Ako prídeme k vlastným módom kmitania struny?

Zopakujme, že pohyb struny je popísaný vlnovou rovnicou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Veličina $u = u(x, t)$ je kolmá výchylka elementu struny z rovnovážnej polohy a vyjadruje tvar struny v čase t. Parameter v, ako ukáže neskoršia analýza vlnovej rovnice, treba interpretovať ako rýchlosť šírenia sa vĺn (t.j. aj zvuku) v strune.

Vlnová rovnica (1) má mnoho riešení. Upevnená struna však kmitá tak, že jej konce sa nemôžu hýbať, čiže výchylky u na koncoch struny sú nulové. Len riešenia, ktoré sú v súlade s týmito podmienkami, budú pre náš problém dôležité. Po uvážení týchto okrajových podmienok, ktoré sa matematicky zapíšu rovnicami

$$u(x = 0,\, t) = 0\ ,\quad u(x = L,\, t) = 0 \tag{2}$$

sa množina riešení vlnovej rovnice obmedzí, ako to uvidíme z nasledovného odvodenia.

Predstavme si, že strunu na začiatku (v čase 0) zdeformujeme do tvaru popísaného nejakou funkciou $g(x)$. Táto $g(x)$ určite tiež spĺňa okrajové podmienky

$$g(0) = g(L) = 0$$

Z poznatkov o Fourierových radov je známe, že takúto funkciu vieme vyjadriť pomocou sínusového radu:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Tvar struny v časoch $t > 0$ označíme funkciou $u(x, t)$. Síce bude odlišný od počiatočného tvaru $g(x)$, ale uvedené okrajové podmienky bude tiež spĺňať, a preto bude opäť vyjaditeľný podobným Fourierovým radom s tým, že časový vývoj bude zachytený pomocou časovej závislosti koeficientov $a_n(t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \tag{3}$$

Aby sme zistili, aká je časová závislosť koefientov, dosadíme tento predpis do rovnice vlnenia v úvode a dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right) \frac{\mathrm{d}^2 a_n(t)}{\mathrm{d}t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} -v^2 \left(\frac{\pi}{L} n\right)^2 a_n(t) \sin\left(\frac{\pi}{L} n x\right)$$

Vynásobme obe strany rovnice $\sin\left(\frac{\pi}{L}mx\right)$ a preintegrujme cez x na intervale $\langle 0; 2L\rangle$. Integrály, ktoré pritom vystúpia, sa dajú vypočítať základnými metódami a nadobúdajú hodnoty

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \pi \ , & m = n \\ 0 \ , & m \neq n \end{cases}$$

Pre koeficienty $a_n(t)$ preto platia rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2 a_n(t)}{\mathrm{d}t^2} = -v^2\left(\frac{\pi}{L}n\right)^2 a_n(t)$$

Riešenia tejto obyčajnej diferenciálnej rovnice sa pri vhodne zvolených začiatočných podmienkach dajú zapísať

$$a_n(t) = a_n(0)\cos\left(v\frac{\pi}{L}nt\right)$$

Tento predpis pre koeficienty $a_n(t)$ dosadíme do vyššie napísaného vyjadenia (3) pre $u(x,t)$ a po využití označenia $u_n(x,t)$ dostávame všeobecné riešenie zapísané v tvare lineárnej kombinácie vlastných módov:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) u_n(x,t)$$

kde $a_n(0)$ je označenie pre konštanty, ktoré sa určujú z počiatočných podmienok a funkcie $u_n(x,t)$ sú vlastné módy vyjadrené rovnicou

$$u_n(x,t) = a\cos\left(v\frac{\pi}{L}nt\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \ , \quad n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

kde a je konštanta. Takýto mód predstavuje stojaté vlnenie s uhlovou frekvenciou $\omega_n = v\pi n/L$ a s vlnovým číslom $k_n = \pi n/L$. Z toho vyplýva vlnová dĺžka $\lambda_n = 2\pi/k_n = 2L/n$. Pri stojatom vlnení vlna zostáva lokalizovaná v istej časti priestoru, teda neprenáša energiu ani hybnosť. Mód stojatého vlnenia je zapísaný ako súčin čisto časovo a čisto priestorovo závislej funkcie, čiže každý bod struny kmitá s tou istou fázou. Vyjadrenie pre n-tý mód sa ešte dá pomocou jedného z goniometrických vzorcov názorne prepísať ako súčet protibežiacich vĺn:

$$u_n(x,t) = \frac{a}{2}\left\{\sin\left[\frac{\pi}{L}n(x - vt)\right] + \sin\left[\frac{\pi}{L}n(x + vt)\right]\right\} \tag{5}$$

Toto vyjadrenie názorne hovorí o dvoch vlnách šíriacich sa opačnými smermi a majúcich rovnaké amplitúdy $a/2$. Je z neho zrejmé, že výsledné stojaté vlnenie neprenáša ani energiu ani hybnosť, keďže prenosy dvoch rovnakých proti sebe sa pohybujúcich vĺn sa navzájom zrušia. Z posledne zapísaného tvaru módu $u_n(x,t)$ tiež vyplýva, že parameter v je naozaj rýchlosťou šírenia sa vĺn v strune.