Posledná aktualizácia: 14. apríla 2012. Čo bolo aktualizované (oproti predošlej verzii z 11. februára 2011): Preusporiadané poradie úvodných 9 príkladov. Kompaktnejšia prezentácia príkladu 4.7, najmä bez špecifikácie konkrétnej orientácie súradnicovej sústavy. Oprava časti výsledkov príkladu 4.15. Malé úpravy v niektorých ďalších príkladoch. Nový spôsob zobrazovania obtiažností.

Písmená **A**, **B**, **C**, **D** vyjadrujú obtiažnosť príkladu. **D** je najnižšia.

# 4 DYNAMIKA SÚSTAVY HMOTNÝCH BODOV[1]

### PRÍKLAD 4.1 ☆☆☆★ (D)

Aká časť kinetickej energie $\Delta E_{\mathrm{k}}$ sa „stratila" pri centrálnej zrážke dvoch gúľ s hmotnosťami $m_1$ a $m_2$, ktorých rýchlosti pred zrážkou boli $v_1$ a $v_2 = 0$ a po zrážke boli rovnaké?

$$\left[\ \frac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{E_{\mathrm{k}}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2},\ \text{kde } E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m_1 v^2\ \right]$$

### PRÍKLAD 4.2 ☆☆☆★ (D)

Dve rovnaké pružné guľky visia na nitiach rovnakej dĺžky vedľa seba. Prvú vychýlime o uhol $\alpha$ a pustíme. O aký maximálny uhol $\beta_{\mathrm{max}}$ sa po zrážke vychýli druhá guľka? Odpoveď zdôvodnite.

$$[\ \beta_{\mathrm{max}} = \alpha\ ]$$

### PRÍKLAD 4.3 ☆☆★★ (C)

Do protónu, ktorý je v pokoji vzhľadom na pozorovateľa, pružne narazí druhý protón a odchýli sa od pôvodného smeru pohybu. Aký uhol zvierajú rýchlosti oboch protónov po zrážke?

$$[\ \pi/2\ ]$$

### PRÍKLAD 4.4 ☆☆★★ (C)

Loďka s dĺžkou $d$ a hmotnosťou $m_0$ stojí na pokojnej hladine vody. Človek s hmotnosťou $m$ prejde z jedného jej konca na druhý. O akú vzdialenosť $\Delta x$ sa pritom loďka posunie? Odpor prostredia neuvažujte.

$$\left[\ \Delta x = \frac{m}{m + m_0}\, d\ \right]$$

[1] Príklady tejto témy síce pojednávajú o telesách, ale z hľadiska podstaty príkladov sa tieto telesá dajú zjednodušiť na hmotné body.

## PRÍKLAD 4.5 ☆☆☆★ (D)

Na člne stojí poľovník s puškou. Hmotnosť poľovníka, pušky a člna je spolu $m_1$. Poľovník vystrelí z pušky náboj hmotnosti $m_2$. V dôsledku spätného nárazu sa čln spolu s poľovníkom začne pohybovať opačným smerom, ako je smer výstrelu. Odpor vody zanedbávame. Aký je pomer kinetických energií náboja a poľovníka s člnom a puškou v okamihu tesne po výstrele?

$$\left[\ \frac{K_2}{K_1} = \frac{m_1}{m_2}\ \right]$$

## PRÍKLAD 4.6 ☆☆★★ (C)

Aká je ťažná sila $f$ raketového motora, z ktorého trysky unikajú za jednotku času plyny o hmotnosti $\mu$ relatívnou rýchlosťou $v$?

$$[\ f = \mu v\ ]$$

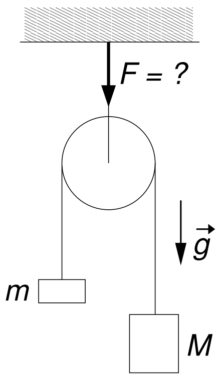
## PRÍKLAD 4.7 ☆☆★★ (C)

V molekule amoniaku ($NH_3$) sú ťažiská atómov vodíka navzájom vzdialené o $a = 6{,}28\ .\ 10^{-11}$ m, vzdialenosť vodík - dusík je $b = 10{,}14\ .\ 10^{-11}$ m. Určte vzdialenosť ťažiska molekuly amoniaku $c$ od atómu dusíka, keď vieme, že pomer atómových hmotností dusíka a vodíka $\gamma = 13{,}9$.

$$\left[\ c = \frac{\sqrt{b^2 - a^2/3}}{1 + \gamma/3} = 1{,}41\ .\ 10^{-11}\ \mathrm{m}\ \right]$$

## PRÍKLAD 4.8 ☆☆★★ (C)

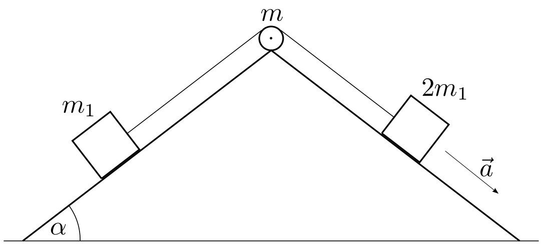
Cez kladku zanedbateľnej hmotnosti (obrázok) je prevesené lano, na koncoch ktorého sú upevnené bremená s hmotnosťami $m$ a $M$. Určte silu $F$, ktorou je namáhaný záves kladky, ak sa bremená samovoľne pohybujú.




$$\left[\ F = \frac{4mM}{m + M}\, g\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.9** ☆★★★ (B)

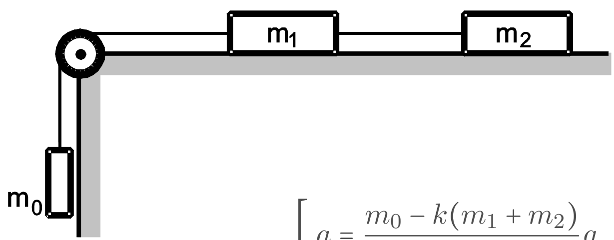
Cez kladku hmotnosti $m$ sú na symetricky umiestnených naklonených rovinách (obrázok) zvierajúcich s vodorovnou rovinou uhol $\alpha$ uložené a lankom spojené dve telesá o hmotnostiach $m_1$ a $m_2 = 2m_1$. Sústava sa pohybuje (bez trenia) v dôsledku prevažujúcej tiaže druhého telesa. Kladka je z homogénneho materiálu. Vypočítajte zrýchlenie sústavy.




$$\left[\ a = \frac{m_1 \sin\alpha}{3m_1 + m/2}\, g\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.10** ☆★★★ (B)

V zariadení[2] podľa obrázku sú telesá troch hmotností $m_0, m_1, m_2$, pričom hmotnosť lanka a kolieska možno zanedbať a trenie kolieska tiež. Nájdite zrýchlenie $a$, ktorým sa pohybuje teleso $m_0$ smerom nadol a silu napínania lanka $T$ medzi telesami $m_1$ a $m_2$, ak koeficient trenia medzi telesami a podkladom je $k$.

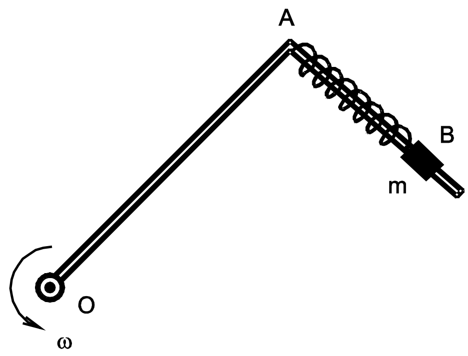



$$\left[\ a = \frac{m_0 - k(m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2}\, g, \quad T = \frac{m_0 m_2 (1 + k)}{m_0 + m_1 + m_2}\, g\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.11** ☆★★★ (B)

Zariadenie na obrázku (pohľad zhora) hladký drôt v tvare písmena Γ, ktorý leží v horizontálnej rovine. Na ramene $AB$ je nasunutá pružina s konštantou $k$. Pružina je pripevnená v mieste $A$ a v mieste $B$ je na ňu upevnené teleso v tvare valca o hmotnosti $m$ nasunuté na drôt, po ktorom sa môže pohybovať bez trenia. Drôt roztočíme okolo vertikálnej osi idúcej cez bod $O$ uhlovou rýchlosťou $\omega$. Vypočítajte relatívne predĺženie pružiny $\epsilon$. Ako závisí výsledok od smeru rotácie?

[2] Tento a všetky nasledovné príklady podľa rôznych zdrojov dodal doc. O. Budke.




$$\left[\ \epsilon = \frac{1}{\dfrac{k}{m\omega^2} - 1}\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.12** ☆☆★★ **(C)**

Cez kladku upevnenú na strope miestnosti je prevesené lanko, na koncoch ktorého sú zavesené závažia o hmotnostiach $m_1, m_2$. Vypočítajte zrýchlenie ťažiska sústavy telies za predpokladu, že hmotnosti lanka a kladky sú zanedbateľné a tak isto aj trenie.

$$\left[\ a_{\mathrm{T}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 g\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.13** ☆★★★ **(B)**

Cez kladku zavesenú na strope výťahovej kabíny je prevesené lanko, na koncoch ktorého sú zavesené závažia o hmotnostiach $m_1$ a $m_2$. Kabína výťahu sa začne pohybovať zrýchlením $\vec{a}_0$. Pri zanedbaní hmotnosti lanka a kladky ako aj trenia, vypočítajte:

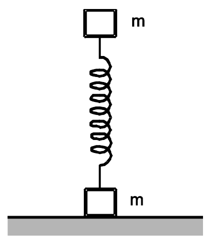
**a)** zrýchlenie $\vec{a}_1{}'$ závažia $m_1$ vzhľadom na kabínu,

**b)** silu $\vec{F}_s$, ktorou záves kladky namáha strop kabíny.

$$\left[\ \textbf{a)}\ \vec{a}_1{}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(\vec{g} - \vec{a}_0), \quad \textbf{b)}\ \vec{F}_s = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{g} - \vec{a}_0)\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.14** ★★★★ **(A)**

Sústava na obrázku pozostáva z dvoch rovnakých kociek, každá s hmotnosťou $m$, medzi ktorými je stlačená pružina tuhosti $k$. Kocky sú zviazané niťou, ktorú v istom okamihu prestrihneme. Pri akých hodnotách počiatočného stlačenia pružiny $\Delta\ell$ spodná kocka podskočí po prestrihnutí nite?




$[\ \Delta\ell > 3mg/k\ ]$

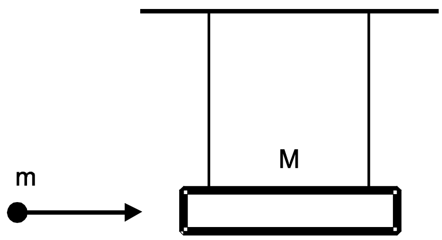
**PRÍKLAD 4.15** ☆☆★★ (C)

Letiaci náboj z pušky o hmotnosti $m$ uviazol v strede dreveného valca o hmotnosti $M$ zaveseného na lankách o dĺžke $\ell$ (obrázok). Lanká sa od zvislého smeru odchýlili o uhol $\theta$. Vypočítajte:

**a)** rýchlosť náboja pred nárazom na valec; spravte aj priblíženie pre prípad $M \gg m$.

**b)** relatívnu časť kinetickej energie náboja, ktorá sa premenila na vnútornú energiu.

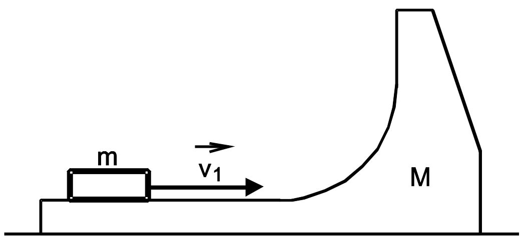
Pri riešení predpokladajte, že zavŕtanie sa náboja do valca nastane okamžite, t.j. ešte vtedy, keď je valec nevychýlený.




$$\left[\ \textbf{a)}\ v = 2\,\frac{M+m}{m}\sqrt{g\ell}\,\sin\frac{\theta}{2} \approx \frac{2M}{m}\sqrt{g\ell}\,\sin\frac{\theta}{2}, \quad \textbf{b)}\ \frac{\Delta E_{\mathrm{k}}}{E_{\mathrm{k}}} = \frac{M}{M+m}\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.16** ☆★★★ (B)

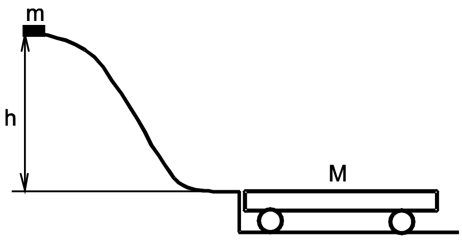
Na hladkej horizontálnej rovine sa nachádza teleso o hmotnosti $M$, ktoré sa môže pohybovať po vodorovnej rovine bez trenia. Na ňom je položené iné teleso o hmotnosti $m$ (obrázok). Tomuto druhému telesu sme udelili v horizontálnej rovine rýchlosť $v_1$. Do akej výšky $H$ nad začiatočnú polohu vyletí toto teleso po oddelení sa od telesa $M$. Trenie sa v celej úlohe neuvažuje.




$$\left[\ H = \frac{M}{m+M}\,\frac{v_1^2}{2g}\ \right]$$

**PRÍKLAD 4.17** ☆☆★★ (C)

Kváder o hmotnosti $m$ spustíme zo šmykľavého kopčeka (bez trenia) o výške $h$, ktorý sa dole začne šmýkať po doske o hmotnosti $M$ s trením (obrázok). Doska je uložená na ložiskách, aby sme trenie medzi ňou a podlahou mohli zanedbať. Po určitom čase sa doska pohybuje už spolu s kvádrom, ktorý sa vďaka treniu na nej zastavil. Vypočítajte prácu síl trenia pri takomto procese.




$$\left[ A = -\frac{mM}{m+M}gh \right]$$

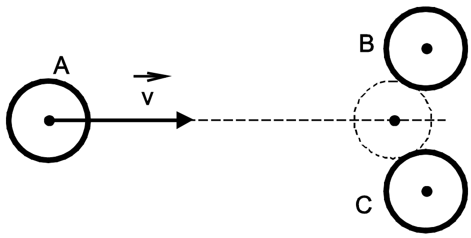
## PRÍKLAD 4.18 ☆☆★★ (C)

Nájdite prírastok kinetickej energie sústavy dvoch guliek s hmotnosťami $m_1, m_2$ a rýchlosťami $\vec{v}_1$,$\vec{v}_2$, ku ktorému prišlo pri ich absolútne nepružnej zrážke.

$$\left[ \Delta T = -\frac{1}{2}\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 < 0, \text{ kde } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ je tzv. redukovaná hmotnosť sústavy} \right]$$

## PRÍKLAD 4.19 ☆☆★★ (C)

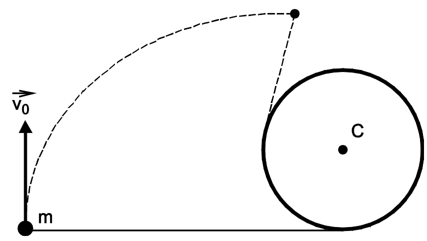
Na hladkej horizontálnej rovine ležia 3 rovnaké kotúče $A, B, C$ (obrázok). Kotúču $A$ sme udelili horizontálnu rýchlosť $\vec{v}$ tak, že potom pružne narazil súčasne do oboch kotúčov $B$ a $C$. Vzdialenosť medzi stredmi kotúčov $B$ a $C$ pred zrážkou bola $\eta$-krát väčšia ako je priemer kotúčov. Nájdite rýchlosť $v_A$ kotúča $A$ po náraze a tiež určte, pri akých hodnotách $\eta$ sa kotúč odrazí späť alebo ostane stáť alebo pôjde v pôvodnom smere.




$$\left[ v_A = -\frac{2-\eta^2}{6-\eta^2}v, \quad \eta < \sqrt{2}, \quad \eta = \sqrt{2}, \quad \eta > \sqrt{2} \right]$$

## PRÍKLAD 4.20 ☆★★★ (B)

Vertikálny valec je upevnený na hladkej horizontálnej rovine. Na valec je tesne namotaná niť, na ktorej voľný koniec je upevnený neveľký kotúč o hmotnosti $m = 50\,\text{g}$ (obrázok, pohľad zhora). Kotúču sme udelili horizontálnu rýchlosť $v_0 = 5\,\text{m/s}$ smerom kolmo na napnutú niť. Vypočítajte moment hybnosti kotúča vzhľadom na vertikálnu os $C$ tvoriacu os valca, ak viete, že sila, ktorou je niť v tomto momente napínaná, je $F_m = 26\,\text{N}$.




$$\left[\ L_C = \frac{m^2 v_0^3}{F_m} = 0{,}012\,\mathrm{kg\,m^2/s}\ \right]$$