

Laboratórna úloha č. 8

Koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu

Úloha: Určiť koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu meraním teplotnej závislosti tlaku vzduchu uzavretého v banke.

Teoretický úvod

Závislosť tlaku plynu od teploty pri stálom objeme pre väčšinu plynov v oblasti izbových teplôt vystihuje lineárna závislosť

$$p = p_0(1 + \gamma t) \quad (1)$$

kde t predstavuje Celziovu teplotu, p_0 tlak plynu pri teplote 0°C a γ je koeficient teplotnej rozpínavosti plynu.

Pre tzv. ideálny plyn, ktorý býva v experimentoch dostatočne presne realizovaný zriedeným vzácnym plynom, nám vzťah (1) definuje Celziovu plynovú teplotnú stupnicu. Koeficient teplotnej rozpínavosti ideálneho plynu γ_i bol určený experimentálne a má hodnotu

$$\gamma_i = \frac{1}{273,15} \text{ }^\circ\text{C}^{-1} \quad (2)$$

Termodynamická teplotná stupnica má rovnaké delenie ako Celziova (rovnaké hodnoty zmeny teploty odpovedajúcej rovnakej zmene termodynamického stavu), ale jej nulová hodnota je posunutá tak, aby stavová rovnica ideálneho plynu mala tvar

$$pV = nRT \quad (3)$$

kde V je objem plynu, n látkové množstvo plynu, R molárna plynová konštanta a T je termodynamická teplota. V prípade, že budeme udržiavať pri zmene teploty stály objem plynu, zo vzťahu (3) vyplýva lineárna funkčná závislosť tlaku od teploty

$$p = \frac{p_0}{T_0} T \quad (4)$$

kde p_0 je tlak a T_0 termodynamická teplota plynu v stave odpovedajúcom 0°C . Porovnaním teplotnej závislosti tlaku ideálneho plynu v termodynamicknej (4) a Celziovej (1) stupnici dostaneme vzťah medzi oboma teplotnými stupnicami

$$1 + \gamma_i t = \frac{T}{T_0} \quad \implies \quad T = T_0 + T_0 \gamma_i t \quad (5)$$

Z dôvodov rovnakého delenia oboch stupníc je hodnota konštanty T_0 rovná¹

$$T_0 = \frac{1}{\gamma_i} \quad (6)$$

a vzťah medzi termodynamickou a Celziovou stupnicou má tvar

$$T = T_0 + t \quad (7)$$

Potom v Celzovej stupnici odpovedá nulovej termodynamickej teplote hodnota

$$t_0 = -273,15 \text{ }^\circ\text{C} \quad (8)$$

a hodnota T_0 je

$$T_0 = 273,15 \text{ K} \quad (9)$$

Metóda merania a aparatóra

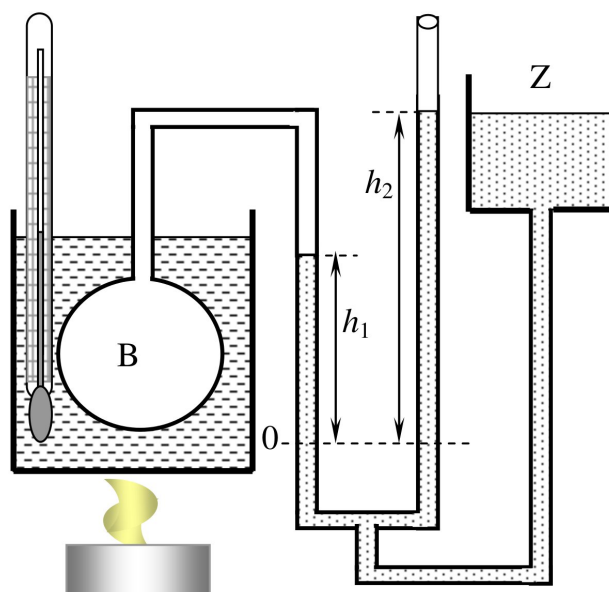
Na určenie koeficientu rozpínavosti γ využijeme teplotnú závislosť (1) tlaku vzduchu od teploty pri stálom objeme. Zmeriame a vyhodnotíme priebeh tejto závislosti, z čoho dostaneme hľadaný koeficient.

Meracia aparatóra je schematicky znázornená na obrázku 1. Banka **B**, v ktorej je uzavretý vzduch, je spojená s kvapalinovým manometrom. Teplotu vzduchu v banke meníme ohrievaním vodného kúpeľa, v ktorom je banka ponorená. Ak teplotu vzduchu v banke **B** zvyšujeme, vzduch v nej sa rozpína a tlačí hladinu kvapaliny v ramene 1 (ľavom) dole. Stály objem vzduchu počas merania teplotnej závislosti tlaku potom zaručíme tým, že výšku hladiny h_1 v ľavom ramene manometra udržíme konštantnú. Dosiachneme to menením výšky zásobníka kvapaliny **Z**. Zásobník zdvihneme tak, aby sme upravili výšku hladiny h_1 na pôvodnú úroveň. V pravom ramene manometra pritom hladina kvapaliny vystúpi tiež, do výšky h_2 od vzťažnej úrovne. Tlak vzduchu p v banke je súčtom atmosférického tlaku b a hydrostatického tlaku kvapaliny v manometri:

$$p = b + (h_2 - h_1)sg \quad (10)$$

kde s je hustota kvapaliny v manometri a g je tiažové zrýchlenie.

¹V tomto a nasledujúcom vzťahu si môžeme všimnúť nerovnosť jednotiek jednotlivých členov rovníc. Napr. ľavá strana rovnice (6) je v Kelvinoch, zatiaľ čo pravá je v stupňoch Celzia [pozri (2)]. Keďže ľavá strana rovnice sa má rovnať pravej strane aj čo sa týka jednotiek, rovnica (6) vyzerá byť nesprávna. Podobne napr. aj rovnica (7), kde zasa sčítavame veličiny vyjadrené v rôznych jednotkách (K a $^\circ\text{C}$). Vzťahom ako napr. (7) napriek tomu rozumieme a vieme ich správne používať. Keby sme túto rovnicu chceli zapísať úplne dôsledne, spravili by sme to takto: $T = T_0 + \{t\} \text{ K}$. Klukaté zátvorky nám z veličiny „vylúpnu“ len jej číselnú časť: napr. $\{36,5 \text{ }^\circ\text{C}\} = 36,5$. Pritom treba dopredu definovať, v akých jednotkách je hodnota veličiny uvažovaná. Napr. $\{2 \text{ m}\} = 2$, ak by sme uvažovali metre. Ale $\{2 \text{ m}\} = 200$, ak by sme uvažovali centimetre. Preto treba kvôli jednoznačnosti výsledku definovať, čo uvažujeme ako jednotku. V praxi sa však klukaté zátvorky v zmysle „vylupovania“ číselnej hodnoty používajú pomerne zriedka.



Obr. 1: Schéma meracieho zariadenia.

Postup merania a princíp vyhodnotenia

Na začiatku merania zapíšeme hodnoty redukovaného² atmosférického tlaku $b_1(0)$, teploty t_1 a výšok stĺpcov kvapaliny v manometri h_1 a h_2 . Varičom ohrievame vodný kúpeľ, v ktorom je ponorená banka **B**. Postupne odčítavame a zapisujeme do tabuľky hodnoty rastúcej teploty t a výšku stĺpca h_2 , pričom udržiavame výšku stĺpca h_1 konštantnú. Na konci merania opäť zapíšeme hodnotu redukovaného atmosférického tlaku $b_2(0)$. Z redukovaných tlakov určíme podľa barometrickej rovnice skutočné atmosférické tlaky b_1 a b_2 v aktuálnej nadmorskej výške laboratória. Na výpočet tlaku p podľa vzťahu (10) použijeme aritmetický priemer $b = (b_1 + b_2)/2$. Treba si uvedomiť, že teplomerom meriame teplotu kúpeľa, nie vzduchu v banke. Preto pri meraní postupujeme tak, aby sa teplota vzduchu v banke stačila vyrovnávať s teplotou kúpeľa.

Očakávame, že takto nameraná závislosť tlaku od teploty spĺňa vzťah (1), preto nameranými bodmi $\{t_i, p_i\}$ preložíme priamku, t. j. lineárnou regresiou určíme jej parametre k

²Tlakomery, aj tie v laboratóriu, bývajú zvyčajne kalibrované tak, aby udávali tlak prepočítaný („redukovaný“) na nulovú nadmorskú výšku. Aj bežné meteorologické údaje predstavujú prepočítané tlaky, nie aktuálne. Vzťah medzi redukovaným tlakom $b(0)$ a skutočným tlakom $b = b(H)$ v nadmorskej výške H približne popisuje barometrická rovnica

$$b(H) = b(0) \exp \left[-\frac{\rho_0 g}{b(0)} H \right] \approx b(0) - H \rho_0 g$$

kde $\rho_0 \doteq 1,2 \text{ kg/m}^3$ je hustota vzduchu pri hladine mora a $g \doteq 9,81 \text{ m/s}^2$ a priblíženie na pravej strane je použiteľné pre malé (všetky bežné) nadmorské výšky H . Barometrická rovnica síce prepokladá rovnaké teploty vzduchu vo výške 0 aj vo výške H , ale pre naše účely môžeme tento teplotný rozdiel zanedbať. Z hodnôt $b_1(0)$, $b_2(0)$ odčítaných z tlakomera na začiatku a konci merania vypočítame pomocou barometrickej rovnice skutočné tlaky b_1 a b_2 . Tie spriemerujeme, čím dostaneme hodnotu b . Tú použijeme na výpočet tlakov p v meracej aparatúre.

a q (smernica a priesečník). Priamku zakreslíme aj do grafu; pozri časť *Inštrukcie pre zostrojenie grafu*.

Z takto experimentálne určených parametrov k a q získame hodnoty veličín p_0 a γ , a to nasledovným porovnaním teoretickej závislosti (1) s rovnicou priamky $p = kt + q$:

$$\begin{aligned} p &= p_0(1 + \gamma t) = p_0 + p_0\gamma t = \\ &= q + kt \end{aligned}$$

Z tohto porovnania nám pre tlak p_0 a pre hodnotu koeficientu rozpínavosti γ okamžite vychádzajú vzťahy

$$p_0 = q \quad (11)$$

a

$$\gamma = \frac{k}{q} \quad (12)$$

Ďalšie kroky vyhodnotenia sú tieto:

- hodnotu koeficientu rozpínavosti vzduchu γ pri izbovej teplote porovnáme s koeficientom γ_i [pozri (2)] ideálneho plynu (teda zapíšeme oba údaje do výsledkovej časti protokolu a ich zhodu alebo nezhodu diskutujeme v závere)
- určíme posunutie T_0 Celziovej teplotnej stupnice oproti termodynamickému teplotnej stupnici a porovnáme ho s tabuľkovou hodnotou $T_0^{\text{tab}} = 273,15 \text{ K}$
- určíme koncentráciu n_k molekúl v banke; na výpočet použijeme stavovú rovnicu ideálneho plynu.³

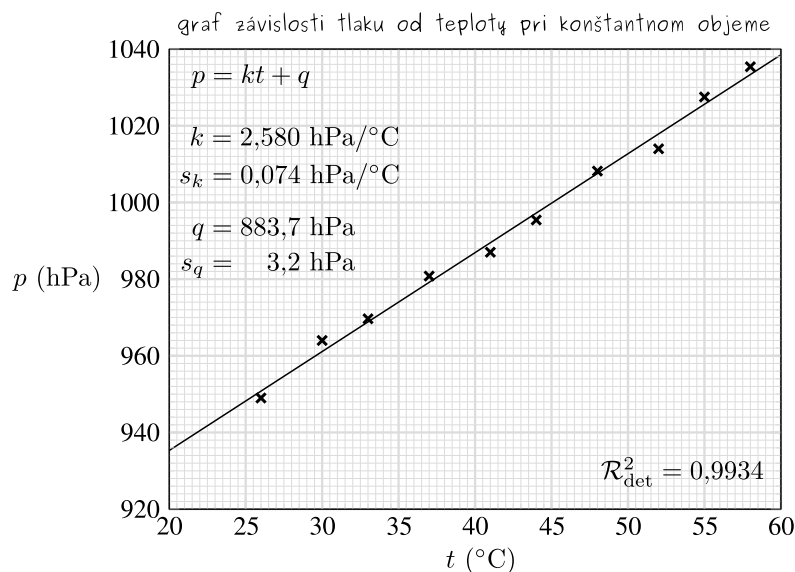
Inštrukcie pre zostrojenie grafu

K protokolu pripojíme graf závislosti tlaku od teploty s príslušnými popismi. Graf nakreslíme ručne na milimetrový papier. Namerané hodnoty vynesieme do grafu napr. krížikmi a pravítkom preložíme priamku tak, aby optimálne prechádzala pomedzi namerané body. Do grafu zapíšeme modelovú rovnicu $p = kt + q$. Do grafu vpíšeme aj príslušné hodnoty k a q (aj s jednotkami) vyplývajúce z regresie, koeficient determinovanosti $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$ a smerodajné odchýlky s_k a s_q . Číselné údaje v grafe uvedieme tak, aby smerodajné odchýlky s_k , s_q obsahovali 2 až 3 platné číslice. Podľa týchto smerodajných odchýlok potom zaokrúhľujeme hodnoty k a q (pozri obr. 2). Hodnotu $\mathcal{R}_{\text{det}}^2$ zapíšeme na toľko desatinných miest, aby posledné dve boli odlišné od cifry 9.

Presnosť merania

Z hodnôt k a q získaných lineárnou regresiou vieme ľahko určiť fyzikálne veličiny p_0 a γ pomocou vyjadrení (11) a (12). Hodnoty k a q sú pritom zatažené neistotami. Hrubým

³Koncentrácia n_k je počet molekúl na jednotku objemu, teda veličina s jednotkami m^{-3} alebo napr. cm^{-3} . Netreba si ju mýliť s látkovým množstvom n , čo je absolútny počet mólov danej vzorky, v jednotkách mol.



Obr. 2: Ukážka, čo má obsahovať a ako má byť vypracovaný graf v úlohe o rozpínavosti plynu. Keďže číselné údaje v grafe sú predbežného charakteru, je potrebné ich uvádzať na vyšší počet platných číslic. (Použite však vaše vlastné údaje!) Hlavné výsledky v protokole treba potom vhodne zaokrúhliť. V podobnom zmysle je potrebné vypracovávať grafy aj vo väčšine iných úloh.

odhadom týchto neistôt sú smerodajné odchýlky s_k a s_q , ktoré nám tiež určí regresný výpočet. Smerodajné odchýlky hodnôt k a q sa prenášajú aj do z nich určených veličín p_0 , γ a ďalších, a to podľa nasledovných vzťahov:

$$s_{p_0} = s_q \quad (13)$$

a

$$\left(\frac{s_\gamma}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{s_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{s_q}{q}\right)^2 \quad (14)$$

Bude nás zaujímať aj nami zistená experimentálna hodnota T_0 (t.j. termodynamická teplota zodpovedajúca 0°C Celziovej stupnice). Podľa vyjadrenia (6) to je

$$T_0 = \frac{1}{\gamma}$$

a jej smerodajná odchýlka s_{T_0} sa určuje v súlade so vzťahom

$$\left(\frac{s_{T_0}}{T_0}\right)^2 = \left(\frac{s_\gamma}{\gamma}\right)^2 \quad (15)$$

Smerodajné odchýlky požadované v protokole teda vypočítame pomocou vzťahov (13), (14) a (15). V zhodnotení výsledkov je potrebné diskutovať aj rozdiel medzi nameranou hodnotou T_0 a známou tabuľkovou hodnotou $T_0^{\text{tab}} = 273,15 \text{ K}$.

Neistota hodnoty fyzikálnej veličiny má netriviálny vzťah k jej smerodajnej odchýlke. Podrobná analýza tohto vzťahu by bola nad rámec týchto cvičení. V našej úlohe zoberieme za odhad neistôt príslušne smerodajné odchýlky.

Meno:

Krúžok:

Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 8
Koeficient teplotnej rozpínavosti vzduchu

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Prílohy

- graf závislosti tlaku od teploty

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta:

Hodnotenie a podpis učiteľa: