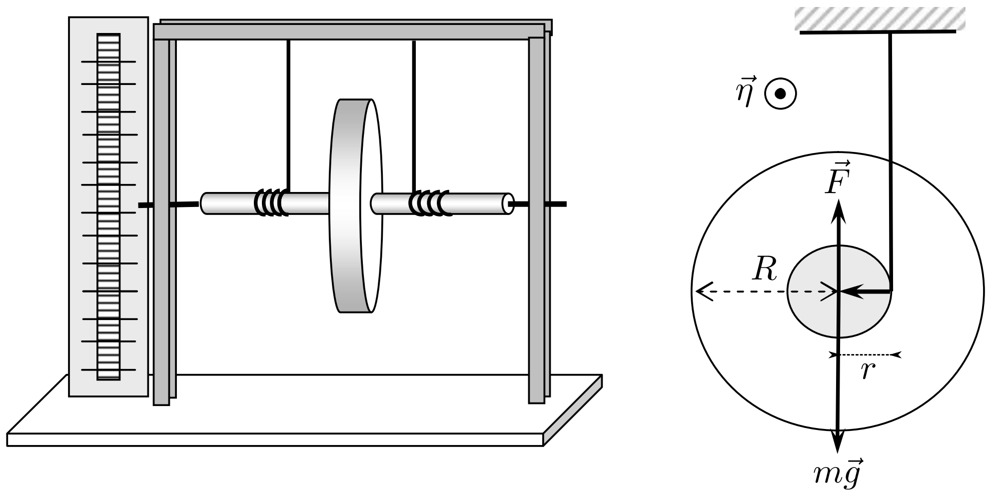
Laboratórna úloha č. 2

Maxwellovo kyvadlo

Úloha: Z nameraných charakteristických hodnôt Maxwellovho kyvadla určiť moment zotrvačnosti zotrvačníka tohto kyvadla a priemernú veľkosť sily pôsobiacej proti jeho pohybu

Teoretický úvod

Maxwellovo kyvadlo je kotúč na hriadeli (zotrvačník) s pomerne veľkým momentom zotrvačnosti, zavesený na dvoch vláknach (obrázok 1). Vláknami, ktorých konce sú pevne spojené s hriadeľom, je zotrvačník zavesený na rám stojana, pričom os zotrvačníka sa môže pohybovať vo zvislom vedení rámu. Keď sa v hornej polohe zotrvačník uvoľní, začne klesať, vlákna sa začnú z hriadeľa odvíjať a zotrvačník klesajúc sa začne roztáčať. Pri prechode dolnou úvraťou, keď sa nite celkom odvinuli, zotrvačník sa zotrvačnosťou otáča ďalej tým istým smerom a nite sa začnú na hriadeľ navíjať, takže zotrvačník začne stúpať.



Obr. 1: Maxwellovo kyvadlo.

Pohyb zotrvačníka posúdime z energetického hľadiska. Východiskovej hornej polohe priradíme výškovú súradnicu y_0, takže polohová energia zotrvačníka je vtedy mgy_0, kinetická energia je nulová. Predpokladajme, že v istom časovom okamihu je zotrvačník vo výške $y < y_0$, takže jeho potenciálna energia je už menšia. Časť potenciálnej energie sa premenila na kinetickú energiu (tá má dve zložky – translačnú a rotačnú), časť sa spotrebovala na prekonávanie odporu prostredia. Zo zákona zachovania energie tak vyplýva vzťah

$$mgy_0 - mgy = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 + F\,(y_0 - y) \tag{1}$$

kde m je hmotnosť zotrvačníka spolu s hriadeľom, v translačná rýchlosť ťažiska zotrvačníka a ω uhlová rýchlosť otáčania zotrvačníka. Veličina J_0 je moment zotrvačnosti zotrvačníka s hriadeľom vzhľadom na ich os súmernosti, ktorá prechádza osou otáčania. Veličina F predstavuje celkovú odporovú silu pôsobiacu proti pohybu zotrvačníka.

Keď si uvedomíme, že medzi uhlovou rýchlosťou ω a rýchlosťou v platí vzťah $\omega = v/r$, lebo vlákna sa odvíjajú z hriadeľa, ktorý má polomer r, môžeme rovnicu (1) upraviť:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_0\omega^2 = (mg - F)\,(y - y_0) \quad \Longrightarrow \quad \left(m + \frac{J_0}{r^2}\right) v^2 = 2(mg - F)(y_0 - y) \tag{2}$$

Vo vyplývajúcej rovnici závisia od času iba veličiny v a y. Jej deriváciou podľa času dostaneme

$$\left(m + \frac{J_0}{r^2}\right) 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2(mg - F)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,(-1) \tag{3}$$

pričom $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ je rýchlosť ťažiska zotrvačníka a $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ jeho zrýchlenie. Pri klesaní zotrvačníka sa súradnica y s časom zmenšuje, teda $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t < 0$, čo vo vzťahu (3) v súčine s číslom (-1) poskytne kladnú hodnotu. Pre veľkosť (absolútnu hodnotu) zrýchlenia a_k pri klesaní zotrvačníka dostaneme ďalšou úpravou vzťah

$$a_\mathrm{k} = \frac{r^2(mg - F)}{J_0 + mr^2} \tag{4}$$

Odtiaľ vyplýva, že za predpokladu nemennosti sily F je zrýchlenie konštantné. To znamená, že za časový interval Δt_k zotrvačník prejde dráhu s_k (mal nulovú začiatočnú rýchlosť):

$$s_\mathrm{k} = \frac{1}{2}\,a_\mathrm{k}\,(\Delta t_\mathrm{k})^2 = \frac{r^2(mg - F)}{2(J_0 + mr^2)}\,(\Delta t_\mathrm{k})^2 \tag{5}$$

Z tejto rovnice, ktorá popisuje klesanie zotrvačníka, určíme jeho moment zotrvačnosti:

$$J_0 = \frac{r^2(mg - F)(\Delta t_\mathrm{k})^2}{2s_\mathrm{k}} - mr^2 \tag{6}$$

Úvahami o energetickej bilancii pri stúpaní zotrvačníka by sme pre moment zotrvačnosti dostali analogický vzťah

$$J_0 = \frac{r^2(mg + F)(\Delta t_\mathrm{s})^2}{2s_\mathrm{s}} - mr^2 \tag{7}$$

v ktorom Δt_s predstavuje časový interval potrebný na výstup do hornej úvrate po dráhe s dĺžkou s_s. Keď poznáme veľkosti veličín m a r a zmeriame veličiny s_k, Δt_k, s_s a Δt_s, v rovniciach (6) a (7) zostanú iba dve neznáme – moment zotrvačnosti J_0 a sila F predstavujúca odpor prostredia spolu s trením. Z rovníc ich teda možno vypočítať. Po vylúčení sily F dostaneme pre moment zotrvačnosti vzťah

$$J_0 = mr^2 \left(\frac{g}{\dfrac{s_\mathrm{k}}{\Delta t_\mathrm{k}^2} + \dfrac{s_\mathrm{s}}{\Delta t_\mathrm{s}^2}} - 1 \right) \tag{8}$$

Silu F budeme určovať samostatným meraním, ako bude uvedené ďalej.

Poznámka. Rovnaký výsledok dostaneme, keď riešime pohybovú rovnicu $\vec{M} = J\vec{\alpha}$, opisujúcu rotačný pohyb telesa okolo osi. V tejto rovnici J je moment zotrvačnosti telesa vzhľadom na os otáčania (povrchová priamka hriadeľa, v ktorej sa vlákno od neho odpája), $\vec{M}$ moment vonkajších síl pôsobiacich na teleso vzhľadom na tú istú os a $\vec{\alpha}$ uhlové zrýchlenie otáčania telesa. Vonkajšími silami pôsobiacimi na zotrvačník sú jeho tiaž $m\vec{g}$, reakcie na sily, ktorými sú napínané závesné vlákna, a odpor prostredia spolu s trením. Moment tiažovej sily vzhľadom na os otáčania je $\vec{r} \times m\vec{g}$, má smer jednotkového vektora $\vec{\eta}$ (na obr. 1 smeruje k čitateľovi), takže sa dá vyjadriť v tvare $mgr\vec{\eta}$, kde $r = |\vec{r}|$ je polomer hriadeľa. Moment síl reakcie na napínanie vlákien je však vzhľadom na os otáčania nulový, takže nevstupuje do pohybovej rovnice. Sily odporu prostredia, ktorých výslednica $\vec{F}$ pôsobí v ťažisku zotrvačníka, majú nenulový moment $\vec{r} \times \vec{F}$ (veľkosť momentu je Fr), takže ho treba zahrnúť do pohybovej rovnice. Zatiaľ čo moment tiažovej sily má smer jednotkového vektora $\vec{\eta}$, pri pohybe zotrvačníka nadol smeruje moment sily $\vec{r} \times \vec{F}$ opačným smerom, takže pohybová rovnica má tvar

$$J\vec{\alpha} = mgr\vec{\eta} - Fr\vec{\eta} \tag{9}$$

Vektor uhlovej rýchlosti pri klesaní zotrvačníka má smer vektora $\vec{\eta}$. Veľkosť uhlovej rýchlosti sa zväčšuje, takže aj vektor uhlového zrýchlenia $\vec{\alpha}$ pri klesaní zotrvačníka má smer vektora $\vec{\eta}$. Jeho veľkosť sa rovná podielu zrýchlenia a_k ťažiska a polomeru r hriadeľa, takže platí vzťah $\vec{\alpha} = (a_\mathrm{k}/r)\vec{\eta}$. Moment zotrvačnosti J vzhľadom na os otáčania sa podľa Steinerovej vety rovná súčtu $J_0 + mr^2$, kde J_0 je moment zotrvačnosti vzhľadom na os prechádzajúcu ťažiskom, teda os súmernosti zotrvačníka. Po dosadení uvedených vzťahov do pohybovej rovnice dostaneme

$$(J_0 + mr^2)\frac{a_\mathrm{k}}{r}\vec{\eta} = (mgr - Fr)\vec{\eta} \quad \Longrightarrow \quad (J_0 + mr^2)a_\mathrm{k} = mgr^2 - Fr^2 \tag{10}$$

odkiaľ pre veľkosť zrýchlenia získame rovnicu zhodnú s rovnicou (4).

Metóda merania

Ak Maxwellovo kyvadlo spustíme z výšky y_0, začne klesať, a keď dosiahne najnižšiu polohu y_z, začne stúpať. V dôsledku strát energie nevystúpi do pôvodnej výšky y_0, ale iba do výšky y_1. Potom znova začne klesať a proces sa viackrát opakuje. V prvom priblížení môžeme predpokladať, že energetické straty sú úmerné celkovej dĺžke dráhy, ktorú zotrvačník prešiel a že sila odporu je konštantná. To znamená, že ak sa zotrvačník po prvom cykle zastaví vo výške y_1, potom platí

$$mg(y_0 - y_1) = F(s_\mathrm{k} + s_\mathrm{s}) \tag{11}$$

kde $s_\mathrm{k} = y_0 - y_\mathrm{z}$, $s_\mathrm{s} = y_1 - y_\mathrm{z}$. Z tohto vzťahu vypočítame silu F:

$$F = \frac{mg(y_0 - y_1)}{s_\mathrm{k} + s_\mathrm{s}} \tag{12}$$

ktorá predstavuje odpor proti pohybu zotrvačníka. Týmto spôsobom môžeme určiť veľkosť sily bez merania časových intervalov. Veľkosť sily sa však v priebehu pohybu pravdepodobne mení a môžeme očakávať, že závisí aj od rýchlosti pohybu. Maximálna rýchlosť pohybu závisí od výšky y_0, z ktorej zotrvačník púšťame, čo by sa malo prejaviť aj na veľkosti sily vypočítanej pomocou vzťahu (12). Preto sa pri meraní veľkosti sily F zameriame aj na určenie jej závislosti od začiatočnej polohy y_0.

Postup pri meraní a vyhodnotenie merania

1. Na viacerých miestach zmeriame priemer hriadeľa a z aritmetického priemeru nameraných hodnôt určíme jeho polomer (tab. 1). Pomocou váh určíme hmotnosť zotrvačníka s oskou.

2. Na zvislom meradle určíme najnižšiu polohu y_z zotrvačníka. Navíjaním nití na hriadeľ zdvihneme zotrvačník do východiskovej hornej polohy y_0, pričom dbáme, aby hriadeľ bol vodorovný. Po uvoľnení zotrvačník striedavo klesá k najnižšej polohe (dolnej úvrati) y_z a stúpa naspäť. Všímať si však budeme iba prvý cyklus. Do tabuľky 3 zaznamenáme východiskovú polohu y_0 a hornú polohu y_1, do ktorej sa zotrvačník vrátil. Meranie opakujeme 10-krát pri postupne sa zmenšujúcej hodnote y_0. Pre každé meranie vypočítame silu F a nakreslíme graf jej závislosti od začiatočnej polohy y_0.

3. Na určenie momentu zotrvačnosti pomocou vzťahu (8) treba zmerať aj časové intervaly potrebné na prechod zotrvačníka z hornej polohy y_0 do dolnej polohy y_z (Δt_k) a z dolnej polohy do novej hornej polohy y_1 (Δt_s). Na určenie týchto časových intervalov potrebujeme tieto časové údaje: čas t_0, v ktorom zotrvačník uvoľníme z hornej polohy, čas t_z, v ktorom dosiahne najnižšiu polohu, a čas t_h, v ktorom sa vráti do najvyššej polohy. Údaje zapisujeme do tabuľky (tab. 4) a pomocou nich vypočítame moment zotrvačnosti J_0. Meranie opakujeme 10 krát, vypočítame aritmetický priemer momentov zotrvačnosti zotrvačníka, ako aj smerodajnú odchýlku aritmetického priemeru (t. j. smerodajnú odchýlku výberového priemeru). Na základe výsledkov zhodnotíme meranie.

Otázky a úlohy

1. Dôsledne odvoďte vzťah (7).

2. Teoreticky vyjadrite pomer dráh $s_\mathrm{k}/s_\mathrm{s}$, teda dráhy prejdenej pri klesaní k dráhe prejdenej pri stúpaní.

3. Aké podmienky by museli byť splnené, aby pohyb kyvadla bol periodický?

4. Ukážte, že dĺžka dráhy s_n pri n-tom klesaní zotrvačníka je exponenciálnou funkciou poradového čísla n.

5. Vyjadrite vzájomný pomer rotačnej a translačnej časti kinetickej energie zotrvačníka.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 2

Maxwellovo kyvadlo

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

Tabuľka 1: Meranie polomeru hriadeľa.

meranie	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$2r$ (mm)										

Tabuľka 2: Stále veličiny. Nezabudnite ich uviesť aj s jednotkami.

hmotnosť zotrvačníka	polomer hriadeľa	najnižia poloha zotrvačníka
$m =$	$r =$	$y_z =$

Tabuľka 3: Meranie sily odporu. Pokiaľ neuvediete inak, používajte jednotky **cm** a **N**.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_0										
y_1										
$y_0 - y_1$										
$s_\mathrm{k} = y_0 - y_\mathrm{z}$										
$s_\mathrm{s} = y_1 - y_\mathrm{z}$										
F										

Sem vpíšte jeden konkrétny výpočet s uvedením veľkostí a rozmerov (jednotiek) fyzikálnych veličín:

$F =$

Aritmetický priemer sily: $F =$

Smerodajná odchýlka aritmetického primeru sily: $s_F =$

Tabuľka 4: Meranie momentu zotrvačnosti.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_0										
y_1										
$y_0 - y_1$										
$s_\mathrm{k} = y_0 - y_\mathrm{z}$										
$s_\mathrm{s} = y_1 - y_\mathrm{z}$										
t_0										
t_z										
t_h										
$\Delta t_\mathrm{k} = t_\mathrm{z} - t_0$										
$\Delta t_\mathrm{s} = t_\mathrm{h} - t_\mathrm{z}$										
J_{0i}										

Sem vpíšte jeden konkrétny výpočet s uvedením veľkostí a rozmerov fyzikálnych veličín [*podľa vzťahu* (8)]*:*

$J_{0i} =$

Aritmetický priemer momentov zotrvačnosti:

$$\bar{J}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J_{0i} =$$

Smerodajná odchýlka aritmetického priemeru:

$$s_J = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(J_{0i} - \bar{J}_0)^2}{n(n-1)}}$$

Výsledok merania s uvedením neistoty merania:

$J_0 =$

Prílohy

- graf závislosti sily odporu F od začiatočej výšky y_0

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Hodnotenie a podpis učiteľa:**