Laboratórna úloha č. 3

Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies pomocou kyvadla na trifilárnom závese

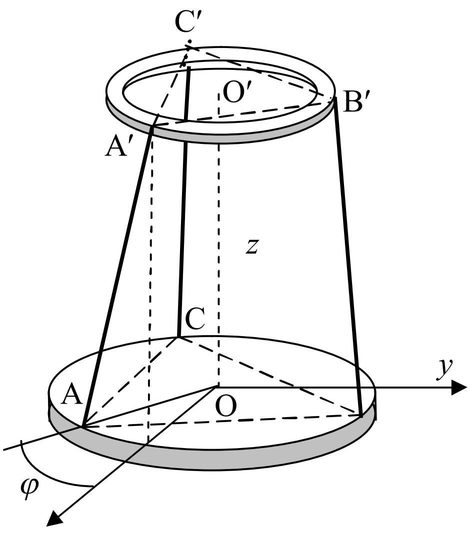
Úloha: Určiť moment zotrvačnosti vybraných telies.

Teoretický úvod

Moment zotrvačnosti J tuhého telesa je definovaný vzťahom $J = \int x^2 \mathrm{d}m$, kde x je vzdialenosť hmotného elementu $\mathrm{d}m$ od zvolenej osi. Vzhľadom na rôzne osi má teleso rôzne momenty zotrvačnosti. Významné sú momenty zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom telesa. V prípade telies ktoré majú jednoduchý tvar, dá sa integrál vypočítať, ale pri telesách s komplikovaným tvarom treba moment zotrvačnosti určiť meraním. Napríklad pre valec s hmotnosťou m a polomerom R platí

$$J = (1/2)mR^2 \tag{1}$$

Z definície vyplýva, že moment zotrvačnosti je aditívna veličina, t.j. moment zotrvačnosti dvoch navzájom spojených telies je súčtom ich momentov zotrvačnosti vzhľadom na tú istú os otáčania. Toto sa využíva na určenie momentu zotrvačnosti telesa s komplikovanejším tvarom, ktoré sa umiestni na spoločnú os s telesom, ktorého moment zotrvačnosti sa dá vypočítať a meraním sa určí súčet ich momentov zotrvačnosti. Rozdiel nameraného a vypočítaného je potom momentom zotrvačnosti telesa s komplikovanejším tvarom.



Obrázok 1: Trifilárny záves.

Jedna z metód merania momentu zotrvačnosti využíva kyvadlo na trifilárnom (trojitom) závese (obr. 1). Homogénna kruhová platňa P s polomerom R_p a hmotnosťou m_p je symetricky zavesená na troch dlhých nitiach AA′, BB′, CC′ tak, že body A, B, C, ako aj A′, B′, C′ tvoria vrcholy rovnostranných trojuholníkov s ťažiskami O a O′ umiestnenými nad sebou. Ťažiskami prechádza aj zvislá os otáčania spodnej platne. Roviny trojuholníkov sú vodorovné, trojuholník A′B′C′ je nepohyblivý, vzdialenosť od jeho ťažiska O′ po jeho vrcholy označíme r. Vychýlením spodnej platne z rovnovážnej polohy o uhol φ vznikne moment síl, ktorý vracia platňu do rovnovážnej polohy, otáča ju okolo osi OO′. Zotrvačnosťou platňa prekmitne cez rovnovážnu polohu, zastaví sa pôsobením opačne pôsobiaceho momentu síl a pohyb sa opakuje z opačnej strany – platňa koná rotačný kmitavý pohyb. Doba kmitu T takéhoto kyvadla závisí od momentu zotrvačnosti platne, čo sa dá využiť na jeho určenie. Pri tejto metóde si treba uvedomiť, že pri pootočení okolo osi OO′ sa platňa aj nadvihne, zväčší sa jej potenciálna energia. Výpočet doby kmitu je preto zložitejší ako napr. pri fyzikálnom kyvadle. Pri odvodzovaní zanedbáme trenie a prácu potrebnú na deformáciu (torziu) závesných nití. Uvažujeme pohyb v homogénnom tiažovom poli Zeme a predpokladáme nemennosť mechanickej energie sústavy.

Najprv zavedieme karteziánsku súradnicovú sústavu, ktorej začiatok umiestnime do bodu, v ktorom sa nachádza bod O platne, keď je táto v rovnovážnej (najnižšej) polohe. Začiatok súradnicovej sústavy leží vo vzdialenosti z_0 od pevného bodu O′. Os z zvolíme zvislo nahor, osi x a y tak, aby ich rovina (xy) bola vodorovná. Os x nech smeruje do bodu, v ktorom sa nachádza bod A platne P v okamihu, keď je platňa v najnižšej polohe. Od smeru osi x budeme odčítavať výchylku φ.

Potenciálnu energiu platne v rovnovážnej polohe ($\varphi = 0$, $z = 0$) budeme považovať za nulovú. Pri výchylke φ z rovnovážnej polohy má platňa výškovú súradnicu z a teda potenciálnu energiu $m_\mathrm{p} g z$, kde m_p je hmotnosť platne. Ak platňa nie je v krajnej polohe, má uhlovú rýchlosť $\omega = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t\ \omega$ a kinetickú energiu $(1/2)J_\mathrm{p}\omega^2$, pričom J_p je jej moment zotrvačnosti vzhľadom na os OO′. Súčet E týchto energií sa nemení, takže platí rovnica:

$$\frac{1}{2}J_\mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m_\mathrm{p} g z = E \tag{2}$$

Aby sme túto diferenciálnu rovnicu mohli riešiť, musíme vyjadriť závislosť súradnice z od uhla pootočenia φ. Výpočet (pozri dodatok), pre prípad malých výchyliek, poskytuje výsledok

$$z = \frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 \tag{3}$$

Po dosadení do rovnice (3.2) dostaneme

$$\frac{1}{2}J_\mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + m_\mathrm{p} g \frac{Rr}{2z_0}\varphi^2 = E \tag{4}$$

Rovnicu derivujeme podľa času:

$$\frac{1}{2}J_\mathrm{p} 2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + m_\mathrm{p} g \frac{Rr}{2z_0}2\varphi\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

pričom si uvedomíme, že $\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = 0$, lebo celková energia E sa nemení. Vykrátime výraz $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ a tak získame rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\frac{m_\mathrm{p}gRr}{J_\mathrm{p}z_0}\varphi=0 \tag{5}$$

ktorá má tvar diferenciálnej rovnice harmonického oscilátora. Jej riešením je funkcia vyjadrujúca závislosť výchylky φ od času:

$$\varphi=\varphi_0\sin\left(\sqrt{\frac{m_\mathrm{p}gRr}{J_\mathrm{p}z_0}}t+\gamma\right) \tag{6}$$

kde φ_0 je amplitúda výchylky a γ začiatočná fáza kmitavého pohybu. Z výsledku vyplýva, že doba kmitu platne na trifilárnom závese je

$$T=2\pi\sqrt{\frac{J_\mathrm{p}z_0}{m_\mathrm{p}gRr}}$$

odkiaľ vypočítame moment zotrvačnosti:

$$J_\mathrm{p}=\frac{Rrg}{4\pi^2z_0}m_\mathrm{p}T^2=km_\mathrm{p}T^2 \tag{7}$$

kde

$$k=\frac{gRr}{4\pi^2z_0} \tag{8}$$

je konštanta prístroja.

Aparatúra a postup práce

Prístroje a pomôcky

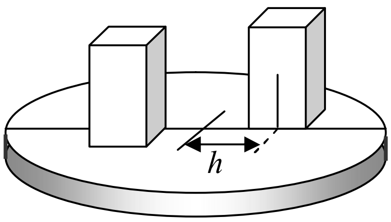
Kyvadlo na trojitom (trifilárnom) závese, telesá s neznámym momentom zotrvačnosti, elektronické stopky, dĺžkové meradlo, posuvné meradlo, váhy.

Vrchný záves je prispôsobený na rozkývanie kyvadla pomocou dvoch prstencových dielcov, ktorých vzájomné pootočenie sa dá merať v dielikoch (1 dielik = 4°). Pri meraní používajte výchylku maximálne 1,5 dielika.

Postup práce

1. Odmerajte veličiny z_0 , R , r a vypočítajte konštantu prístroja.
2. Odmerajte polomer R_p základnej platne a vypočítajte jej moment zotrvačnosti J_v podľa vzťahu (1). Hmotnosť m_p platne je uvedená na prístroji. Predpokladáme, že platňa je homogénna.

3. Odmerajte dobu kmitu T_{p} základnej kruhovej platne a použite ju na výpočet momentu zotrvačnosti J_{p}. Výsledok porovnajte s vypočítanou hodnotou J_{v}. Počet kmitov potrebných na určenie doby kmitu určí vedúci cvičenia.
4. Meraním určte moment zotrvačnosti J_{k} kruhovej platne s otvormi. Umiestnite ju symetricky na základnú platňu, odmerajte dobu kmitu T_{s} a využite ju pri výpočte ich spoločného momentu zotrvačnosti J_{s}. Moment zotrvačnosti platne s otvormi získate ako rozdiel nameranej hodnoty a momentu zotrvačnosti základnej platne.
5. Moment zotrvačnosti J_{k} platne s otvormi určte výpočtom – ak poznáte jej hmotnosť m_{k} a jej rozmery (nájdete ich v laboratóriu pri úlohe). Platňa má hustotu $\rho = 7{,}66\ \mathrm{g/cm^3}$. Problém riešte tak, že najprv vypočítate moment zotrvačnosti plnej platne, od ktorého odčítate momenty zotrvačnosti vyrezaných častí. Treba pritom použiť Steinerovu vetu.
6. Vážením zistite hmotnosť m_{kv} každého oloveného kvádra (sú približne rovnaké), kvádre potom umiestnite na základnú platňu nastojato proti sebe ($h = 0$). Kvádre budete postupne posúvať k okrajom platne symetricky voči stredu tak, aby ste mohli zmerať závislosť $T = f(h)$, kde h je vzdialenosť stredov spodných hrán kvádrov od stredu platne (obr. 2). Pri meraní polohy h používajte kružnice na základnej platni, ktorých polomery rastú po 1 cm. Na základe výsledkov merania určte hmotnosť m_{km} kvádrov a porovnajte s hodnotou, ktorú ste získali vážením. Moment zotrvačnosti základnej platne spolu s kvádrami posunutými o h od stredu platne sa rovná súčtu $J = J_{\mathrm{p}} + 2J_{\mathrm{kv}} + 2m_{\mathrm{kv}}\left(h^2 + p^2\right)$, kde J_{p} je moment zotrvačnosti základnej platne, J_{kv} moment zotrvačnosti každého z kvádrov vzhľadom na os prechádzajúcu jeho ťažiskom a $m_{\mathrm{kv}}\left(h^2 + p^2\right)$ je člen vyplývajúci zo Steinerovej vety, pričom p je polovica dĺžky hrany základne hranola. Po dosadení takéhoto momentu zotrvačnosti do prispôsobeného vzťahu (7) dostaneme



Obrázok 2: Meranie polohy kvádrov na základnej platni

$$J_{\mathrm{p}} + 2J_{\mathrm{kv}} + 2m_{\mathrm{kv}}\left(h^2 + p^2\right) = k\left(m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{kv}}\right)T^2$$

odkiaľ vyplýva lineárna závislosť štvorca doby kmitu od štvorca vzdialenosti h:

$$T^2 = a + bh^2 \tag{9}$$

kde $a = \dfrac{J_{\mathrm{p}} + 2J_{\mathrm{kv}} + 2m_{\mathrm{kv}}p^2}{k\left(m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{kv}}\right)}$, $b = \dfrac{2m_{\mathrm{kv}}}{k\left(m_{\mathrm{p}} + 2m_{\mathrm{kv}}\right)}$. Veličina b je smernica tejto závislosti.

Po odmeraní dôb kmitu pri viacerých vzdialenostiach h vynesieme závislosť T^2 od h^2 do grafu, určíme smernicu b a pomocou nej vypočítame hmotnosť kvádrov:

$$m_{\mathrm{kv}} = \frac{bk}{2(1-bk)} m_{\mathrm{p}} \tag{10}$$

Dodatok – odvodenie vzťahu medzi výškovou súradnicou *z* a uhlom *φ*.

Keď je platňa P v rovnovážnej polohe, bod A má súradnice $(R,0,0)$. Pri otočení platne o uhol φ má bod A súradnice $(R\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, ale bod A′ má stále rovnaké súradnice $(r, 0, z_0)$. Pritom z_0 je vzdialenosť medzi bodmi O a O′ v okamihu, keď je platňa v rovnovážnej polohe. Vzdialenosť AA′, čo je dĺžka nití ℓ, pri výchylke φ sa vyjadrí vzťahom

$$\ell^2 = (R\cos\varphi - r)^2 + R^2\sin^2\varphi + (z_0 - z)^2$$

odkiaľ získame vzťah aj pri nulovej výchylke (vtedy aj $z = 0$):

$$\ell^2 = (R - r)^2 + z_0^2 .$$

Z rovnosti pravých strán získame pre súradnicu z kvadratickú rovnicu

$$z^2 - 2z_0 z + 2Rr(1-\cos\varphi) = 0$$

ktorej riešenia sú

$$z_{1,2} = \frac{2z_0 \pm \sqrt{4z_0^2 - 8Rr(1-\cos\varphi)}}{2} \quad \Rightarrow \quad z = z_0 - \sqrt{z_0^2 - 2Rr(1-\cos\varphi)}$$

Znamienko + v riešení kvadratickej rovnice nie je fyzikálne opodstatnené. Pri malých výchylkách môžeme funkciu $\cos\varphi$ nahradiť prvými dvomi členmi jej rozvoja do Taylorovho radu: $\cos\varphi \cong 1 - \varphi^2/2$, takže po dosadení pod odmocninu pre súradnicu z dostaneme

$$z = z_0 - \sqrt{z_0^2 - Rr\varphi^2} = z_0 - z_0\sqrt{1 - \frac{Rr}{z_0^2}\varphi^2} = z_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Rr}{z_0^2}\varphi^2}\right)$$

Pri úprave výrazu s odmocninou použijeme binomický rozvoj, pričom opäť zohľadníme iba prvé dva členy rozvoja:

$$z = z_0\left(1 - \sqrt{1 - \frac{Rr}{z_0^2}\varphi^2}\right) = z_0\left[1 - \left(1 - \frac{Rr}{z_0^2}\varphi^2\right)^{1/2}\right] \cong z_0\left[1 - \left(1 - \frac{Rr}{2z_0^2}\varphi^2\right)\right] = \frac{Rr}{2z_0}\varphi^2$$

Otázky

1. Pri akých zjednodušeniach bol odvodený vzťah (7) na výpočet momentu zotrvačnosti?
2. Možno uvedenú metódu použiť na určenie momentu zotrvačnosti telesa, ktorého ťažisko neleží na osi otáčania základnej platne?
3. Rozhodnite, kedy je odčítavanie času presnejšie – pri maximálnej výchylke kyvadla, alebo pri prechode rovnovážnou polohou.
4. Ktorú z potrebných veličín na určenie momentu zotrvačnosti musíme merať čo najpresnejšie?

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 3

Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies pomocou kyvadla na trifilárnom závese

Opis metódy merania

Vzťahy ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania a výsledky

Tabuľka 1: Parametre prístroja

z_0	R	r	konštanta prístroja k

Výpočet: $k =$

Tabuľka 2: Výpočet momentu zotrvačnosti základnej platne

veličina	m_p	R_p	J_v
veľkosť a jednotka			

Výpočet $J_v =$

Tabuľka 3: Meranie momentu zotrvačnosti základnej platne

doba kmitu	1	2	3	4	5	
50 T_p						priemer
T_p						
J_p =			Rozdiel $J_p - J_v =$			

Výpočet $J_p = k m_p T_p^2 =$

Tabuľka 4: Výpočet Meranie momentu zotrvačnosti kruhovej platne s otvormi

doba kmitu	1	2	3	4	5	
50 T_s						priemer
T_s						
J_s =			$J_k = J_s - J_p =$			

Výpočet $J_s = k(m_p + m_k)T_s^2 =$

Tabuľka 5: Výpočet momentu zotrvačnosti kruhovej platne s otvormi

hmotnosť m_k	polomer R_k	výška h	hustota ρ	r_d otvorov	vzdialenosť r_v
			7,66 g/cm^3		
J_1 plnej platne		J_d materiálu otvoru		J_k platne s otvormi	

Výpočet $J_k =$

Tabuľka 6: Meranie závislosti $T^2 = f(h^2)$ základnej platne s kvádrami

i	h	50 T	T	h^2	T^2
smernica z graf. závislosti b =			hmotnosť kvádra m_{kv} =		

Výpočet m_{kv} =

Hmotnosť kvádrov získaná vážením:

prvý kváder m_{kv} = druhý kváder m_{kv} =

priemerná hmotnosť m_{kv} =

Prílohy

- graf závislosti $T^2 = f(h^2)$

Slovné zhodnotenie výsledkov:

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: Podpis učiteľa: