Laboratórna úloha č. 21

Chvenie struny

Úlohy: A Zmerať základnú frekvenciu chvenia struny a závislosť tejto frekvencie od dĺžky struny a od sily, ktorou je struna napínaná.

B Zo smernice tejto závislosti určiť dĺžkovú hmotnosť struny.

Teoretický úvod

Vlnová rovnica. Napnutá struna predstavuje jednorozmerné prostredie, v ktorom sa môže šíriť vlnenie. Všeobecná rovnica vlnenia v jednorozmernom prostredí je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

Veličina $u = u(x,t)$ je kolmá výchylka elementu struny z rovnovážnej polohy. x je priestorová súradnica meraná pozdĺž struny. t je čas. Veličina

$$v = \sqrt{\frac{F}{s}} \tag{2}$$

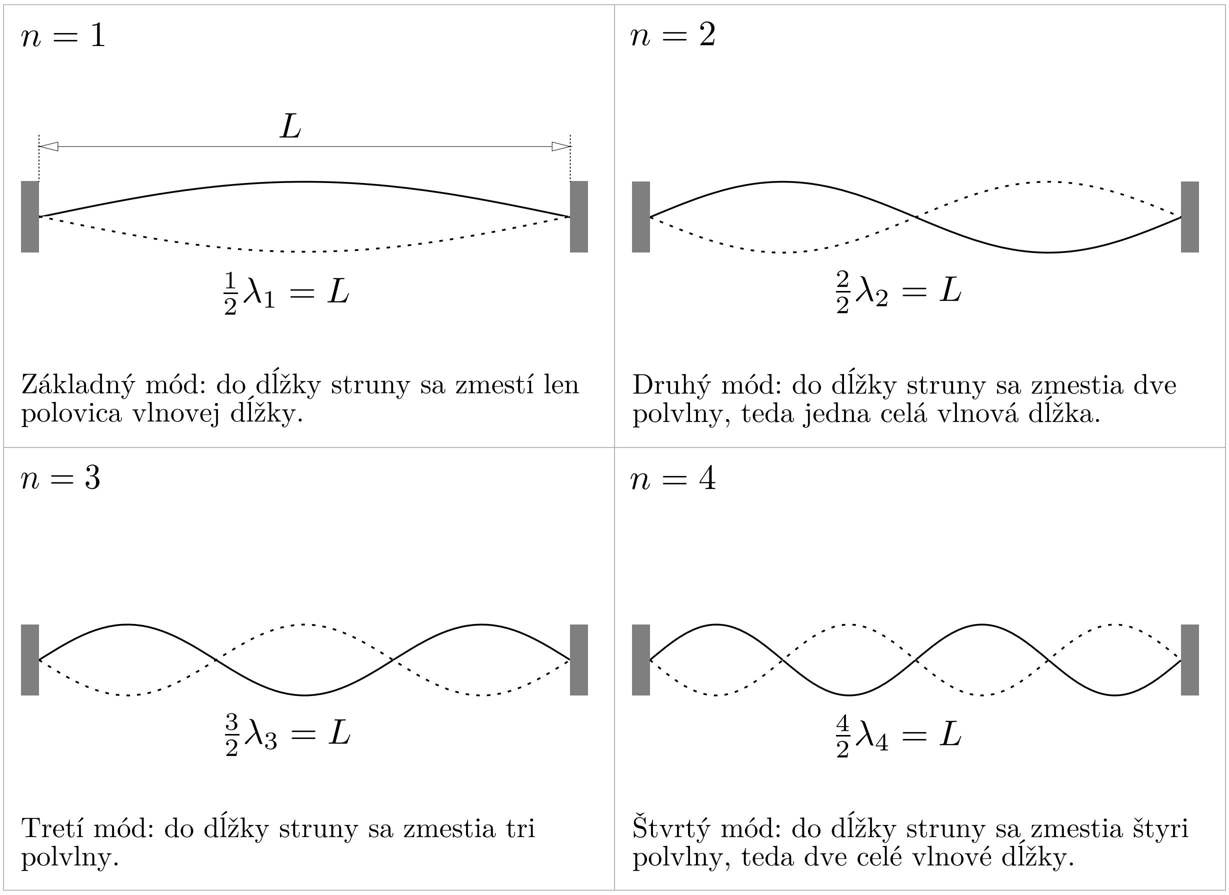
kde F je sila, ktorou je struna napínaná a s je dĺžková hustota struny, t.j. hmotnosť struny predelená jej dĺžkou. Ako sa ukazuje z riešenia vlnovej rovnice (1), veličinu v bude treba interpretovať ako rýchlosť šírenia sa vlnenia v strune.

Vlastné módy. Vlnová rovnica (1) má mnoho riešení. Upevnená struna však kmitá tak, že jej konce sa nemôžu hýbať, čiže výchylky u na koncoch struny sú nulové. Len riešenia, ktoré sú v súlade s týmito podmienkami, budú pre náš problém dôležité. Po uvážení týchto okrajových podmienok sa množina riešení vlnovej rovnice (1) obmedzí. Jej najdôležitejšími riešeniami budú funkcie tvaru

$$u_n(x,t) = A_n \cos\left(v\frac{\pi}{L}nt\right)\sin\left(\frac{\pi}{L}nx\right) \quad , \quad n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

kde A_n sú konštanty. Priestorová súradnica má hodnotu $x = 0$ na ľavom okraji struny a $x = L$ na pravom okraji. Funkcie $u_n(x,t)$ sa nazývajú *vlastné módy* vlnenia a kmitania struny. Každý takýto mód predstavuje tzv. *stojaté vlnenie.* To je vlnenie, pri ktorom vlna neprenáša energiu ani hybnosť. Navyše pri jednomódovom stojatom vlnení sú priestorová a časová závislosť separované, každá v inom činiteli, čiže každý bod struny kmitá s tou istou fázou.

Mód s $n = 1$ sa nazýva *základný mód.* Aj ľubovoľné iné riešenie rovnice (1) popisujúce upevnenú strunu sa dá zapísať v tvare lineárnej kombinácie vlastných módov (3). To je



Obr. 1: Vlastné módy stojatého vlnenia struny dĺžky L vykreslené podľa rovníc (3) v istom časovom okamihu, napr. $t = 0$. V úlohe budeme pracovať so základným módom ($n = 1$), ktorý má pri danej dĺžke struny maximálnu vlnovú dĺžku $\lambda_1 = 2L$ spomedzi všetkých módov a minimálnu frekvenciu $\nu_1 = v/\lambda_1$. Pozri aj vzťahy (5).

dôvod ich výnimočnosti a dôležitosti medzi ostatnými riešeniami vlnovej rovnice. Tieto tvrdenia sa dajú pomerne ľahko dokázať pomocou rozvoja riešenia do Fourierovho radu (pozri doplnkový dokument k úlohe). Na obrázku 1 sú znázornené prvé štyri vlastné módy stojatého vlnenia.

Z časovej závislosti vo vyjadrení módov podľa vzťahu (3) vyplýva, že ak struna kmitá v móde n, jej pohyb v ľubovoľnom mieste je harmonickým kmitavým pohybom s uhlovou frekvenciou

$$\omega_n = v\frac{\pi}{L}n$$

čiže s frekvenciou[1]

$$\nu_n = \frac{v}{2L}\,n \tag{4}$$

a periódou

$$T_n = \frac{1}{\nu_n} = \frac{2L}{v}\frac{1}{n}$$

[1]Frekvenciu budeme značiť gréckym písmenom ν (vyslovovať ní), čo je jeden z dvoch zaužívaným symbolov. Symbolu f sa vyhneme, keďže ho v tejto úlohe používame v iných významoch.

Frekvencia ν_1 sa nazýva *základná frekvencia* kmitania struny. Frekvencie s $n > 1$ sa nazývajú *vyššie harmonické* frekvencie. Vzdialenosť, ktorú vlna v strune prejde počas jednej periódy, je *vlnová dĺžka* λ_n:

$$\lambda_n = vT_n = \frac{v}{\nu_n} = \frac{2L}{n} \tag{5}$$

V našom meraní potrebujeme poznať, ako sa teoreticky dá vypočítať frekvencia kmitania struny v závislosti od napínacej sily a ďalších dvoch parametrov. Tento vzťah dostaneme kombináciou rovníc (4) a (2):

$$\nu_n = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{F}{s}}\, n \tag{6}$$

Hovorí nám, že každá vlastná frekvencia je priamo úmerná odmocnine napínacej sily a závisí aj od dĺžky a hustoty struny.

Vidíme, že konečná dĺžka struny a jej upevnenie na oboch koncoch má zásadné dôsledky pre jej pohyb:

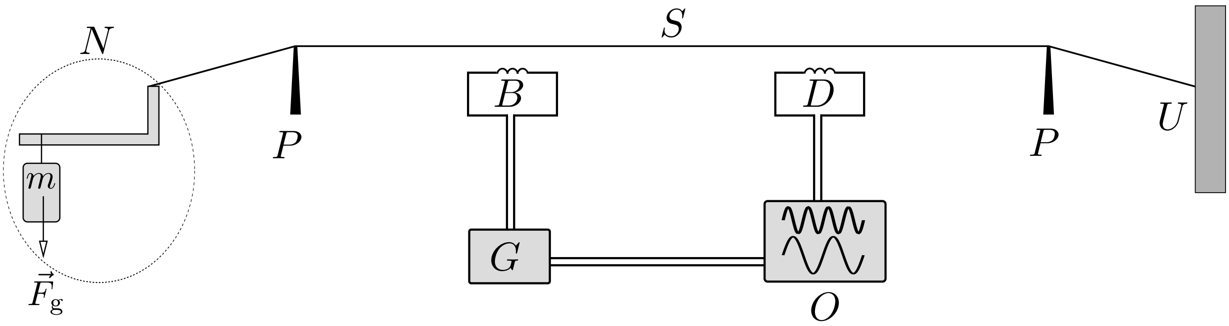
- Struna na okrajoch nekmitá.
- V strune môže existovať len stojaté vlnenie, čo je istý druh kmitavého pohybu.
- Vlnové dĺžky môžu byť len také, aby sa do dĺžky struny sa zmestil celočíselný počet polvĺn ($L = n\,\lambda_n/2$).
- Frekvencie módov môžu nadobúdať len diskrétne hodnoty $\nu_n = v/\lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Jav rezonancie. Ak sa snažíme oscilátor rozkmitať periodickou vonkajšou silou (*budiaca sila*), môže dôjsť k rezonancii vtedy, keď sa frekvencia budiacej sily blíži k vlastnej frekvencii oscilátora. Rezonancia sa prejaví výrazným zvýšením amplitúdy kmitov. Obyčajný oscilátor má len jednu vlastnú frekvenciu rovnú $1/(2\pi)\sqrt{k/m}$, kde k je silová konštanta pružiny. Strunu tiež možno chápať ako oscilátor, ale taký, ktorý dokáže kmitať na viacerých frekvenciách – vlastných módoch struny. Preto v prípade kmitov struny môžeme jav rezonancie pozorovať tak pri jej základnej frekvencii ν_1 ako aj pri vyšších harmonických frekvenciách ν_n.

Metóda merania

Cieľom merania je overiť vzťah (2) a z neho určiť dĺžkovú hustotu struny s. Na meranie použijeme aparatúru podľa schémy na obrázku 2, pričom použijeme základný mód kmitania struny, t.j. mód s $n = 1$ v zápise rovnice (3). Strunu budeme rozkmitávať elektromagnetom a využijeme jav rezonancie: Struna sa výrazne rozkmitá vtedy, keď frekvencia vonkajšej budiacej sily (t.j. frekvencia, s ktorou je struna priťahovaná ku elektromagnetu) bude zhodná s niektorou vlastnou frekvenciou struny.

Struna je oceľová a je priťahovaná k elektromagnetu bez ohľadu na smer prúdu, ktorý prechádza cez cievku elektromagnetu. Nikdy nie je odpudzovaná. Preto je frekvencia budenia struny ν dvojnásobná vzhľadom na frekvenciu generátora ν_G a je dôležité tieto frekvencie odlišovať aj značením (indexom G). Kedže sa máme zaujímať o základný mód,



Obr. 2: Schéma meracieho zariadenia. Jednotlivé časti: S-struna, P-podpery, U-pevné uchytenie struny, N-napínací mechanizmus struny, G-generátor striedavého napätia s nastavovateľnou amplitúdou a frekvenciou, B-elektromagnetické budenie kmitov struny, D-detekcia amplitúdy chvenia, O-osciloskop v režime zobrazovania časových priebehov.

musíme zabezpečiť, aby sme rezonanciu vybudili na najnižšej vlastnej frekvencii struny pri danej dĺžke struny a ťahovej sile.

V princípe by sme dĺžkovú hustotu struny dokázali určiť z jediného merania, t.j. z merania pri jednej hodnote dĺžky struny L a jednej napínacej sile F. Pri takomto zjednodušenom postupe by však existovala značná pravdepodobnosť, že vplyvom rôznych faktorov, ako napr. omyl pri nastavení zariadenia alebo zle odčítaná hodnota z prístroja, by bol výsledok zaťažený veľkou neistotou alebo by bol úplne nesprávny[2]. Prevedením meraní pre viac hodnôt L a F máme možnosť presvedčiť sa, či základná rezonančná frekvencia ν_1 vykazuje správanie sa podľa fyzikálnych zákonitostí, ktoré sú v tejto úlohe vhodne vyjadrené vzťahom (6). Ak je tomu tak, pravdepodobnosť vnesenia hrubej chyby do výsledku je minimalizovaná. Ďalším fyzikálnym dôsledkom, pozorovateľným ak prevedieme merania pri viacerých napínacích silách, je lineárna závislosť medzi štvorcom rýchlosti zvuku (vlnenia) a napínacou silou. Tá vyplýva jednoducho z úvodného vyjadrenia (2):

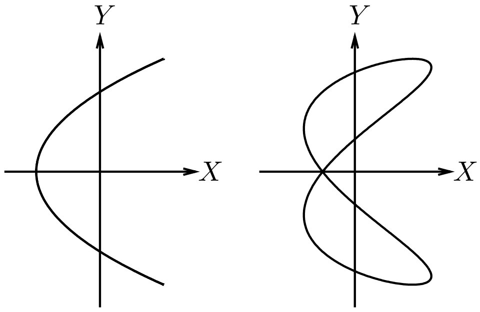
$$\boxed{F = sv^2} \tag{7}$$

Práve z grafu tejto závislosti určíme neznámu dĺžkovú husotou s.

Postup práce

1.) Najprv pomocou podpier P nastavíme istú dĺžku L struny. Odporúčané hodnoty sú od 30 do 70 cm. Pod strunu vhodne umiestnime budiaci elektromagnet B a detektor amplitúdy kmitov D. Je pritom dôležité, aby budiaci elektromagnet ani detektor neboli v uzle hľadaného módu stojatého vlnenia. Súčasne nesmú byť príliš blízko pri sebe, pretože detektor by zachytával signál priamo z budenia prostredníctvom elektromagnetickej väzby medzi cievkami budenia a detektora. Odporúčame umiestniť detektor aj budenie do vzdialenosti $L/3$ od podpery a do vzdialenosti $L/3$ navzájom od seba. Signál chvenia struny aj

[2]Počas merania musíme samozrejme pracovať tak, akoby sme hodnotu dĺžkovej hustoty struny vopred nepoznali.



Obr. 3: Príklady Lissajousových kriviek na osciloskope. Stav rezonancie je charakterizovaný nulovou plochou uzavretej krivky (obrázok vľavo). Stav mimo rezonancie (vpravo) je charakteristický nenulovou plochou uzavretej krivky. Viď aj príslušnú poznámku v texte pod čiarou.

referenčný signál priamo z generátora sa zobrazujú[3] nad sebou na obrazovke osciloskopu O.

2.) Po nastavení geometrie experimentu nastavíme veľkosť napínacej sily struny pomocou napínacieho zariadenia N najprv na hodnotu $F = 10\,\mathrm{N}$.

3.) Spustíme generátor budiaceho signálu. Keďže úlohou je nájsť najnižšiu rezonančnú frekvenciu, znížime frekvenciu generátora prakticky až na nulu (odporúčame na cca 20 Hz) a potom veľmi pomaly frekvenciu zvyšujeme. Amplitúdu budiaceho signálu pritom máme nastavenú na vhodnú hodnotu nájdenú skusmo. Pri istej frekvencii generátora spozorujeme, že struna sa silne rozchveje a vzrastie aj amplitúda detegovaného signálu zobrazeného na osciloskope. Jemne doladíme frekvenciu tak, aby bol signál maximálny. Aby šlo o skutočnú rezonanciu, musí mať signál z detektora na osciloskope polovičnú periódu oproti signálu budenia.

4.) Zapíšeme nájdenú frekvenciu generátora ν_{G} do príslušného políčka v tabuľke a tak isto aj hodnotu príslušnej frekvencie budenia $\nu_1 = 2\nu_{\mathrm{G}}$. Táto hodnota rezonančnej frekvencie je súčasne hľadanou základnou frekvenciou struny s dĺžkou L a napínacou silou F.

5.) Napínaciu silu nastavíme na hodnotu 20 N a nájdeme novú príslušnú rezonančnú frekvenciu tým istým postupom. Hľadanie si však urýchlime pomocným výpočtom na základe vyjadrenia (6), ktoré nám hovorí, že ak zvýšime ťahovú silu 2-krát, tak frekvencia by sa mala zvýšiť $\sqrt{2}$-krát. Vypočítaný údaj nám poslúži len ako orientačný na rýchle nájdenie skutočnej *experimentálnej* hodnoty rezonančnej frekvencie.

6.) Pokračujeme ďalej pre napínacie sily 30, 40 a 50 N.

7.) Nastavíme postupne ešte dve ďalšie dĺžky struny a všetko zopakujeme opäť pre napínacie sily $F = 10$, 20, 30, 40 a 50 N.

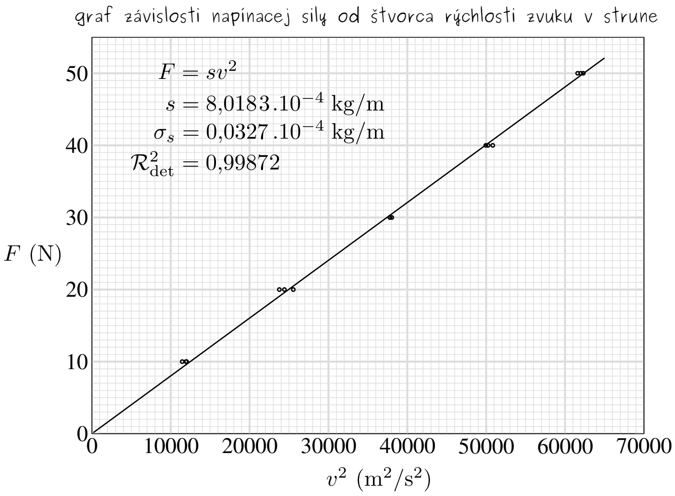
[3] Jemnejší spôsob merania a teda alternatívny postup by bol pomocou merania fázy budiaceho signálu a signálu odozvy. Toto meranie sa vykonáva v XY režime osciloskopu. Odporúčame vyskúšať a popr. aj používať tento režim. Pre stav rezonancie je charakteristické to, že budiaci signál a signál odozvy majú fázový posuv π. V XY režime sa signál objaví ako Lissajousova krivka s nulovou plochou (pozri obr. 3). Mimo rezonancie stopa na osciloskope uzatvára nenulovú plochu.

8.) Z nameraných rezonančných frekvencií ν_1 a zo znalosti vlnových dĺžok vypočítame rýchlosť šírenia vlny na základe vzťahu (5), $v = \lambda_1 \nu_1$. Postupne vyplníme tabuľky 1 až 3.

9.) Všetky usporiadané dvojice (v^2, F) vynesieme do jedného grafu závislosti F od v^2. Tieto údaje spracujeme lineárnou regresiou *s nulovým priesečníkom*, čiže regresiou typu $f(x) = bx$. Dĺžkovú hustotu s struny určíme pomocou smernice b tejto závislosti, je dokonca s ňou zhodná.

Inštrukcie na zostrojenie grafu

K protokolu pripojíme graf závislosti napínacej sily od druhej mocniny rýchlosti zvuku a príslušné popisky. Graf nakreslíme ručne na milimetrový papier. Namerané hodnoty za-



Obr. 4: Ukážka, čo má obsahovať a ako má byť vypracovaný graf v úlohe Chvenie struny. Keďže číselné údaje v grafe sú predbežného charakteru, je potrebné ich uvádzať na vyšší počet platných číslic. (Použite však vaše vlastné údaje!) Hlavné výsledky v protokole treba potom vhodne zaokrúhliť. V podobnom zmysle je potrebné vypracovávať grafy aj vo väčšine iných úloh.

značíme napr. krúžkami a pravítkom preložíme priamku v súlade s výsledkami lineárnej regresie. Do grafu zapíšeme modelovú rovnicu $F = sv^2$, hodnotu smernice s (aj s jednotkami) vypočítanú lineárnou regresiou, smerodajnú odchýlku σ_s a koeficient determinovanosti $\mathcal{R}^2_{\mathrm{det}}$ určený v súlade so štandardnou definíciou[4]. Smernicu v grafe uvádzame na aspoň

[4]Štandardná definícia poskytuje vyjadrenie

$$\mathcal{R}^2_{\mathrm{det}} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - f_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}$$

x_i sú experimentálne hodnoty na osi x, tu teda štvorce rýchlostí z tabuliek, y_i sú sily a f_i sú funkčné hodnoty z regresnej rovnice, čiže $f_i = sx_i$, kde s je smernica z regresie. $\bar{y}$ je aritmetický priemer hodnôt y_i. Program Excel v prípade regresie s nulovým priesečníkom počíta koeficient determinovanosti pomocou nevhodnej definície, takže ním vypočítanú hodnotu neuvádzame.

4 platné číslice. Jej smerodajnú odchýlku na aspoň 2 platné číslice. Hodnotu $\mathcal{R}^2_{\mathrm{det}}$ píšeme na toľko desatinných miest, aby aspoň posledné dve boli odlišné od číslice 9.

Presnosť merania

Ako bolo uvedené vyššie, lineárnou regresiou závislosti $F = sv^2$ získame parameter s a ďalším výpočtom aj jeho smerodajnú odchýlku σ_s. Fyzikálnym významom smernice s v tejto úlohe je hľadaná dĺžková hustota.

Úplné ohodnotenie presnosti merania by vyžadovalo aj určenie neistoty Δs dĺžkovej hustoty struny. Neistota hodnoty fyzikálnej veličiny má však netriviálny vzťah k jej smerodajnej odchýlke a podrobná analýza tohto vzťahu by bola nad rámec týchto cvičení.

Vieme však aspoň odhadnúť chybu merania, čo je rozdiel medzi nami experimentálne určenou hodnotou s a jej presnou hodnotou. Presnú hodnotu síce nepoznáme, ale poznáme hodnotu $s_{\text{váž}}$ získanú z priameho odváženia a zmerania dĺžky struny. (Toto váženie a meranie nebudeme robiť, nakoľko takto určená hustota už je k dispozícii v laboratóriu.) O hodnote $s_{\text{váž}}$ sa môžme domnievať, že jej neistota je zanedbateľne malá v porovnaní so smerodajnou odchýlkou σ_s nami nameranej hustoty s, a teda $s_{\text{váž}}$ pre tento účel môžme považovať za presnú. Preto chybu merania určíme ako rozdiel $s - s_{\text{váž}}$. Porovnanie nameranej a odváženej hodnoty uvedieme vhodnou formou v zhodnotení výsledkov v protokole.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 21

Chvenie struny

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

Tabuľky z priebehu meraní

$L =$			$\lambda_1 =$	
F (N)	ν_G (Hz)	ν_1 (Hz)	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)

$L =$			$\lambda_1 =$	
F (N)	ν_G (Hz)	ν_1 (Hz)	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)

$L =$			$\lambda_1 =$	
F (N)	ν_G (Hz)	ν_1 (Hz)	v (m/s)	v^2 (m^2/s^2)

Tabuľka s hlavnými a pomocnými výsledkami

Zistená dĺžková hustota struny	$s =$
Smerodajná odchýlka výsledku	$\sigma_s =$
Dĺžková hustota získaná vážením	$s_{\text{váž}} =$

Prílohy

- graf závislosti F od v^2

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Hodnotenie a podpis učiteľa:**