Laboratórna úloha č. 6

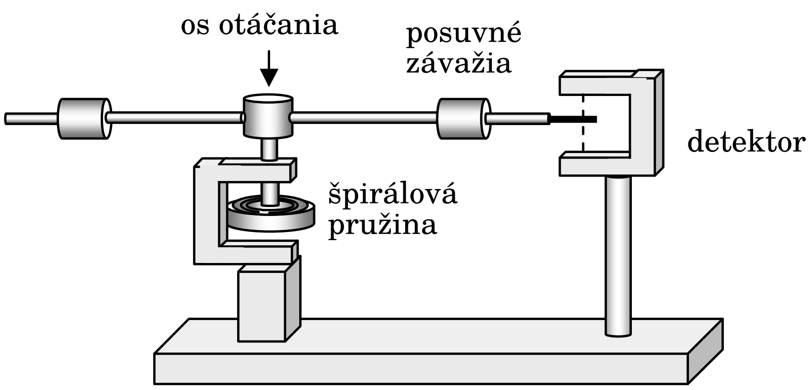
Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies metódou torzných kmitov

Úloha: Zmerať direkčný moment pružiny torzného kyvadla a využiť ho na meranie momentov zotrvačnosti vybraných telies.

Teoretický úvod

Moment zotrvačnosti J telesa je fyzikálna veličina charakterizujúca zotrvačnosť telesa voči otáčavému pohybu. J závisí nielen od hmotnosti telesa, ale aj od jeho tvaru a od polohy osi otáčania.

Momenty zotrvačnosti určíme na základe doby kmitu torzného kyvadla. Zariadenie, ktoré umožňuje realizovať zadané úlohy, pozostáva z masívneho stojana, v ktorom je v ložiskách upevnená zvislá osová tyč - os otáčania (obr. 1). Špirálová pružina je pripevnená jedným koncom ku stojanu a druhým na osovú tyč. Na os budeme prichytávať aj symetrické telesá rôzneho tvaru, napr. guľu alebo aj vodorovnú tyč s posuvnými závažiami (situácia znázornená na obr. 1), ktorých momenty zotrvačnosti chceme určiť. Ak teleso



Obr. 1: Zariadenie na uskutočnenie torzných kmitov. Obrázok znázorňuje situáciu, keď je na (zvislú) os torzného kyvadla upevnená vodorovná tyč s posuvnými závažiami. Z nameranej periódy torzných kmitov budeme vedieť určiť moment zotrvačnosti vodorovnej tyče so závažiami.

pootočíme o uhol φ, bude ho moment sily špirálovej pružiny tlačiť späť do rovnovážnej polohy. Pohybová rovnica telesa bude mať tvar

$$J\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,\vec{u} = \vec{M} \tag{1}$$

kde $\vec{u}$ je jednotkový vektor rovnobežný s osou otáčania a $\vec{M}$ je moment sily vyvolaný pružinou. J je moment zotrvačnosti kyvadla (jeho rotujúcej časti). Hodnota J teda zahŕňa jednak príspevok od telesa upevneného na os kyvadla a aj príspevok samotnej (zvislej) osi kyvadla. Ten však zanedbáme, nakoľko je os veľmi tenká. Predpokladáme, že moment sily je priamoúmerný výchylke φ. Potom

$$\vec{M} = -\kappa\,\varphi\,\vec{u} \tag{2}$$

V rovnici (2) vystupuje tzv. **direkčný moment pružiny** κ („kapa“), čo je silová konštanta torzných kmitov. Znamienko mínus vyjadruje skutočnosť, že moment sily pôsobí proti výchylke – pružina sa snaží vrátiť teleso do rovnovážnej polohy, kedy výchylka $\varphi = 0$.

Dosadením vyjadrenia (2) do rovnice (3) dostaneme pohybovú rovnicu torzného kyvadla

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\kappa}{J}\,\varphi \tag{3}$$

čo je rovnica harmonického oscilátora. Jej všeobecným riešením je

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{J}}\,t + \beta\right) \tag{4}$$

Kyvadlo teda vykonáva periodický pohyb s periódou (dobou kmitu) $T = 2\pi\sqrt{J/\kappa}$. Ak teda poznáme direkčný moment κ a odmeriame periódu T, nájdeme moment zotrvačnosti kyvadla

$$J = \frac{T^2}{(2\pi)^2}\,\kappa \tag{5}$$

Metóda merania a postup práce

1. Určenie direkčného momentu pružiny

Na to, aby sme torzné kyvadlo mohli v ďalšom postupe využiť na zistenie momentov zotrvačností rôznych telies, potrebujeme najprv poznať hodnotu direkčného momentu κ jeho pružiny. Zmeriame ju postupom popísaným nižšie.

Na os otáčania upevníme vodorovnú tyč (obr. 1). Vo vzdialenosti r od osi otáčania zavesíme na tyč silomer tak, aby bol kolmý na vodorovnú tyč aj na os otáčania. Ak potom ťaháme silomer silou F, tak pôsobíme na zariadenie momentom sily $M = rF$, kde údaj r je ramenom sily. Aby sa háčik silomeru nepokĺzol po vodorovnej tyči, upevníme na tyč posuvné závažie tak, aby podopieralo háčik silomera. V tejto podúlohe teda závažie nemá nijaký podstatný fyzikálny význam, len pomáha pohodlne a presne umiestniť háčik silomera.

Zvolíme rameno sily rovné $r = 10$ cm. Tyč vychýlime z rovnovážnej polohy postupne o uhly $\varphi = \pm\pi/2$, $\pm\pi$ a $\pm(3/2)\pi$ a zakaždým silomerom odmeriame silu potrebnú na udržanie tyče vo vychýlenej polohe. Dôležité je, aby tyč a silomer boli pri meraní na seba kolmé. Súčinom nameranej sily a ramena sily r dostaneme príslušný moment sily, ktorý budeme značiť $M_{10}(\varphi)$ a zapíšeme jeho hodnoty do príslušnej tabuľky.

Pre každú veľkosť uhla φ meriame výchylky tak kladné (proti smeru hodinových ručičiek) ako aj záporné (v smere ručičiek). Ideálna pružina by bola symetrická, teda závislosť $M(|\varphi|)$ by bola párnou funkciou a merania oboch smerov výchyliek by boli zbytočné.

Skutočná pružina bude vykazovať asymetriu. Tým, že zmeriame výchylky na obe strany a výsledky vhodne spriemerujeme[1], eliminujeme podstatnú časť nežiadúceho vplyvu asymetrie.

Zo vzťahu (5) vyplýva, že presnosť získaných hodnôt momentu zotrvačnosti závisí od toho, ako presne poznáme hodnotu direkčného momentu κ. Preto na zvýšenie presnosti zmerania κ spravíme meranie momentu sily ešte aj pre $r = 15$ a $r = 20$ cm. Potom pre každý uhol φ vypočítame strednú hodnotu momentu sily

$$\langle M(\varphi)\rangle = \frac{1}{3}\left[M_{10} + M_{15} + M_{20}\right] \equiv M(\varphi) \tag{6}$$

kde M_{10} je moment sily zmeraný pre rameno sily 10 cm pri uhle φ a obdobne M_{15} a M_{20}. [Miesto zložitejšieho zápisu $\langle M(\varphi)\rangle$ budeme ďalej zvyčajne písať $M(\varphi)$ alebo len M.] Treba si uvedomiť, že nameraný moment sily M a ani pomocné hodnoty M_{10}, M_{15} a M_{20} v princípe nemajú závisieť od ramena sily. Ako od premennej majú závisieť len od uhla výchylky φ (a samozrejme aj od direkčného momentu pružiny, čo je však podľa predpokladu konštanta). Napriek tomu nemusia byť namerané hodnoty M_{10}, M_{15} a M_{20} pre daný uhol φ navzájom úplne rovné, čo je spôsobené rôznymi zdrojmi experimentálnych chýb. Preto z nich robíme vyššie uvedený priemer (6). Získané hodnoty M vynesieme do grafu závislosti M od výchylky φ. Presvedčíme sa, že $M(\varphi)$ lineárne rastie s φ, teda že

$$M = \kappa\varphi \tag{7}$$

v súlade s rovnicou (2). Lineárnou regresiou typu $y = bx$ (teda s nulovým priesečníkom q) nájdeme smernicu tejto závislosti, ktorá je rovná direkčnému momentu κ.

2. Meranie periódy

Momenty zotrvačnosti budeme určovať z periódy kmitov torzného kyvadla. Postup merania periódy je takýto: Snímač postavíme do takej vzdialenosti od osi otáčania, aby svetelný lúč snímača mohol byť prerušený tenkým hrotom na telese. V rovnovážnej polohe musí by svetelný lúč prerušený hrotom, čo indikuje červené svetielko na snímači. Ďalšie detaily postupu merania periódy nájdete v návode priloženom k snímaču.

Teleso vychýlime z rovnovážnej polohy vždy o rovnaký uhol, napr. $\pi/2$ a pustíme. Merací prístroj zaznamená čas medzi dvoma prechodmi hrotu cez svetelný lúč, teda polovicu periódy (tzv. kyv, čo je polovica kmitu). Meranie opakujeme 6-krát, pričom teleso vychyľujeme striedavo na jednu aj na druhú stranu (aby sme potlačili nežiadúci vplyv asymetrie pružiny) a nájdeme strednú hodnotu periódy T.

3. Meranie momentu zotrvačnosti rôznych telies

Dostávame sa k hlavým náplniam tejto praktickej úlohy. Vybrané teleso pripevníme na os otáčania a podľa časti 2 odmeriame jeho dobu kmitu T. Zo vzťahu (5) nájdeme

[1]Vhodné spriemerovanie spravíme tak, že cez namerané body preložíme priamku, ktorej nanútime prechádzať počiatkom. To znamená, že použijeme lineárnu regresiu typu $y = bx$, t. j. $M = \kappa\varphi$ (a nie $M = \kappa\varphi + q$).

moment zotrvačnosti J. V tabuľke nájdeme hmotnosť telesa, odmeriame jeho rozmery, vypočítame teoretickú hodnotu momentu zotrvačnosti J_{teor} a porovnáme ju s hodnotou J. Využijeme analytické vzťahy pre momenty zotrvačnosti vybraných telies: [2]

teleso	disk, valec	guľa	plášť valca	tyč
J_{teor}	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2)$	$\frac{1}{12}m_{\text{T}}\ell^2$

4. Určenie hmotností závaží a tyče

V tejto podúlohe budeme pracovať so špecifickým telesom, ktorým bude vodorovná tyč so symetricky umiestnenými závažiami podľa obr. 1. Analytický vzťah pre moment zotrvačnosti vodorovnej tyče so závažiami (ak zanedbáme ich priestorové rozmery) má tvar

$$J = J_{\text{T}} + 2mr^2 \tag{8}$$

kde m je hmotnosť závažia, r je vzdialenosť jednotlivého závažia od osi otáčania a J_{T} je moment zotrvačnosti tyče. Ak je dĺžka tyče ℓ a jej hmotnosť m_{T}, potom

$$J_{\text{T}} = \frac{1}{12}m_{\text{T}}\ell^2 \tag{9}$$

Upevníme závažia na tyč do vzdialeností r od osi otáčania a odmeriame periódu kmitov takéhoto telesa. Z rovnice (5) vypočítame moment zotrvačnosti J. Úlohu zopakujeme pre r = 10, 15, 20 a 25 cm. Do grafu vynesieme závislosť J od r^2. Presvedčíme sa, či táto závislosť je lineárna, ako by mala byť podľa teoretického vzťahu (8). Z lineárnej regresie a porovnaním so vzťahom (8) nájdeme smernicu ($2m$) ako aj konštantný člen (J_{T}). Odmeriame dĺžku tyče ℓ a z rovnice (9) odvodíme vzťah pre hmotnosť tyče:

$$m_{\text{T}} = \frac{12J_{\text{T}}}{\ell^2} \tag{10}$$

Presnosť merania

Podstatným faktorom, ktorý ovplyvňuje presnosť získaných výsledkov, je hodnota direkčného momentu κ lineárnej charakteristiky pružiny. Preto sa presvedčíme, či

(i) pre danú hodnotu výchylky φ hodnota súčinu $M = rF$ naozaj nezávisí od r. Rôzne hodnoty M pre ten istý uhol φ indikujú nepresnosť merania sily silomerom.

(ii) závislosť $M(\varphi)$ je dostatočne lineárna; graficky sa o tom presvedčíme zostrojením príslušného grafu s nameranými údajmi. Číslenou indikáciou odchýlky od lineárnosti sú niektoré údaje určené lineárnou regresiou: koeficient determinovanosti $\mathcal{R}^2_{\text{det}}$ (pre presne lineárny priebeh by bol rovný 1) a smerodajná odchýlka smernice, teda direkčného momentu s_κ (pre presne lineárny priebeh priamky idúcej cez počiatok by bola rovná 0).

[2]Fyzikálny význam veličín v tabuľke je zrejmý: m je hmotnosť uvažovaného telesa, R je jeho polomer. R_1 a R_2 označujú vnútorný a vonkajší polomer dutého valca. m_{T} je hmotnosť tyče a ℓ je jej dĺžka.

Jednotlivé zistenia zapíšeme do zhodnotenia výsledkov v závere protokolu.

Iným zdrojom nepresnosti merania je skutočnosť, že sme v teoretickom modeli zanedbali tlmenie torzných kmitov. Ak tyč vychýlime a necháme ju kmitať dlhšiu dobu (napr. 5 period), spozorujeme, že jej výchylka po každej periode klesá. Z teórie tlmeného oscilátora vieme, že tlmenie predlžuje perodu kmitov. Preto nami nameraná perióda T je o niečo väčšia, ako perióda netlmených kmitov, ktorá vystupuje v rovnici (5). Tento rozdiel period pri meraní zanedbáme.

Tretím faktorom, ktorý ovplyvňuje presnosť merania v časti 4, je zanedbanie priestorových rozmerov závaží. Závažia sme považovali za hmotné body s momentom zotrvačnosti $2mr^2$. Presnejší výpočet, ktorý by zahrnul výšku valčekov $h = 4$ cm, dá moment zotrvačnosti závaží

$$2mr^2 + \frac{2}{3}mh^2 \tag{11}$$

Výpočtom sa dá presvedčiť, že jeho korekciu $(2/3)mh^2$ môžeme zanedbať.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 6

Určenie momentov zotrvačnosti tuhých telies metódou torzných kmitov

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

Meranie direkčného momentu [3]

	$r = 10$ cm		$r = 15$ cm		$r = 20$ cm		
φ	F	M_{10}	F	M_{15}	F	M_{20}	M
$-3\pi/2$							
$-\pi$							
$-\pi/2$							
$\pi/2$							
π							
$3\pi/2$							
(údaje sú v N a v Nm)							

Koeficient determinovanosti z regresie	$\mathcal{R}^2_{\text{det}} =$
Direkčný moment pružiny	$\kappa =$

Meranie momentov zotrvačnosti telies

(časy a momenty zotrvačnosti v základných jednotkách SI)

Guľa	$m =$	$R =$

i	1	2	3	4	5	6
$T_i/2$						
T_i						

priemerná hodnota periódy	$T =$	
moment zotrvačnosti	$J =$	$J_{\text{teor}} =$

Disk	$m =$	$R =$

i	1	2	3	4	5	6
$T_i/2$						
T_i						

priemerná hodnota periódy	$T =$	
moment zotrvačnosti	$J =$	$J_{\text{teor}} =$

[3] Symbol $\mathcal{R}$ v druhej tabuľke zodpovedá veľkému písanému R. Uvádzame ho takto preto, aby bol odlíšený od polomerov, ktoré v tejto úlohe píšeme veľkými tlačenými R.

Valec	$m =$	$R =$

i	1	2	3	4	5	6
$T_i/2$						
T_i						

priemerná hodnota periódy	$T =$	
moment zotrvačnosti	$J =$	$J_{\mathrm{teor}} =$

Dutý valec	$m =$	$R_1 =$	$R_2 =$

i	1	2	3	4	5	6
$T_i/2$						
T_i						

priemerná hodnota periódy	$T =$	
moment zotrvačnosti	$J =$	$J_{\mathrm{teor}} =$

Meranie hmotností závaží a tyče

(časy a momenty zotrvačnosti v základných jednotkách SI)

r (cm)	5	10	15	20	25
$T/2$					
T					
J					

Výpočet hmotnosti tyče podľa vyjadrenia (10) s uvedením hodnôt a rozmerov veličín, bez zaokrúhlení:

$$m_{\mathrm{T}} = \frac{12 J_{\mathrm{T}}}{\ell^2} =$$

Hmotnosť závažia z regresie	m	$=$
Hmotnosť závažia z váženia	m_{v}	$=$
Relatívna chyba	$\dfrac{m - m_{\mathrm{v}}}{m_{\mathrm{v}}}$	$=$
Dĺžka tyče	ℓ	$=$
Moment zotrvačnosti tyče z regresie	J_{T}	$=$
Hmotnosť tyče podľa (10)	m_{T}	$=$

Prílohy

- graf závislosti $M(\varphi)$
- graf závislosti $J(r^2)$

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Hodnotenie a podpis učiteľa:**