vrchol bude v počiatku, druhý na x -ovej osi a ďalšie budú číslované v smere proti pohybu hodinových ručičiek. Vrcholy spodnej základne kocky očísľujte analogicky ako u štvorca, piaty vrchol nech je nad vrcholom prvým, šiesty nad druhým, atď.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } \vec{R} = a/2 (\vec{i} + \vec{j} 7/5); \\ \text{b) } \vec{R} = a/12 (\vec{i} 7 + \vec{j} 3\sqrt{3}); \\ \text{c) } \vec{R} = a/2 (\vec{i} + \vec{j} 11/9 + \vec{k} 13/9) \end{array} \right]$$

1.25 C Vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} sú dané v ortonormovanej báze vektorov \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vzťahmi (1.1). Vypočítajte:

- a) skalárny súčin $(\vec{A} + \vec{B}) \cdot (\vec{C} + \vec{D})$
 b) uhly medzi \vec{A} a \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} (v stupňoch)
 c) priemet vektora \vec{A} do smeru vektorov \vec{B} , \vec{C} .

[a) 139; b) 12,93°; 44,41°; 31,48°; c) 3,647; 2,673]

1.26 C Vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} sú dané v ortonormovanej báze vektorov \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vzťahmi (1.1). Vypočítajte:

- a) vektorové súčiny $\vec{A} \times \vec{B}$, $\vec{A} \times \vec{C}$, $\vec{B} \times \vec{C}$ a uhly (v stupňoch), ktoré tieto zvierajú s vektorom \vec{D} ;
 b) plochy rovnobežníkov vytvorených z vektorov \vec{A} a \vec{B} a tiež z \vec{C} a \vec{D} , ako aj dĺžku ich uhlopriečok.

[a) $-3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$; $-4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$; $-7\vec{i} + 14\vec{j} - 7\vec{k}$; 90°; 90°; 90°;
 b) plochy 7,348; 7,348; dĺžky uhlopriečok prvého 12,45 a 5,196, druhého 12,45 a 5,196.]

1.27 C Vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} , \vec{D} sú dané v ortonormovanej báze vektorov \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vzťahmi (1.1). Ukážte, že všetky tieto vektory ležia v jednej rovine.

Návod: Stačí ukázať, že vektory sú lineárne závislé.

[Sú lineárne závislé.]

1.28 B Vektory \vec{A} , \vec{B} , \vec{C} sú dané v ortonormovanej báze vektorov \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} vzťahmi

$$\vec{A} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{B} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$\vec{C} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Určte:

- a) akú sústavu, pravotočivú alebo ľavotočivú, tvoria tieto vektory;
 b) objem kosého hranola, ktorého tri hrany vytvárajú uvedené vektory;
 c) plochu diagonálneho (uhlopriečkového) rezu hranolom vedeného cez vektor \vec{A} .

[a) $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} = -24$, ľavotočivú; b) 24; c) 28,46]

1.29 A Dokážte, že ak spojíme stredy strán štvoruholníka úsečkami, vzniknutý geometrický útvar bude kosodĺžnik. Bude tento útvar kosodĺžnik i v prípade, že „štvoruholník“ nie je rovinný útvar?

Návod: Strany štvoruholníka označte vektormi \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} tak, aby platilo

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}.$$

[Je to naozaj kosodĺžnik, a to aj v prípade, že pôvodný štvoruholník neleží v rovine!]

1.30 C Overte, či môžu nasledovné trojice vektorov tvoriť bázu v trojrozmernom priestore:

a) $\vec{a}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{a}_2 = \vec{i} - 4\vec{k}$, $\vec{a}_3 = 4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$,

b) $\vec{b}_1 = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b}_2 = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b}_3 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$,

keď viete, že vektory \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} tvoria v tomto priestore ortonormovanú bázu.

Návod: Vektory bázy nemôžu ležať v jednej rovine.

[a) nemôžu; b) môžu]

1.31 B Nech \vec{a} a \vec{b} sú dva vektory, ktoré definujú strany rovnobežníka s uhlopriečkami $\vec{a} + \vec{b}$ a $\vec{a} - \vec{b}$. Ukážte, že

a) uhlopriečky rovnobežníka sú kolmé vtedy a len vtedy, ak je rovnobežník kosoštvorec

b) plocha rovnobežníka zostrojeného na uhlopriečkach (pôvodného) rovnobežníka je dvakrát väčšia ako plocha pôvodného rovnobežníka.

[Obe tvrdenia platia.]

1.32 C Dané sú tri vektory $\vec{a} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$, $\vec{b} = 3\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{c} = 4\vec{v}$. Dokážte, že sú komplanárne a nájdite súčinitele m a n rovnosti vyjadrujúcej ich lineárnu závislosť $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

[$m = 2/3$, $n = 11/12$]

1.33 B Vrcholy obecného trojuholníka sú dané svojimi polohovými vektormi \vec{r}_A , \vec{r}_B a \vec{r}_C . Dokážte, že ťažnice trojuholníka (úsečky, ktoré spájajú vrchol trojuholníka so stredom protiľahlej strany) sa pretínajú v jednom bode T a nájdite jeho polohový vektor \vec{r}_T .

Návod: Pri odvodzovaní použite rovnicu úsečky, ktorá leží medzi bodmi 1 a 2 s polohovými vektormi \vec{r}_1 a \vec{r}_2 v tvare $\vec{r} = \vec{r}_1 + m(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$, kde \vec{r} je vektor bodu ležiaceho na úsečke a m je reálny parameter, $0 \leq m \leq 1$. Body 1 a 2 sme vybrali ako príklad pre dva ľubovoľné body.

$$\left[\vec{r}_T = \frac{1}{3} (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) \right]$$

1.34 A Určte súradnice bodu P' , ktorý vznikne pravouhlým priemetom bodu P s polohovým vektorom $\vec{r}_P = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 3\vec{k}$ na priamku s rovnicou $(\vec{r} - \vec{i}) \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$.

Návod: Uvedenú rovnicu priamky ľahko dešifrujeme: priamka prechádza koncovým bodom vektora \vec{i} a jej smer je daný (nie jednotkovým) vektorom $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Rovnica roviny, ktorá je kolmá na uvedenú priamku a prechádza bodom P je $(\vec{r} - \vec{r}_P) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = 0$. Bod P' je spoločným bodom našej priamky a tejto roviny.

[Kartézske súradnice bodu P' sú 3, 2, -2]

1.35 B Vypočítajte vzdialenosť d bodu s polohovým vektorom $\vec{r}_o = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ od priamky danej vektorovou rovnicou $(\vec{r} - 3\vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$.

Návod: Priamka evidentne prechádza bodom $3\vec{i}$ a má smer vektora \vec{j} . Nakreslite si najprv obecný obrázok.

$$[d = |x_0 - 3|]$$

1.36 B Určte uhol φ medzi rovinami

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A = 0 ,$$

$$B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B = 0 .$$

Aplikujte obecný výsledok na konkrétne roviny

$$x - y + z + 1 = 0 , \quad -x + y + z + 1 = 0 .$$

Návod: Rovnice rovín, tak ako sú zadané v znení príkladu, sú v zložkovom tvare. To znamená, že vieme odčítať súradnice ich normálových vektorov. A teda uhol dvoch rovín bude uhol dvoch priamok, na ktorých ležia tieto normálové vektory.

$$\left[\cos \varphi = \frac{|A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3|}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2}} ; \text{ v konkrétnom prípade } \cos \varphi = -1/3, \text{ t.j. } \varphi = 109.47^\circ \right]$$

1.37 C Overte platnosť formuly $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Návod: Každý vektor napíšte v ortonormovanej báze, napr. $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a ukážte, že pravá a ľavá strana sú identické.

[Vzťah platí.]

1.38 C Hmotný bod P s polohovým vektorom \vec{r} [skrátene $P(\vec{r})$] je priťahovaný nepohyblivými bodmi $P_1(\vec{r}_1), \dots, P_N(\vec{r}_N)$ s hmotnosťami m_1, \dots, m_N silami, ktoré sú priamo úmerné (s tou istou konštantou úmernosti k) vzdialenostiam od týchto bodov a ich hmotnostiam. Nájdite výslednicu síl \vec{F} , pôsobiacu na bod P a polohový vektor jeho rovnovážnej polohy \vec{R} keď viete, že v rovnovážnej polohe musí byť $\vec{F} = \vec{0}$.

Návod: Sily sú vektory a ako také sa aj sčítajú. Výslednicou síl \vec{F} rozumieme súčet všetkých spomínaných síl.

$$\left[\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + \dots + m_N} \right]$$

1.39 A Nech \vec{r} je polohový vektor bodu v rovine. Na akej krivke ležia body, ktorých polohové vektory spĺňajú rovnicu $(\vec{r} - 2\vec{a}) \cdot \vec{r} = 0$, kde \vec{a} je daný (konštantný) vektor?

[Kružnica.]