

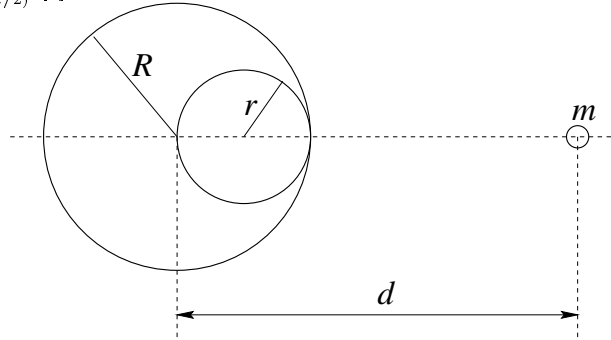
GRAVITAČNÉ POLE

1. Dve medené gule s polermi $r_1 = 2$ cm, $r_2 = 3$ cm, sa dotýkajú. Aká je gravitačná potenciálna energia tejto sústavy ? ($\rho = 8,6 \cdot 10^3$ kg/m³)

$$[E_P = -G \left(\frac{4}{3} \pi \rho \right)^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_1 + r_2} = -3,74 \cdot 10^{-10} \text{ J (} G \text{ je gravitačná konštanta)}]$$

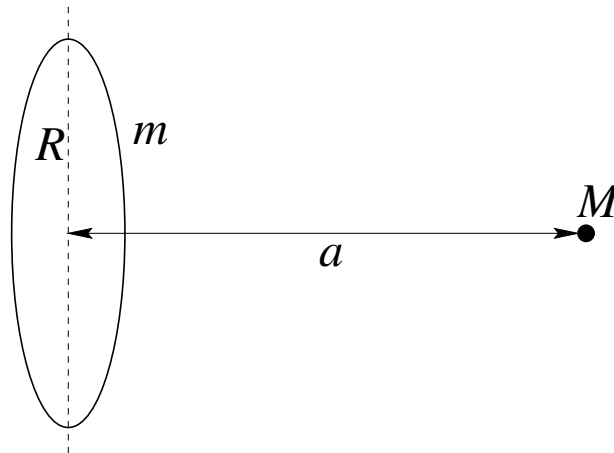
2 V kovovej homogénnej guli s polomerom R je vytvorená dutina s polomerom $r = R/2$ (obr.). Hmotnosť tejto gule bez dutiny je M . Akou veľkou silou pôsobí toto teleso na malú guľôčku hmotnosti m , ktorej stred leží na osi symetrie telesa a je od stredu pôvodnej gule vzdialený o dĺžku d ?

$$[F = GmM \left[\frac{1}{d^2} - \frac{1}{8(d-R/2)^2} \right]]$$



3. Akou veľkou gravitačnou silou pôsobí homogénny drôt hmotnosti m ohnutý do tvaru kružnice s polomerom R na hmotný bod s hmotnosťou M ležiaci na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu ?

$$[F = G \frac{Mma}{(R^2 + a^2)^{3/2}}]$$



4. Vypočítajte potenciál a intenzitu gravitačného poľa homogénneho drôtu hmotnosti m ohnutého do tvaru kružnice s polomerom R v bode P na osi kružnice vo vzdialenosti a od jej stredu.

$$[V = -G \frac{m}{\sqrt{a^2 + R^2}}, \quad \mathbf{E} = G \frac{ma}{(a^2 + R^2)^{3/2}} \boldsymbol{\nu}, \text{ kde } \boldsymbol{\nu} \text{ je jednotkový vektor kolmý na rovinu drôtu a orientovaný ku drôtu. }]$$

5. Určte veľkosť gravitačného zrýchlenia g ako funkciu vzdialenosti h od zemského povrchu, keď poznáte polomer Zeme R a zrýchlenie g_0 na povrchu Zeme.

$$[g = g_0 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2]$$

6. V akej vzdialenosti od povrchu Zeme má gravitačné zrýchlenie veľkosť 1 m/s^2 , keď polomer Zeme $R = 6378$ km a na povrchu Zeme $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$.

$$[h = R \left(\sqrt{\frac{g_0}{g}} - 1 \right) = 13598,5 \text{ km}]$$

7. Typická neutrónová hviezda má hmotnosť Slnka ($m = 2 \cdot 10^{30}$ kg), ale polomer len $R = 10$ km. Vypočítajte

- aké je gravitačné zrýchlenie na povrchu hviezdy,
 - akú rýchlosť získa voľne padajúce teleso na dráhe dĺžky $s = 1$ m.
- $$[\text{a) } g = Gm/R^2 = 13,34 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2, \quad \text{b) } v = \sqrt{2sg} = 1,633 \cdot 10^6 \text{ m/s}]$$

8. V akom vzťahu je výška veže H s hĺbkou šachty h , keď na vrchole veže a na dne šachty je doba kmitu toho istého matematického kyvadla rovnaká? Polomer Zeme $R \gg H$.

$$[h = H \frac{R(2R+H)}{(R+H)^2} \simeq 2H]$$

9. Nájdite zrýchlenie, ktorým by padali telesá na povrchu Mesiaca ak predpokladáme, že na telesá pôsobí len gravitačné pole Mesiaca a keď vieme, že medzi hmotnosťami a polermi Mesiaca a Zeme platia vzťahy $M_M \simeq 1/81 M_Z$, $R_M \simeq 1/4 R_Z$.

$$[g_M \simeq \frac{16}{81} g_0 = 1.938 \text{ ms}^{-2}]$$

10. Nájdite hodnotu rýchlosti v_0 , ktorú treba udeliť v smere zvislom nahor telesu nachádzajúcemu sa na povrchu Zeme, aby sa dostalo do výšky $h = R_Z$. Odpor prostredia neuvažujte, $R_Z = 6370 \text{ km}$.

$$[v_0 = \sqrt{g_0 R_Z} = 7,905 \text{ km/s}]$$

11. Akú rýchlosť treba udeliť rakete nachádzajúcej sa na povrchu Zeme, aby sa vymanila z jej gravitačného poľa? ($R = 6378 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ m/s}^2$).

$$[v = \sqrt{2g_0 R} = 11,2 \text{ km/s}]$$

12. Ak skokan vyskočí na povrchu Zeme do výšky $h_Z = 1,2 \text{ m}$, do akej výšky h_M vyskočí na Mesiaci, ak pri odraze vyvinie rovnaký impulz ako na Zemi? Hmotnosť a polomer Mesiaca: $M_M = 6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $R_M = 1,6 \cdot 10^6 \text{ m}$.

$$[h_M = \frac{g_0}{g_M} h_Z = 6,742 \text{ m}]$$

13. Teleso s hmotnosťou m sa nachádza najprv na povrchu Zeme, potom vo výške h nad jej povrchom (hmotnosť Zeme M a jej polomer R sú známe). Určte

a) rozdiel potenciálnej energie ΔU telesa vo výške h a na povrchu Zeme, t.j. potenciálnu energiu vzhľadom na povrch Zeme,

b) ΔU pre $h \ll R$.

$$[\text{a) } \Delta U = g_0 m R h, \text{ kde } g_0 = GM/R^2, \text{ b) } \Delta U = m g_0 h]$$

14. Vypočítajte, v ktorom mieste na spojnici medzi Zemou a Mesiacom sa intenzita ich spoločného gravitačného poľa rovná nule! Hmotnosť Mesiaca $M_M = 1/81 M_Z$, vzdialenosť stredov oboch telies $d \simeq 380\,000 \text{ km}$.

$$[x = 0,9 d = 342\,000 \text{ km od stredu Zeme}]$$

15. Telesu s hmotnosťou m , ktoré sa nachádza na povrchu Zeme, udelíme vo vertikálnom smere rýchlosť v_0 . Akú výšku h teleso dosiahne, ak v_0 je menšie než 2. kozmická rýchlosť? Odpor prostredia neuvažujte.

$$[h = v_0^2 R / (2g_0 R - v_0^2)]$$

16. Teleso padá voľným pádom z veľkej výšky $h \gg R$ (R je polomer Zeme). Akou rýchlosťou v_0 by dopadlo na Zem, ak by sa pohybovalo vo vákuu?

$$[v_0 = \sqrt{\frac{2g_0 h R}{R+h}} \simeq \sqrt{2g_0 R}]$$

17. Určte obvodovú rýchlosť, ktorou Zem obieha okolo Slnka, za predpokladu, že dráha Zeme je kruhová s polomerom $R_d = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$, a keď vieme, že hmotnosť Slnka $M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

$$[v = 29,82 \text{ km/s}]$$

18. Dokážte, že úniková rýchlosť v_2 od Slnka na kružnici po ktorej sa pohybuje Zem je $\sqrt{2}$ krát väčšia než obežná rýchlosť v_1 Zeme okolo Slnka.

$$[v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \quad v_1 \sqrt{\frac{GM}{r}}]$$

19. Vypočítajte hmotnosť Slnka M_S ak predpokladáme, že Zem obieha po kruhovej dráhe s polomerom $R = 149\,504\,200 \text{ km}$ a dobou obehu $T = 365,25 \text{ dní}$. Pomocou známeho polomeru Slnka $R_S = 695\,300 \text{ km}$ potom vypočítajte tiažové zrýchlenie g_S na jeho povrchu.

$$[M_S = 1,986 \cdot 10^{30}, \quad g_S = 274 \text{ m/s}^2]$$

20. Vzdialenosť Marsu od Slnka je 1,52-krát väčšia ako vzdialenosť Zeme od Slnka. Na základe tohto údaju určte obežnú dobu Marsu okolo Slnka.

$$[T_M = 1,874 T_Z = 684 \text{ dní}]$$

21. Umelá družica obieha okolo Zeme po kruhovej dráhe vo výške 200 km nad zemským povrchom. Určte jej obvodovú rýchlosť v_0 a dobu jedného obehu T . Polomer Zeme $R = 6378 \text{ km}$.

$$[v_0 = \sqrt{g_0 R^2 / (R+h)} = 7,79 \text{ km/s}, \quad T = 2\pi R / v_0 \simeq 1,43 \text{ h}]$$

22. Určte dostredivé zrýchlenie družice pri jej pohybe po kruhovej dráhe okolo Zeme vo výške $h = 200 \text{ km}$ nad jej povrchom. Polomer Zeme $R = 6378 \text{ km}$.

$$[a_d = g_0 [R / (R+h)]^2 = 9,22 \text{ m/s}^2]$$

23. V akej vzdialenosti h od povrchu Zeme sa nachádza stacionárna družica, ktorá sa pohybuje po kruhovej dráhe v rovine rovníka? Polomer Zeme $R = 6378 \text{ km}$, $g_0 = 9,81 \text{ ms}^{-2}$, uhlová rýchlosť Zeme $\omega = 2\pi / \text{deň}$.

$$[h = \sqrt[3]{g_0 R^2 / \omega^2} - R \simeq 36\,000 \text{ km}]$$

24. Ak by stredom Zeme pozdĺž jej priemeru prechádzal tunel, ukážte, že sila pôsobiaca na teleso hmot-

nosti m , ktoré z povrchu Zeme voľne pustíme do tunela, je priamo úmerná jeho vzdialenosti x od stredu Zeme a smeruje do jej stredu (obr.) Polomer Zeme $R = 6378$ km, $g_0 = 9,81$ ms⁻². Ďalej vypočítajte čas t_1 , za ktorý sa toto teleso dostane do stredu Zeme, čas t_2 , za ktorý prejde celým tunelom, a rýchlosť v_1 , ktorú má teleso v strede tunela.

$$[f = g_0 m x / R, \quad t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{R/g_0} = 21,2 \text{ min.}, \quad t_2 = 2t_1 = 42,2 \text{ min.}, \quad v_1 = \sqrt{Rg_0} = 7,91 \text{ km/s}]$$

