Posledná aktualizácia: 14. apríla 2012. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii z 13. mája 2011): Malé úpravy textu a formátovania. Nový spôsob zobrazovania obtiažností.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

# 6 HYDROMECHANIKA

## PRÍKLAD 6.1 ☆☆☆★ (D)

Akou veľkou silou zdvihneme vo vode kameň, ktorý má na vzduchu tiaž $G = 147{,}2\,\mathrm{N}$, keď hustota kameňa $\rho_\mathrm{k} = 3\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$? Hustota vody je $\rho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

$$\left[\ F_\mathrm{dvih} = G\left(1 - \frac{\rho_\mathrm{v}}{\rho_\mathrm{k}}\right) = 98{,}1\,\mathrm{N}\ \right]$$

## PRÍKLAD 6.2 ☆☆☆★ (D)

Cez pevnú kladku je preložené lanko. Na jednom jeho konci visí 1 kg olova, na druhom 1 kg železa ($m_1 = 1\,\mathrm{kg}$). Na vzduchu sú obidve telesá v rovnováhe. Keď ich ponoríme do petroleja s hustotou $\rho = 880\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, rovnováha sa poruší. Na ktorú stranu a aké ťažké závažie (ktoré nebude ponorené do petroleja) musíme pridať na obnovenie rovnováhy? Hustota olova $\rho_1 = 11\,350\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$, hustota železa $\rho_2 = 7\,870\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

$$\left[\ m = \rho\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right) m_1 = 0{,}0343\,\mathrm{kg}\ \right]$$

## PRÍKLAD 6.3 ☆★★★ (B)

Bimetalický prúžok z kovov s hustotami $\rho_1$ a $\rho_2$ má vo vzduchu tiaž $G_1$ a vo vode tiaž $G_2$. Vypočítajte hmotnosť každého kovu v prúžku. Hustota vody je $\rho$. (Pod bimetalickým prúžkom si treba predstaviť dva kovové prúžky spolu zvarené svojimi plochami.) Prečo sa tento príklad vo všeobecnosti nedá vypočítať, ak by sme miesto bimetalického prúžku uvažovali zliatinu dvoch kovov?

$$\left[\ m_1 = \rho_1 \frac{\rho_2(G_1 - G_2) - \rho G_1}{\rho(\rho_2 - \rho_1)g}, \quad m_2 = \rho_2 \frac{\rho G_1 - \rho_1(G_1 - G_2)}{\rho(\rho_2 - \rho_1)g}\ \right]$$

## PRÍKLAD 6.4 ☆☆★★ (C)

Teleso malých rozmerov zhotovené z materiálu s hustotou $\rho$ padá z výšky $h$ do kvapaliny s hustotou $\rho_1$ ($\rho < \rho_1$). Vypočítajte hĺbku ponoru $L$ telesa a čas $t$, za ktorý sa teleso z tejto hĺbky opäť dostane na povrch kvapaliny.

$$\left[\ L = h\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}\ \right]$$

## PRÍKLAD 6.5 ☆☆★★ (C)

Drevený valec je ponorený vo vode do 2/3 svojej výšky. Akú prácu $W$ treba vykonať na vytiahnutie valca z vody? Polomer podstavy valca je $r = 10\,\mathrm{cm}$, výška $h = 60\,\mathrm{cm}$, hustota vody $\rho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

$$\left[\; W = \frac{2}{9}\pi r^2 \rho g h^2 = 24{,}65\,\mathrm{J} \;\right]$$

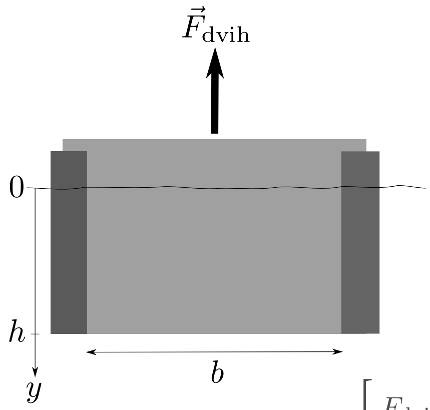
## PRÍKLAD 6.6 ☆☆★★ (C)

Valec s hmotnosťou $m = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ s priemerom $d = 1\,\mathrm{cm}$ pláva zvislo v kvapaline. Ak ho ponoríme do kvapaliny a potom pustíme, začne konať harmonické kmity, ktoré teraz pre jednoduchosť považujeme za netlmené, s periodou $T = 3{,}4\,\mathrm{s}$. Vypočítajte hustotu kvapaliny $\rho$.

$$\left[\; \rho = \frac{16\pi m}{d^2 T^2 g} = 886{,}8\,\mathrm{kg\,m^{-3}} \;\right]$$

## PRÍKLAD 6.7 ☆☆★★ (C)

Aká sila je potrebná na zdvihnutie rovinnej hate, ktorá je pod tlakom vody, ak hmotnosť hate $m = 250\,\mathrm{kg}$, šírka hate $b = 3\,\mathrm{m}$ a hĺbka vody $h = 1{,}5\,\mathrm{m}$ a keď koeficient trenia hate o opory $\mu = 0{,}3$ ?




$$\left[\; F_{\mathrm{dvih}} > mg + \frac{1}{2}\mu b h^2 \rho g \approx 12\ 380\,\mathrm{N} \;\right]$$

## PRÍKLAD 6.8 ☆★★★ (B)

V nádobe tvaru hranola je v bočnej stene kruhový otvor s polomerom $r = 20\,\mathrm{cm}$ uzavretý zátkou. Aká je hydrostatická tlaková sila, ktorá pôsobí na zátku, keď stred kruhového otvoru je vo výške $h_1 = 40\,\mathrm{cm}$ nad dnom? Aká je celková sila (ako vektor) na zátku a z akých príspevkov sa skladá? Nádoba je naplnená vodou do výšky $h = 1\,\mathrm{m}$.

$$\left[\; F = \pi r^2 (h - h_1)\rho g = 739\,\mathrm{N}, \quad \vec{F}_{\mathrm{celk}} = \vec{0}\ ,\ \text{keďže zátka sa nepohybuje.} \;\right]$$

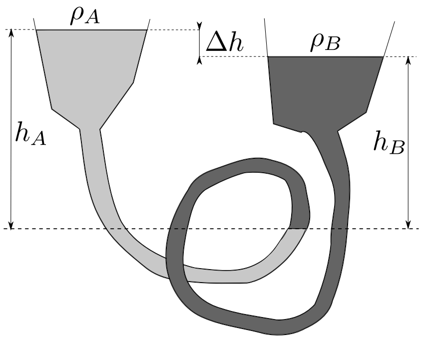
## PRÍKLAD 6.9 ☆☆☆★ (D)

Plocha piesta spojeného s pedálom hydraulickej nožnej brzdy je $S_1 = 5\,\mathrm{cm}^2$. Brzdový valec má plochu $S_2 = 75\,\mathrm{cm}^2$. Akou silou musíme tlačiť nohou na pedál, aby brzda vyvinula silu $1\,500\,\mathrm{N}$? O akú vzdialenosť $s_2$ sa posunie piest v brzdovom valci, ak piest spojený s pedálom sa posunie o $s_1 = 8\,\mathrm{cm}$?

$$\left[\; F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} = 100\,\mathrm{N}, \quad s_2 = s_1 \frac{S_1}{S_2} = 5{,}33\,.\,10^{-3}\,\mathrm{m} \;\right]$$

## PRÍKLAD 6.10 ☆☆★★ (C)

Dve otvorené ramená $A$ a $B$ spojených nádob sú naplnené nemiešajúcimi sa kvapalinami s hustotami $\rho_A = 0{,}9\,.\,10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ a $\rho_B = 1{,}0\,.\,10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Aká je vzdialenosť hladín v jednotlivých ramenách od spoločného rozhrania, keď rozdiel výšok hladín v jednotlivých ramenách je $\Delta h = 10\,\mathrm{cm}$? (Obrázok naznačuje, že riešenie príkladu nezávisí od tvaru nádob ani od profilu prepájajúcej trubice.)




$$\left[\; h_A = \Delta h \frac{\rho_B}{\rho_B - \rho_A} = 1\,\mathrm{m}, \quad h_B = \Delta h \frac{\rho_A}{\rho_B - \rho_A} = 0{,}9\,\mathrm{m} \;\right]$$

## PRÍKLAD 6.11 ☆★★★ (B)

Aký tvar má povrch vody vo valcovej odstredivke, ktorá sa otáča okolo zvislej osi s konštantnou uhlovou rýchlosťou $\omega$?

$$\left[\; \text{rotačný paraboloid: } z = z(0) + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{2g} \;\right]$$

## PRÍKLAD 6.12 ☆★★★ (B)

Vo valcovitej nádobe je kvapalina hustoty $\rho$. Nádoba sa otáča okolo svojej geometrickej osi stálou uhlovou rýchlosťou $\omega$. V dôsledku toho sa povrch kvapaliny ustáli v tvare rotačného paraboloidu. Nájdite tlak v kvapaline v hĺbke $h$ meranej od povrchu kvapaliny v strede nádoby a vo vzdialenosti $x$ od osi otáčania, keď na povrch kvapaliny pôsobí barometrický tlak $b$.

$$\left[\; p = b + \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \rho g h \;\right]$$

**PRÍKLAD 6.13** ☆★★★ (B)

Voda v nádobe má hladinu vo výške $h = 30\,\mathrm{cm}$. V akej výške $y_1$ nad dnom treba urobiť otvor v stene nádoby, aby voda striekala čo najďalej na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

$$[\; y_1 = h/2 = 15\,\mathrm{cm} \;]$$

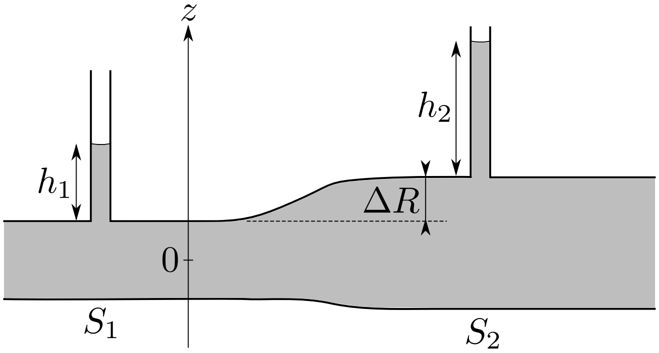
**PRÍKLAD 6.14** ☆☆★★ (C)

Nádoba valcovitého tvaru má v stene dva otvory umiestnené nad sebou vo výškach $h_1$ a $h_2$ od dna. V akej výške má byť hladina kvapaliny nad dnom nádoby, aby kvapalina striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú rovinu, na ktorej je nádoba položená?

$$[\; h = h_1 + h_2 \;]$$

**PRÍKLAD 6.15** ☆★★★ (B)

Vodorovnou trubicou nerovnakého prierezu preteká voda. Treba určiť, aké množstvo vody $Q$ preteká každým prierezom trubice za jednotku času, keď v miestach s prierezom $S_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$ a prierezom $S_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$ umiestnené manometrické trubice ukazujú rozdiel vodných hladín $\Delta h = 20\,\mathrm{cm}$. Výškový rozdiel spodných častí manometrických trubíc je $\Delta R = 4\,\mathrm{cm}$.
Návod: Uvažujte zjednodušený model, v ktorom zanedbáte zmeny rýchlosti v závislosti od výškovej súradnice $z$.




($h_1, h_2$ nie sú dané; daný je len ich rozdiel $\Delta h = h_2 - h_1$ .)

$$\left[\; Q = \sqrt{2g(\Delta h + \Delta R)}\ \frac{S_1 S_2}{\sqrt{S_2^2 - S_1^2}} = 2\ 046\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{s}^{-1} \;\right]$$

**PRÍKLAD 6.16** ☆★★★ (B)

Výtoková trubica zvisle striekajúcej fontány má tvar zrezaného kužeľa. Priemer horného otvoru je $d$, spodného $D$ a výška trubice je $h$. O koľko musí byť väčší tlak (na úrovni spodného prierezu) voči atmosferickému, aby voda striekala do výšky $H$ nad trubicu?

$$\left[\ \Delta p = \rho g \left\{ h + H \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^4 \right] \right\}\ \right]$$

**PRÍKLAD 6.17** ☆★★★ (B)

Na dne valcovitej nádoby je kruhový otvor s priemerom $d = 1\,\mathrm{cm}$. Priemer nádoby je $D = 0{,}5\,\mathrm{m}$. Nájdite závislosť rýchlosti $v$, ktorou klesá hladina vody v nádobe, od výšky $h$ hladiny nad dnom. Vypočítajte číselnú hodnotu tejto rýchlosti pre $h = 0{,}2\,\mathrm{m}$. Vodu považujte za ideálnu kvapalinu.

$$\left[\ v = v(h) = d^2 \sqrt{\frac{2gh}{D^4 - d^4}}; \quad v(0{,}2\,\mathrm{m}) = 7{,}92\,.\,10^{-4}\,\mathrm{ms^{-1}}\ \right]$$

**PRÍKLAD 6.18** ★★★★ (A)

Bazén s hĺbkou $h_0$ je po okraj naplnený vodou.
**a)** Vypočítajte, za aký čas vytečie voda malým otvorom na dne bazénu, ak plošný obsah otvoru je $S_2$ a plocha bazéna je $S_1$.
**b)** Určte aj čas, ktorý by bol potrebný na vytečenie rovnakého množstva vody, ak by sa dopúšťaním vody udržiavala hladina stále vo výške $h_0$ nad otvorom.
Výsledky nakoniec vyčíslite pre $h_0 = 1\,\mathrm{m}$, $S_1/S_2 = 400$.

$$\left[\ \textbf{a)}\ t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]} = 180{,}6\,\mathrm{s}; \quad \textbf{b)}\ t_2 = \sqrt{\frac{h_0}{2g}\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]} = \frac{t_1}{2} = 90{,}3\,\mathrm{s}\ \right]$$

**PRÍKLAD 6.19** ☆★★★ (B)

Injekčná striekačka má plošný obsah piesta $S_1 = 1{,}2\,\mathrm{cm^2}$ a jej otvor má prierez $S_2 = 1\,\mathrm{mm^2}$. Ako dlho bude vytekať voda zo striekačky uloženej vo vodorovnej rovine, ak na piest bude pôsobiť sila $F = 4{,}9\,\mathrm{N}$ a ak sa piest posunie celkom o dĺžku $L = 4\,\mathrm{cm}$? (Vnútorné trenie zanedbajte.)

$$\left[\ t = \frac{L}{S_2}\sqrt{\frac{\rho S_1\left(S_1^2 - S_2^2\right)}{2F}} = 0{,}53\,\mathrm{s}\ \right]$$