Laboratórna úloha č. 1

Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

Úloha: Experimentálne určiť hodnotu tiažového zrýchlenia.

Teoretický úvod

Každé teleso upevnené tak, že sa môže otáčať okolo vodorovnej osi neprechádzajúcej jeho ťažiskom, môžeme považovať za *fyzikálne kyvadlo*. Kyvadlo je v stabilnej rovnovážnej polohe, ak je jeho ťažisko v najnižšej polohe (leží na zvislej priamke prechádzajúcej osou otáčania). Ak kyvadlo vychýlime z rovnovážnej polohy o uhol φ, bude sa do nej vracať pôsobením momentu tiažovej sily $\vec{M}$. Jeho pohybová rovnica má tvar

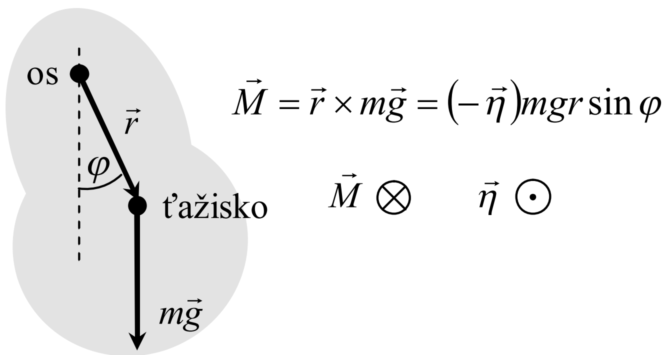
$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} = \vec{M} \tag{1}$$

kde J je moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os otáčania. Ak definujeme jednotkový vektor $\vec{\eta}$ smerujúci von z papiera (obr. 1), potom $\vec{\varphi} = \vec{\eta}\varphi$ a moment sily

$$\vec{M} = -mgr\sin\varphi\,\vec{\eta} \tag{2}$$

je určený hmotnosťou kyvadla m, tiažovým zrýchlením g, vzdialenosťou r bodu otáčania od ťažiska a uhlom φ (obr. 1). Po dosadení do rovnice (1) dostaneme

$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} = -mgr\sin\varphi \tag{3}$$



Obr. 1: Fyzikálne kyvadlo znázornené sivým telesom a vektory vstupujúce do vyjadrenia momentu sily.

Nájsť riešenie tejto rovnice znamená nájsť závislosť uhlovej výchylky φ od času. Skúsenosť nám hovorí, že kyvadlo bude po vychýlení z rovnovážnej polohy kmitať okolo rovnovážnej polohy. Preto $\varphi = \varphi(t)$ bude periodickou funkciou času s periódou T:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \tag{4}$$

Časovú závislosť $\varphi(t)$ nájdeme riešením diferenciálnej rovnice (3). Ak je maximálna výchylka φ_0 malá, potom funkciu $\sin\varphi$ môžeme aproximovať uhlovou súradnicou φ:

$$\sin\varphi \approx \varphi \tag{5}$$

Rovnica (3) nadobudne tvar pohybovej rovnice harmonického oscilátora:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{mgr}{J}\varphi \tag{6}$$

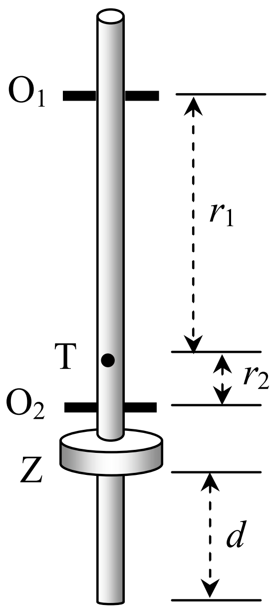
Riešením rovnice (6) je

$$\varphi(t) = \varphi_0 \, \sin\left(\sqrt{\frac{mgr}{J}}t + \beta\right) \tag{7}$$

Z podmienky (4) nájdeme periódu (dobu kmitu) T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgr}} \tag{8}$$

Metóda merania



Obr. 2: Kyvadlo pre meranie tiažového zrýchlenia.

Na meranie tiažového zrýchlenia použijeme reverzné kyvadlo (obr. 2). Kyvadlo pozostáva z kovovej tyče s dvoma rovnobežnými závesmi a zo závažia Z, ktoré sa na konci tyče môže posúvať (mení sa vzdialenosť d). Pre periódu T_1 kmitov kyvadla kmitajúceho okolo osi O_1 dostaneme z rovnice (8) vzťah

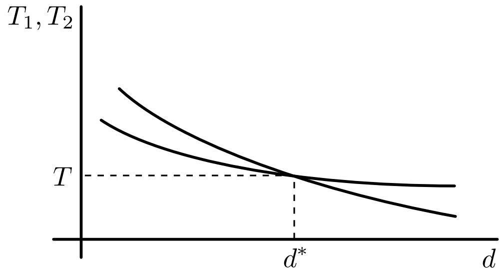
$$\frac{T_1^2}{(2\pi)^2} = \frac{J_1}{mgr_1} \tag{9}$$

kde r_1 je vzdialenosť osi otáčania od ťažiska (obr. 2). Moment zotrvačnosti J_1 kyvadla vzhľadom na os O_1 vyjadríme pomocou Steinerovej vety

$$J_1 = J_0 + mr_1^2 \tag{10}$$

kde J_0 je moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom. Ak kyvadlo kmitá okolo osi O_2, dostaneme pre periódu kmitov:

$$\frac{T_2^2}{(2\pi)^2} = \frac{J_2}{mgr_2} \tag{11}$$



Obr. 3: Kvalitatívne znázornenie závislostí periód T_1 a T_2 od polohy závažia. Tieto závislosti nie sú priamky, preto pri spracovaní výsledkov tejto úlohy nie je správne prekladať nameranými bodmi priamky.

Pre moment zotrvačnosti kyvadla vzhľadom na os O_2 platí:

$$J_2 = J_0 + mr_2^2 \tag{12}$$

Posúvaním závažia Z meníme polohu ťažiska kyvadla, a teda meníme veličiny r_1, r_2, a následne aj periódy T_1 a T_2. Môžeme tak nájsť takú polohu závažia d^*, pre ktorú sú obe periódy rovnaké: $T_1 = T_2 = T$. V tejto polohe dostaneme zo vzťahov (9) a (10) rovnicu

$$mgr_1 \frac{T^2}{(2\pi)^2} = J_0 + mr_1^2 \tag{13}$$

a zo vzťahov (11) a (12) dostaneme

$$mgr_2 \frac{T^2}{(2\pi)^2} = J_0 + mr_2^2 \tag{14}$$

Odčítaním rovnice (14) od rovnice (13) dostaneme

$$mg(r_1 - r_2) \frac{T^2}{(2\pi)^2} = m(r_1^2 - r_2^2) = m(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \tag{15}$$

Ak definujeme vzdialenosť dvoch osí otáčania $r_1 + r_2 = \ell$ (obr. 2), potom z rovnice (15) dostaneme tiažové pre zrýchlenie jednoduchý výraz

$$g = (2\pi)^2 \frac{\ell}{T^2} \tag{16}$$

v ktorom nevystupuje ani hmotnosť kyvadla, ani jeho moment zotrvačnosti. Pretože vzdialenosť osí otáčania ℓ poznáme, stačí, ak nájdeme takú polohu závažia d^*, v ktorej je perióda malých kmitov kyvadla rovnaká pre obe osi otáčania, a túto periódu odmeriame.

Opis aparatúry a postup práce

Budeme merať závislosť doby kmitu (periódy) reverzného kyvadla okolo osí O_1 a O_2 od parametra d (vzdialenosti závažia Z od konca tyče). Závažie posúvame najprv s pomerme veľkým krokom 2 cm popr. niekde aj menším, aby sme rýchlo získali hrubú predstavu, kde približne sa nachádza hodnota d^*, pri ktorej sú doby kmitov rovnaké. Polohy závažia teda volíme podľa vlastného uváženia, ale tak, aby závažie nemohlo udrieť o zariadenie časomiery. (Volíme $d \geq 5\,\mathrm{cm}$.) Potom spravíme ešte niekoľko meraní[1] v okolí predbežne odhadnutej polohy d^* tak, aby táto oblasť bola prevzorkovaná s krokom 0,5 cm. Celkový počet meraní by mal byť aspoň 10.

Presnosť merania periódy zvýšime tým, že v každej polohe závažia budeme merať dobu 10 kmitov. Takéto meranie v každej polohe závažia zopakujeme aspoň trikrát a vypočítame priemernú hodnotu periódy z týchto celkovo 30 kmitov pri každej polohe závažia. Pri meraní je potrebné dôsledne dbať na to, aby počiatočná výchylka kyvadla nebola väčšia ako 5° (táto maximálna výchylka je na zariadení vyznačená) a aby sa kyvadlo kývalo vo zvislej rovine.

Namerané hodnoty periód zapisujeme do tabuľky. Zo získaných hodnôt zostrojíme graf závislosti periód T_1 a T_2 od polohy závažia d. Priesečník týchto závislostí je bod (d^*, T) a určuje nám hľadanú periódu T (pozri aj obr. 3). Tento priesečník je vhodné hľadať pomocou krivítka alebo numerickým fitovaním. V žiadnom prípade neprekladáme cez namerané body priamku (t. j. *nerobíme lineárnu regresiu* s rovnicou typu $y = kx + q$), pretože závislosť periódy od polohy závažia nie je lineárnou funkciou polohy závažia.

Odmeriame vzdialenosť ℓ dvoch osí otáčania. Z nameraných hodnôt T a ℓ použitím vzťahu (16) určíme tiažové zrýchlenie g. Podľa postupu v ďalšom odseku určíme smerodajnú odchýlku s_g tohto tiažového zrýchlenia.

Presnosť merania

Presnosť získanej hodnoty g závisí od toho, ako presne dokážeme odmerať vzdialenosť ℓ a ako presne určíme periódu T. Predpokladajme, že sme schopní merať dĺžku ℓ s neistotou $\Delta\ell$ a pomocou grafu podobného ako na obr. (3) určiť periódu T s neistotou ΔT. Potom smerodajnú odchýlku tiažového zrýchlenia určíme zo vzťahu:

$$s_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \ell}\right)^2 (\Delta\ell)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 (\Delta T)^2 \tag{17}$$

kde g je dané rovnicou (16).

Dĺžku meriame meradlom s dielikom 1 mm, preto $\Delta\ell \approx 0{,}5\,\mathrm{mm}$. Pri odhade ΔT vyjdeme zo skutočnosti, že všetky periódy T_1 a T_2 meriame s neistotou $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 0{,}001\,\mathrm{s}$ (posledné číslo na displeji prístroja vydelené počtom periód). Dve periódy T_1 a T_2 preto môžeme považovať za rôzne len vtedy, ak rozdiel ich nameraných hodnôt $|T_1 - T_2| > 2\Delta T_1$. Pretože obe periódy T_1 aj T_2 pomaly klesajú so vzdialenosťou d, dokážeme hodnotu d^* určiť len s neistotou asi 1 cm. Na takej vzdialenosti sa periódy zmenia o približne 0,003 s. Túto hodnotu, $\Delta T = 0{,}003\,\mathrm{s}$, budeme považovať za odhad neistoty určenia periódy T.

[1] Nezáleží na tom, že hodnoty d v tabuľke nepôjdu postupne.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 1

Určenie tiažového zrýchlenia reverzným kyvadlom

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

	O_1				O_2			
d (m)	$10\,T_1$ (s)			T_1 (s)	$10\,T_2$ (s)			T_2(s)

Vzdialenosť osí kyvadla $\ell =$

Neistota vzdialenosti $\Delta\ell =$

Spoločná perióda $T =$

Neistota periódy $\Delta T =$

Výpočet tiažového zrýchlenia podľa vzťahu (16) s uvedením hodnôt a rozmerov veličín:

$$g = (2\pi)^2 \frac{\ell}{T^2} =$$

Výpočet štvorca smerodajnej odchýlky podľa vzťahu (17); najprv matematicky preveďte výpočty potrebných derivácií funkcie $g = g(\ell,T)$ danej výrazom (16), až potom dosadzujte konkrétne hodnoty aj s jednotkami.

$$\frac{\partial g}{\partial \ell} =$$

$$\frac{\partial g}{\partial T} =$$

$$s_g^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial \ell}\right)^2 (\Delta\ell)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 (\Delta T)^2 =$$

Zhrnutie hlavných výsledkov:

Tiažové zrýchlenie	$g =$
Smerodajná odchýlka	$s_g =$

Prílohy

- graf závislostí dôb kmitov T_1 a T_2 od polohy závažia d

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Hodnotenie a podpis učiteľa:**