Posledná aktualizácia: 22. mája 2012. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii zo 6. marca 2009): Rozsiahle zmeny, napr.: Dodané postupy riešení ku niektorým príkladom. Dodané niektoré nové príklady. **Príklady 47-67 zo staršej verzie zatiaľ chýbajú.** Opravené chyby. Príklady preusporiadané do podčastí. Uvádzanie obtiažností príkladov. Úplne nové formátovanie. Pridané záhlavie s týmito informáciami.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

1 KINEMATIKA

1.1 PRIAMOČIARY POHYB

PRÍKLAD 1.1.1 ☆☆★★ (C)

Dva vlaky, z ktorých jeden je dlhý $\ell_1 = 150\,\mathrm{m}$ a druhý $\ell_2 = 200\,\mathrm{m}$ sa stretnú na voľných tratiach. Akú rýchlosť majú oba protiidúce vlaky, keď ich jazda vedľa seba trvá $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ a keď prvý vlak ubehne za tento čas[1] dráhu $s = 160\,\mathrm{m}$?

$$\left[\; v_1 = \frac{s}{\Delta t} = 16\,\mathrm{m/s}; \quad v_2 = \frac{\ell_1 + \ell_2 - s}{\Delta t} = 19\,\mathrm{m/s} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.2 ☆☆☆★ (D)

Vagón sa pohybuje po priamej dráhe so spomalením $a = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. V čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ mal rýchlosť $v_0 = 54\,\mathrm{km/h}$. Za aký čas t a na akej vzdialenosti s sa zastaví?

$$\left[\; t = \frac{v_0}{a} = 30\,\mathrm{s}; \quad s = \frac{v_0^2}{2a} = 225\,\mathrm{m} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.3 ☆☆★★ (C)

Akú rýchlosť malo auto, keď vodič po zhliadnutí prekážky až do zastavenia prešiel dráhu $s = 35\,\mathrm{m}$? Jeho reakčný čas $t_\mathrm{r} = 0{,}8\,s$ a brzdil so spomalením $a = 6{,}5\,\mathrm{m/s^2}$.

$$\left[\; v_0 = -at_\mathrm{r} + \sqrt{(at_\mathrm{r})^2 + 2as} = 16{,}76\,\mathrm{m/s} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.4 ☆☆★★ (C)

Bežec na krátke trate ubehne $s = 100\,\mathrm{m}$ za $t = 12\,\mathrm{s}$, z toho prvých $s_1 = 20\,\mathrm{m}$ rovnomerne zrýchlene a zvyšok dráhy konštantnou rýchlosťou. Aké má zrýchlenie a akú má rýchlosť, ktorou beží zvyšok trate?

$$\left[\; a = \frac{(s+s_1)^2}{2s_1t^2} = 2{,}5\,\mathrm{m/s^2}; \quad v = \frac{(s+s_1)}{t} = 10\,\mathrm{m/s} \;\right]$$

[1] Znak Δ je veľké grécke písmeno, ktoré vyslovujeme delta.

PRÍKLAD 1.1.5 ☆★★★ (B)

Bod sa pohybuje po osi x tak, že závislosť jeho súradnice od času je daná rovnicou
$$x = k/2\left(e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}\right)$$
kde k, γ sú známe konštanty[2]. Nájdite rýchlosť a zrýchlenie bodu ako funkciu x.
Návod: Umocnite výrazy pre x a potom pre rýchlosť.

$$\left[\ v = \gamma\sqrt{x^2 - k^2} a = \gamma^2 x\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.6 ☆★★★ (B)

Pozorovateľ stojaci v okamihu rozbehu vlaku pri jeho začiatku zaznamenal, že prvý vagón prešiel popri ňom za čas $\Delta t_1 = 4\,\mathrm{s}$. Ako dlho bude popri ňom prechádzať n-tý vagón ($n = 7$), keď sú všetky vagóny rovnako dlhé, ak pohyb vlaku je priamočiary rovnomerne zrýchlený?
Návod: Vyjadrite si zrýchlenie celého vlaku a zrýchlenie vagóna.

$$\left[\ \Delta t_n = \Delta t_1(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = 0{,}785\,\mathrm{s}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.7 ★★★★ (A)

Pozorovateľ stojaci na nástupišti zistil, že prvý vagón vlaku približujúceho sa k stanici prešiel okolo neho za čas $\Delta t_1 = 4\,\mathrm{s}$ a druhý za čas $\Delta t_2 = 5\,\mathrm{s}$. Potom vlak zastavil tak, že začiatok vlaku bol $s = 75\,\mathrm{m}$ od pozorovateľa. Považujúc pohyb vlaku za priamočiary rovnomerne spomalený, určte spomalenie vlaku.

$$\left[\ a = \frac{2s(\Delta t_1 - \Delta t_2)^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2\right) - \Delta t_1 \Delta t_2\right]^2} = 0{,}25\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.8 ☆★★★ (B)

Teleso A sa začína pohybovať počiatočnou rýchlosťou $v_{01} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ so stálym zrýchlením a. Za čas $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ od začiatku pohybu sa z toho istého miesta začína pohybovať teleso B počiatočnou rýchlosťou $v_{02} = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ s tým istým zrýchlením a. Pri akom maximálnom zrýchlení a teleso B dobehne na úroveň telesa A?

$$\left[\ \text{Aby sa stretli v reálnom čase, musí byť } a < \frac{v_{02} - v_{01}}{\Delta t};\quad a < 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}\ \right]$$

[2]Znak γ je malé grécke písmeno, ktoré vyslovujeme gama.

PRÍKLAD 1.1.9 ☆★★★ (B)

Teleso vykonalo v poslednej sekunde svojho voľného pádu n-tinu svojej celkovej dráhy. Ako dlho a z akej výšky padalo? Akou rýchlosťou dopadlo?

$$\left[\ t = n\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right); \quad h = \frac{1}{2}g\left\{n^2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^2\right\}; \quad v = g(n + \sqrt{n(n-1)})\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.10 ☆☆★★ (C)

Teleso vyhodíme z výšky h nad Zemou zvisle nahor s rýchlosťou v_0. Za aký čas za ním musíme voľne pustiť z tej istej výšky druhé teleso, aby dopadli na Zem súčasne?

$$\left[\ \Delta t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} - \sqrt{2gh}}{g}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.11 ★★★★ (A)

V miestnosti s výškou h je z podlahy zvislo nahor hodená lopta s počiatočnou rýchlosťou v_1. Pri odrazoch (od stropu aj podlahy) sa rýchlosť lopty zmenšuje podľa vzťahu $v_{\text{odr}} = kv_{\text{dop}}$ $(k < 1)$. Aká musí byť minimálna rýchlosť lopty, aby sa odrazila od stropu dva razy?

$$\left[\ v_0 > \sqrt{2gh\left(1 - \frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.12 ☆☆★★ (C)

Teleso sa pohybovalo na prvej polovine svojej dráhy rovnomerne zrýchlene a na druhej pokračovalo rovnomerným pohybom. Druhé teleso prebehlo rovnomerne zrýchlene celú dráhu za rovnaký čas. V akom pomere sú zrýchlenia oboch telies?

$$[\ a_1/a_2 = 9/8\ ]$$

PRÍKLAD 1.1.13 ☆☆★★ (C)

Raketa vypustená vo zvislom smere sa pohybovala so zrýchlením a počas doby t_1, kým pracovali motory. Vypočítajte do akej výšky nad Zemou raketa vystúpi, ak zanedbáme odpor vzduchu, závislosť gravitačného zrýchlenia od výšky a aj vplyvy otáčavého pohybu Zeme.

$$\left[\ h = \frac{1}{2}at_1^2\left(1 + \frac{a}{g}\right)\ \right]$$

PRÍKLAD 1.1.14 ☆★★★ (B)

Teleso bolo vrhnuté po naklonenej rovine smerom nahor. Bod, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti d od začiatku pohybu, prebehne teleso dva razy, v čase t_1 nahor, a nadol v čase t_2 od začiatku pohybu. Určte počiatočnú rýchlosť telesa v_0 a zrýchlenie pohybu a.

$$\left[\; v_0 = d\,\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}; \quad a = \frac{2d}{t_1 t_2} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.15 ☆☆★★ (C)

Elektrický rušeň sa rozbieha z pokoja so zrýchlením, ktoré rovnomerne rastie tak, že v čase $t_1 = 100\,\mathrm{s}$ má zrýchlenie $a_1 = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. Vypočítajte

a) rýchlosť rušňa v čase t_1 ako aj dráhu, ktorú rušeň za tento čas prešiel,

b) rýchlosť a dráhu v čase $t_2 = 125\,\mathrm{s}$.

$$\left[\begin{array}{ll} \mathbf{a)}\; v_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1 = 25\,\mathrm{m/s}, & s_1 = \frac{1}{6}a_1 t_1^2 = 833{,}33\,\mathrm{m} \\ \mathbf{b)}\; v_2 = \frac{1}{2}\frac{a_1}{t_1}t_2^2 = 39{,}06\,\mathrm{m/s}, & s_2 = \frac{1}{6}\frac{a_1}{t_1}t_2^3 = 1627{,}6\,\mathrm{m} \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.1.16 ☆☆★★ (C)

Zrýchlenie hmotného bodu pri jeho priamočiarom pohybe rovnomerne klesá zo začiatočnej hodnoty $a_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ v čase $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ na nulovú hodnotu v čase $t_1 = 20\,\mathrm{s}$. Aká je rýchlosť hmotného bodu v čase t_1 a akú dráhu za tento čas vykonal, keď v čase t_0 bol v pokoji?

$$\left[\; v_1 = \frac{1}{2}a_0 t_1 = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}; \quad s_1 = \frac{1}{3}a_0 t_1^2 = 1\,333\,\mathrm{m} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.17 ☆★★★ (B)

Častica sa pohybuje po priamke tak, že jej zrýchlenie s časom rovnomerne klesá z hodnoty a_0 na začiatku cez nulovú hodnotu v čase t_1.

a) Aká je začiatočná rýchlosť častice, keď v čase t_1 mala rýchlosť v_1?

b) Akú dráhu s_1 vykonala za čas t_1?

c) V akom čase t_2 dosiahne častica nulovú rýchlosť ?

d) Akú dosiahne častica maximálnu rýchlosť $v_{\max}$?

$$\left[\; \mathbf{a)}\; v_0 = v_1 - \frac{1}{2}a_0 t_1; \quad \mathbf{b)}\; s_1 = v_1 t_1 - \frac{1}{6}a_0 t_1^2; \quad \mathbf{c)}\; t_2 = t_1 + \sqrt{\frac{2 v_1 t_1}{a_0}}; \quad \mathbf{d)}\; v_{\max} = v_1 \;\right]$$

PRÍKLAD 1.1.18 ☆★★★ (B)

Teleso s počiatočnou rýchlosťou v_0 má pod pôsobením brzdiacej sily zrýchlenie $a = -kv^2$ (k je konštanta). Predpokladajte, že pohyb telesa je priamočiary a na začiatku brzdenia bolo teleso v mieste s nenulovou súradnicou x_0. Určte:

a) časovú závislosť rýchlosti telesa,
b) časovú závislosť súradnice telesa,
c) závislosť rýchlosti telesa od jeho polohy (súradnice x).

$$\left[\ \textbf{a)}\ v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 k t};\quad \textbf{b)}\ x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln\left(v_0 k t + 1\right);\quad \textbf{c)}\ v(x) = v_0 e^{-k(x - x_0)}\ \right]$$

1.2 SKLADANIE POSUVNÝCH POHYBOV

PRÍKLAD 1.2.1 ☆☆★★ (C)

Prúdové lietadlo sa pohybuje rýchlosťou 800 km/h v bezveternom počasí smerom na východ. Ako sa zmení jeho rýchlosť vzhľadom na nehybnú Zem, ak začne fúkať juhovýchodný vietor[3] rýchlosťou 100 km/h taký, že smer jeho prúdenia je orientovaný 30° voči severu? Pod akým uhlom voči poludníku bude smerovať trajektória lietadla?

$$\left[\; v = \sqrt{v_1^2 + 2v_1v_2\sin\alpha + v_2^2} = 854{,}5\,\mathrm{km/h}; \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{v_1 + v_2\sin\alpha}{v_2\cos\alpha} = 84{,}18^\circ \;\right]$$

PRÍKLAD 1.2.2 ☆★★★ (B)

Motorový čln preplával rieku tečúcu rovnomernou rýchlosťou najskôr kolmo na tok v oboch smeroch (t.j. tak, že sa vrátil na to isté miesto, z ktorého vyštartoval). Neskôr preplával rovnakú vzdialenosť, ako je šírka rieky, po prúde a vrátil sa proti prúdu späť. Na ktorú plavbu potreboval dlhší čas?

[Plavba po prúde a späť trvá dlhšie. Rozdiel v časoch je

$$\Delta t = \frac{2\ell}{v_\mathrm{c}}\left[\frac{1}{1-\left(\frac{v_\mathrm{r}}{v_\mathrm{c}}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v_\mathrm{r}}{v_\mathrm{c}}\right)^2}}\right]$$

kde ℓ je šírka rieky, v_r je rýchlosť toku rieky, v_c je rýchlosť člna.]

PRÍKLAD 1.2.3 ☆☆★★ (C)

Akou rýchlosťou v letí a aký smer musí mať lietadlo, aby za čas $t = 1\,\mathrm{h}$ preletelo v smere na sever dráhu $s = 200\,\mathrm{km}$, ak počas letu pôsobí severovýchodný vietor pod uhlom $\alpha = 35^\circ$ k poludníku rýchlosťou $v_1 = 30\,\mathrm{km/h}$?

$$\left[\; v = \sqrt{\left(\frac{s}{t}\right)^2 + v_1^2 + 2v_1\frac{s}{t}\cos\alpha} \;=\; 225{,}23\,\mathrm{km/h}; \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{v_1\sin\alpha}{s/t + v_1\cos\alpha} = 4^\circ 32' \text{ k poludníku} \;\right]$$

PRÍKLAD 1.2.4 ☆☆☆★ (D)

Pohyb bodu je určený rovnicami $x = A_1t^2 + B_1$, $y = A_2t^2 + B_2$, kde $A_1 = 20\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$, $A_2 = 15\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$, $B_1 = 5\,\mathrm{cm}$, $B_2 = -3\,\mathrm{cm}$. Nájdite veľkosť aj smer rýchlosti a zrýchlenia v čase $t = 2\,\mathrm{s}$.

[3] Teda od juhovýchodu na severozápad.

$$\left[\begin{array}{ll} \text{Rýchlosť a zrýchlenie sú rovnobežné.} & \\ v = 2t\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}, & \alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{A_2}{A_1}\right) = 36{,}87^\circ \text{ voči osi } x \\ a = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 0{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}} & \beta = \alpha \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.2.5 ☆☆★★ (C)

Hmotný bod sa pohybuje v rovine tak, že časová závislosť jeho polohového vektora $\vec{r} = a\cos(\omega t)\,\vec{i} + a\cos(\omega t + \phi)\,\vec{j}$, kde a, ϕ, ω sú známe konštanty[4]. Dokážte, že pre $\phi = 90^\circ$ vykonáva rovnomerný pohyb po kružnici a vypočítajte vektor okamžitej rýchlosti hmotného bodu v čase t pre ľubovoľné ϕ.

$$\left[\; x = a\cos\omega t, \quad y = -a\sin\omega t, \quad a^2 = x^2 + y^2, \quad \vec{v} = -\omega a\{\sin(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t + \phi)\vec{j}\}\;\right]$$

PRÍKLAD 1.2.6 ★★★★ (A)

Delo je umiestnené na úpätí svahu, ktorý zviera s vodorovnou rovinou uhol α. Nájdite uhol β, ktorý zviera hlaveň dela so svahom,ak strela vystrelená z dela dopadne na svah pod pravým uhlom.

$$\left[\; \mathrm{ctg}\,\alpha = 2\,\mathrm{tg}\,\beta \;\right]$$

PRÍKLAD 1.2.7 ☆★★★ (B)

Počiatočná rýchlosť strely z mínometu je v_0 a uhol, ktorý zviera s vodorovnou rovinou je α ($\alpha > 45^\circ$). Priamo k mínometu sa blíži tank s rýchlosťou v_t. V akej vzdialenosti d_1 tanku od mínometu musí mínomet vystreliť, aby tank zasiahol? V akej vzdialenosti d_2 od mínometu bude tank zasiahnutý?

$$\left[\; d_1 = \frac{v_0}{g}\left[v_0\sin(2\alpha) + 2v_\mathrm{t}\sin(\alpha)\right]; \quad d_2 = 2v_0\sin(2\alpha) \;\right]$$

PRÍKLAD 1.2.8 ☆★★★ (B)

Dve telesá sú hodené súčasne z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami v_{01} a v_{02}, ktoré zvierajú s vodorovnou rovinou uhly α_1 a α_2. Určte závislosť veľkosti a smeru ich vzájomnej rýchlosti od času počas pohybu, ak ich dráhy ležia v jednej rovine.

$$\left[\begin{array}{l} \vec{v} = (v_{02}\cos\alpha_2 - v_{01}\cos\alpha_1)\vec{i} + (v_{02}\sin\alpha_2 - v_{01}\sin\alpha_1)\vec{j} \\ \text{je nezávislá od času, nemení smer ani veľkosť.} \end{array}\right]$$

[4] Znaky ϕ a ω sú malé písmená gréckej abecedy. Vyslovujeme ich fí a omega.

PRÍKLAD 1.2.9 ☆★★★ (B)

Dve častice sú vystrelené z toho istého miesta s počiatočnými rýchlosťami v_{01} a v_{02} pod uhlami α_1 a α_2 k vodorovnej rovine ($\alpha_1 > \alpha_2$) tak, aby sa ešte za letu zrazili. Za akú dobu po vystrelení prvej musí byť vystrelená druhá?

$$\left[\ \Delta t = \frac{2v_{01}v_{02}\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{g(v_{02}\cos\alpha_2 + v_{01}\cos\alpha_1)}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.2.10 ☆★★★ (B)

Spojnica ústia hlavne a cieľa zviera s vodorovnou rovinou uhol ϕ a ich vzdialenosť je d. Určte rýchlosť strely po opustení hlavne, ak hlaveň zviera s vodorovným smerom uhol α.

$$\left[\ v_0 = \sqrt{\frac{gd\cos^2\phi}{2\cos^2\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha\cos\phi - \sin\phi)}}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.2.11 ★★★★ (A)

Guľôčku sme vystrelili vodorovne vo výške h pri jednej stene. Akú minimálnu rýchlosť musíme udeliť guľôčke, aby sa odrazila dva razy od druhej steny pred dopadom na podlahu? Vzdialenosť stien je d a guľôčka pri odraze nestráca žiadnu energiu (veľkosť rýchlosti sa zachováva a uhol dopadu na stenu je rovný uhlu odrazu).

$$\left[\ v_0 > \sqrt{\frac{9gd^2}{2h}}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.2.12 ☆☆★★ (C)

Kameň je vymrštený z praku pod uhlom β voči zvislici s počiatočnou rýchlosťou v_0. Určte:

a) Maximálnu výšku dráhy letu kameňa h.

b) Dolet kameňa ℓ.

c) Veľkosť rýchlosti kameňa v_1 v maximálnej výške.

d) Veľkosť rýchlosti kameňa v_2 pri dopade na zem.

e) Veľkosť tangenciálneho zrýchlenia kameňa $a_{1\mathrm{t}}$ v maximálnej výške a $a_{2\mathrm{t}}$ pri dopade na zem.

$$\left[\ \textbf{a)}\ h = \frac{v_0^2\cos^2\beta}{2g};\quad \textbf{b)}\ \ell = \frac{v_0^2\sin 2\beta}{g};\quad \textbf{c)}\ v_1 = v_0\sin\beta;\quad \textbf{d)}\ v_2 = v_0;\quad \textbf{e)}\ a_{1\mathrm{t}} = 0;\quad a_{2\mathrm{t}} = g\cos\beta\ \right]$$

1.3 OTÁČAVÝ POHYB

PRÍKLAD 1.3.1 ★★★★ (A)

Koleso s polomerom R sa valí po ceste s rýchlosťou v. Kúsky blata sú vymršťované zo všetkých bodov na obvode kolesa. Vypočítajte do akej najväčšej výšky nad cestou môžu vyletovať.

$$\left[h_{\max} = R + \frac{R^2 g}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \right]$$

PRÍKLAD 1.3.2 ☆☆★★ (C)

Koleso s polomerom R rotuje s frekvenciou f_0. Pôsobením brzdiacej sily ho zastavíme za čas t_1. Aké bolo tangenciálne, dostredivé a celkové zrýchlenie počas pohybu (ak predpokladáme, že tangenciálne zrýchlenie je konštantné)?

$$\left[a_\mathrm{t} = \frac{2\pi R f_0}{t_1}; \quad a_\mathrm{n} = 4\pi^2 R f_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^2; \quad a = 2\pi R f_0 \sqrt{\frac{1}{t_1^2} + 4\pi^2 f_0^2 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right)^4} \right]$$

PRÍKLAD 1.3.3 ★★★★ (A)

Polohový vektor častice závisí od času nasledovne: $\vec{r} = t\,\vec{i} + (t + 0{,}5t^2)\,\vec{j} + 4/\pi^2 \sin(\pi t/2)\,\vec{k}$. Vypočítajte[5] veľkosť rýchlosti, tangenciálneho a celkového zrýchlenia v čase t_1.

$$\left[v = \sqrt{1 + (1+t_1)^2 + \frac{4}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi}{2}t_1}; \quad a_\mathrm{t} = \frac{1 + t_1 - \frac{1}{\pi}\sin\pi t_1}{\sqrt{1 + (1+t_1)^2 + \frac{4}{\pi^2}\cos^2\frac{\pi}{2}t_1}}; \quad a = \sqrt{1 + \sin^2\frac{\pi}{2}t_1} \right]$$

PRÍKLAD 1.3.4 ☆★★★ (B)

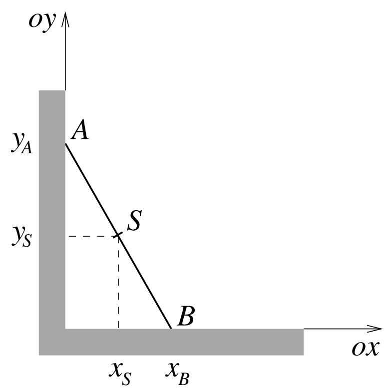
Tenká tyč dĺžky ℓ má konce pohyblivo upevnené v koľajničkách na oceľovom profile (obrázok). Pravý koniec tyče (bod B) sa začína pohybovať konštantnou rýchlosťou u_0 doprava, pričom na začiatku bol v uhle oceľového profilu.

a) Aká je veľkosť rýchlosti stredu tyče v závislosti od polohy x_B jej pravého konca?

b) Aká je veľkosť zrýchlenia v závislosti od x_B?

c) Aký tvar má trajektória opisovaná stredom tyče?

[5] V tomto príklade pod symbolom t a ďalšími máme na mysli len ich číselné hodnoty. Inak by zadanie nebolo správne kvôli nezhodám v jednotkách.



$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a)}\ v_S = \dfrac{u_0}{2}\dfrac{\ell}{\sqrt{\ell^2 - x_B^2}}; \quad \textbf{b)}\ a_S = \dfrac{u_0^2}{2}\dfrac{\ell^2}{\sqrt{\ell^2 - x_B^2}} \\ \textbf{c)}\ \text{časť kružnice so stredom v počiatku a s polomerom } \ell/2 \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.5 ☆★★★ **(B)**

Hmotný bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom R tak, že jeho uhlová súradnica závisí od času nasledovne $\phi = A + Bt^3$, kde A,B sú konštanty. Vypočítajte veľkosť tangenciálneho, dostredivého a celkového zrýchlenia v čase t_1. V akom čase t_2 bude uhol medzi vektorom rýchlosti a vektorom celkového zrýchlenia α?

$$\left[a_{\mathrm{t}} = 6RBt_1; \quad a_{\mathrm{n}} = 9RB^2t_1^4; \quad a = 3RBt_1\sqrt{4 + 9B^2t_1^6}; \quad t_2 = \sqrt[3]{\frac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{B}} \right]$$

PRÍKLAD 1.3.6 ☆☆★★ **(C)**

Koleso sa otáča tak, že závislosť uhla otočenia polomeru kolesa od času má tvar $\phi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$, kde $A = 1\,\mathrm{rad}$, $B = 1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, $C = 1\,\mathrm{rad\,s^{-2}}$, $D = 1\,\mathrm{rad\,s^{-3}}$. Nájdite polomer kolesa R, ak vieme, že na konci druhej sekundy pohybu normálové zrýchlenie $a_{\mathrm{n}} = 346\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

$$\left[R = \frac{a_{\mathrm{n}}}{\left(B + 2Ct + 3Dt^2\right)^2} = 1{,}2\,\mathrm{m} \right]$$

PRÍKLAD 1.3.7 ☆★★★ **(B)**

Počet otáčok brúsneho kotúča sa počas $t = 10\,\mathrm{s}$ zníži z $n_1 = 3\,000$ ot min^{-1} na $n_2 = 2\,000$ ot min^{-1}. Koľko ráz sa otočí kotúč v uvedenom čase?

$$\left[z = (n_1 + n_2)t/2 = 416{,}65 \right]$$

PRÍKLAD 1.3.8 ☆★★★ (B)

Počas $t = 5\,\mathrm{s}$ koleso vykoná $z = 120$ otáčok, pričom sa zdvojnásobí uhlová rýchlosť kolesa. Aká je uhlová rýchlosť na začiatku a na konci tohto deja, ak uhlové zrýchlenie je konštantné?

$$\left[\omega_0 = \frac{4\pi z}{3t} = 100{,}53\,\mathrm{s}^{-1}; \quad \omega_1 = 201{,}06\,\mathrm{s}^{-1}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.9 ☆★★★ (B)

Koleso rozbiehajúce sa zo stavu pokoja vykoná v druhej sekunde $z = 16$ otáčok. Aké je uhlové zrýchlenie kolesa ε, ak je konštantné[6]

$$\left[\epsilon = \frac{4\pi z}{t_2^2 - t_1^2} = 67{,}02\,\mathrm{s}^{-2}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.10 ☆☆★★ (C)

Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom $R = 0{,}1\,\mathrm{m}$ s konštantným tangenciálnym zrýchlením. Na konci piatej otáčky ($N = 5$) má obvodovú rýchlosť $v_5 = 0{,}1\,\mathrm{m/s}$.
a) Aký čas t_5 uplynul od začiatku pohybu, kým bod získal rýchlosť v_5?
b) Aká je veľkosť normálového zrýchlenia v čase $t_1 = 10\,s$ od začiatku pohybu?
c) Aká je veľkosť celkového zrýchlenia bodu v čase t_1 od začiatku pohybu?

$$\left[\begin{array}{l} \textbf{a)}\ t_N = \dfrac{N4\pi R}{v_N}; \quad t_5 = 20\pi\,\mathrm{s}; \quad \textbf{b)}\ a_\mathrm{n}(t) = \dfrac{v_N^4}{16N^2\pi^2R^3}t^2; \quad a_\mathrm{n}(t_1) = \dfrac{1}{40\pi^2}\,\mathrm{m/s^2} \\ \textbf{c)}\ a(t) = \sqrt{a_\mathrm{n}^2(t) + a_\mathrm{t}^2(t)}; \quad a(t_1) = \dfrac{1}{40\pi}\sqrt{\dfrac{1}{\pi^2} + \dfrac{1}{5}} = 2{,}99\,.\,10^{-3}\,\mathrm{m/s^2} \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.11 ☆☆★★ (C)

Bod sa pohybuje z pokoja po kružnici s polomerom $R = 0{,}2\,\mathrm{m}$ s konštantným tangenciálnym zrýchlením a_t. Aké je normálové zrýchlenie a_{n1} v čase $t_1 = 20$ s od začiatku pohybu, keď na konci tretej otáčky mal obvodovú rýchlosť $v_3 = 0{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$?

$$\left[a_{n1} = \frac{1}{144\pi^2}\frac{v_3^4 t_1^2}{R^3} = 0{,}0563\,\mathrm{m\,s^{-2}}\right]$$

---

[6] ε je malé grécke písmeno, ktoré vyslovujeme epsilon; inou formou je ϵ.

PRÍKLAD 1.3.12

Bod sa pohybuje po kružnici s polomerom R tak, že prebehnutá dráha $s(t) = v_0 t - (1/2)kt^2$, kde k, v_0 sú konštanty. Určte

a) veľkosť tangenciálneho zrýchlenia,
b) veľkosť normálového zrýchlenia,
c) veľkosť celkového zrýchlenia,
d) v ktorom čase t_k je celkové zrýchlenie rovné konštante k?
e) počet obehov n_k bodu za čas t_k.

$$\left[\ \textbf{a)}\ a_{\mathrm{t}} = -k;\quad \textbf{b)}\ a_{\mathrm{n}} = \frac{(v_0 - kt)^2}{R};\quad \textbf{c)}\ a = \sqrt{k^2 + \frac{(v_0 - kt)^4}{R^2}};\quad \textbf{d)}\ t_k = \frac{v_0}{k};\quad \textbf{e)}\ n_k = \frac{v_0^2}{4\pi Rk}\ \right]$$

PRÍKLAD 1.3.13 ☆☆☆★ (D)

Koleso s polomerom $r = 0{,}3\,\mathrm{m}$ sa dáva do pohybu pomocou namotaného vlákna, na ktorom je zavesené závažie. Za čas $t = 12\,\mathrm{s}$ klesne závažie o $h = 5{,}4\,\mathrm{m}$. Akú má v tom okamihu uhlovú rýchlosť a koľko otočení vykoná koleso za tento čas?

$$\left[\ \omega = \frac{2h}{rt} = 3\,\mathrm{s}^{-1};\quad z = \frac{h}{2\pi r} = 2{,}865\ \right]$$

PRÍKLAD 1.3.14 ☆★★★ (B)

Koleso s polomerom R sa začína valiť po vodorovnej ceste tak, že jeho stred sa pohybuje so zrýchlením a_0. Na kolese zvoľte bod, ktorý sa na začiatku pohybu dotýka cesty. Vypočítajte

a) súradnice tohto bodu na obvode kolesa ako funkcie času,
b) rýchlosť tohto bodu (vektor a aj veľkosť) v závislosti od času,
c) obdobne aj zrýchlenie.

$$\left[\begin{array}{ll}
\textbf{a)} & x = R\cos\varphi + \frac{1}{2}a_0 t^2,\quad y = R\sin\varphi,\quad \text{kde } \varphi = \varphi(t) = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{a_0}{R}t^2 \\
\textbf{b)} & v_x = a_0 t(1 + \sin\varphi),\quad v_y = -a_0 t\cos\varphi,\quad v = a_0 t\sqrt{2(1 + \sin\varphi)} \\
\textbf{c)} & a_x = a_0(1 + \sin\varphi + \omega t\cos\varphi),\quad a_y = -a_0(\cos\varphi - \omega t\sin\varphi), \\
 & a = a_0\sqrt{2 + (\omega t)^2 + 2\sin\varphi + 2\omega t\cos\varphi},\quad \text{kde } \omega = \omega(t) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = -\frac{a_0}{R}t
\end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.15 ★★★★ (A)

Po otáčajúcom sa cirkusovom kruhovom javisku uteká myš zo stredu až ku okraju javiska konštantnou rýchlosťou $v_0 = 1{,}2\,\mathrm{m/s}$ vzhľadom na javisko. Vzhľadom naň beží po najkratšej možnej trajektórii (po radiále). Javisko spomaľuje svoje otáčanie s uhlovým zrýchlením veľkosti $\varepsilon_0 = 0{,}2\,\mathrm{rad/s^2}$. Počiatočná frekvencia otáčania (v okamihu, keď bola myš presne v strede javiska) bola $f_0 = 0{,}33$ otočky za sekundu. Polomer javiska je $r_J = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Aká sú veľkosti rýchlosti a zrýchlenia myši vzhľadom na nehybné šapitó v okamihu, keď sa dostane na okraj javiska?

Návod: Využite vzťahy pre transformáciu vektorov medzi súradnicovými sústavami: Všeobecný tvar týchto vzťahov je [Krempaský: Fyzika]

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{r}' \tag{1.1}$$

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' \tag{1.2}$$

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{E} \times \vec{r}' + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \tag{1.3}$$

Detailnejšie sú okomentované v postupe riešenia[7].

$$\left[\begin{array}{l} v_{\mathrm{okr}} = \sqrt{v_0^2 + \Omega_{\mathrm{okr}}^2 r_J^2} = 2{,}99\,\mathrm{m/s}; \quad a_{\mathrm{okr}} = \sqrt{(2\Omega_{\mathrm{okr}} v_0 - \varepsilon_0 r_J)^2 + (\Omega_{\mathrm{okr}}^2 r_J)^2} = 6{,}44\,\mathrm{m/s^2}, \\ \text{kde } \Omega_{\mathrm{okr}} = 2\pi f_0 - \varepsilon_0 \dfrac{r_J}{v_0} \end{array}\right]$$

PRÍKLAD 1.3.16 ★★★★ (A)

Predošlý príklad o cirkusovej myši riešte bez explicitného využitia vzťahov (1.2) a (1.3).
Návod: Kvôli kompaktnosti zápisu si zaveďte stĺpcový vektor pre súradnice (x, y) a podobne aj pre ďalšie vektory. Použite maticovo-vektorový zápis vzťahov.

[ako v predošlom príklade]

PRÍKLAD 1.3.17 ★★★★ (A)

Bodový objekt sa pohybuje z vrcholu kužeľa pozdĺž povrchovej priamky so zrýchlením a_0 vzhľadom na kužeľ. Vypočítajte veľkosť rýchlosti a zrýchlenia v čase t vzhľadom na nehybné okolie, ak kužeľ rotuje s uhlovou rýchlosťou ω a povrchová priamka zviera uhol α s osou kužeľa.
Návod: Využite vzťahy (1.2) a (1.3) pre transformáciu vektorov medzi súradnicovými sústavami. Detailnejšie sú okomentované v postupe riešenia príkladu 1.3.15. Sú výhodné najmä pri určovaní zrýchlenia.

[7] Znak Ω je veľké písmeno gréckej abecedy, ktoré vyslovujeme omega.

$$\left[\ v = a_0 t\sqrt{1 + \frac{1}{4}\omega^2 t^2 \sin^2\alpha}; \quad a = a_0\sqrt{1 + 3\omega^2 t^2 \sin^2\alpha + \frac{1}{4}\omega^4 t^4 \sin^2\alpha}\ \right]$$