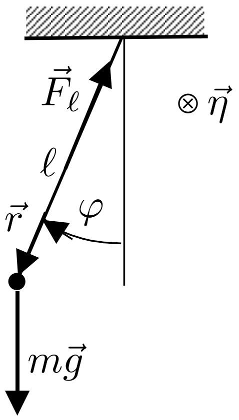
Odvodenie pohybovej rovnice pre matematické kyvadlo



Matematické kyvadlo je idealizovaný mechanický oscilátor, ktorý si predstavujeme ako malé, prakticky bodové teliesko s hmotnosťou m, zavesené na niti s dĺžkou ℓ, ktorej hmotnosť považujeme za nulovú (obr. 3). Na teliesko pôsobia dve sily – sila $\vec{F}_\ell$, ktorou ho pridržiava lanko a tiažová sila $\vec{F}_G = m\vec{g}$. Pohyb matematického kyvadla je opísaný rovnakou pohybovou rovnicou, ako pohyb akéhokoľvek iného kyvadla, teda ako pohyb telesa otáčajúceho sa okolo horizontálnej osi, ktorá neprechádza jeho ťažiskom:

$$\vec{M} = J\vec{\alpha} \tag{1}$$

V tomto vzťahu je $\vec{M}$ súčet momentov síl pôsobiacich na teleso, J jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania a $\vec{\alpha}$ je vektor uhlového zrýchlenia telesa. Vodorovná os otáčania prechádza bodom závesu a vzhľadom na túto os je moment sil $\vec{F}_\ell$ nulový, lebo táto sila zviera s polohovým vektorom $\vec{r}$, ktorý má dĺžku ℓ, uhol 180°. Preto sa pri pohybe kyvadla uplatňuje iba moment $\vec{M}$ tiažovej sily. Vychádzajúc z obrázku, na ktorom je znázornený jednotkový vektor $\vec{\eta}$ kolmý na rovinu obrázku a smerujúci za obrázok, môžeme napísať nasledujúce vzťahy:

$$\vec{M} = \vec{r} \times m\vec{g} = -\vec{\eta}\, m\, g\, \ell\, \sin\varphi\ , \qquad \vec{\alpha} = \vec{\eta}\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} \tag{2}$$

Po ich dosadení do (1) dostaneme upravenú pohybovú rovnicu:

$$J\,\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\eta} = -\vec{\eta}\, m\, g\, \ell\, \sin\varphi \tag{3}$$

Pre získanie konečného tvaru uvážime, že moment zotrvačnosti hmotného bodu je $J = m\ell^2$.

Riešenie pohybovej rovnice pre matematické kyvadlo

V tomto odseku okrem iného ukážeme, že perióda veľkých kmitov vyjadrená ako

$$T = T_0\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right] \tag{4}$$

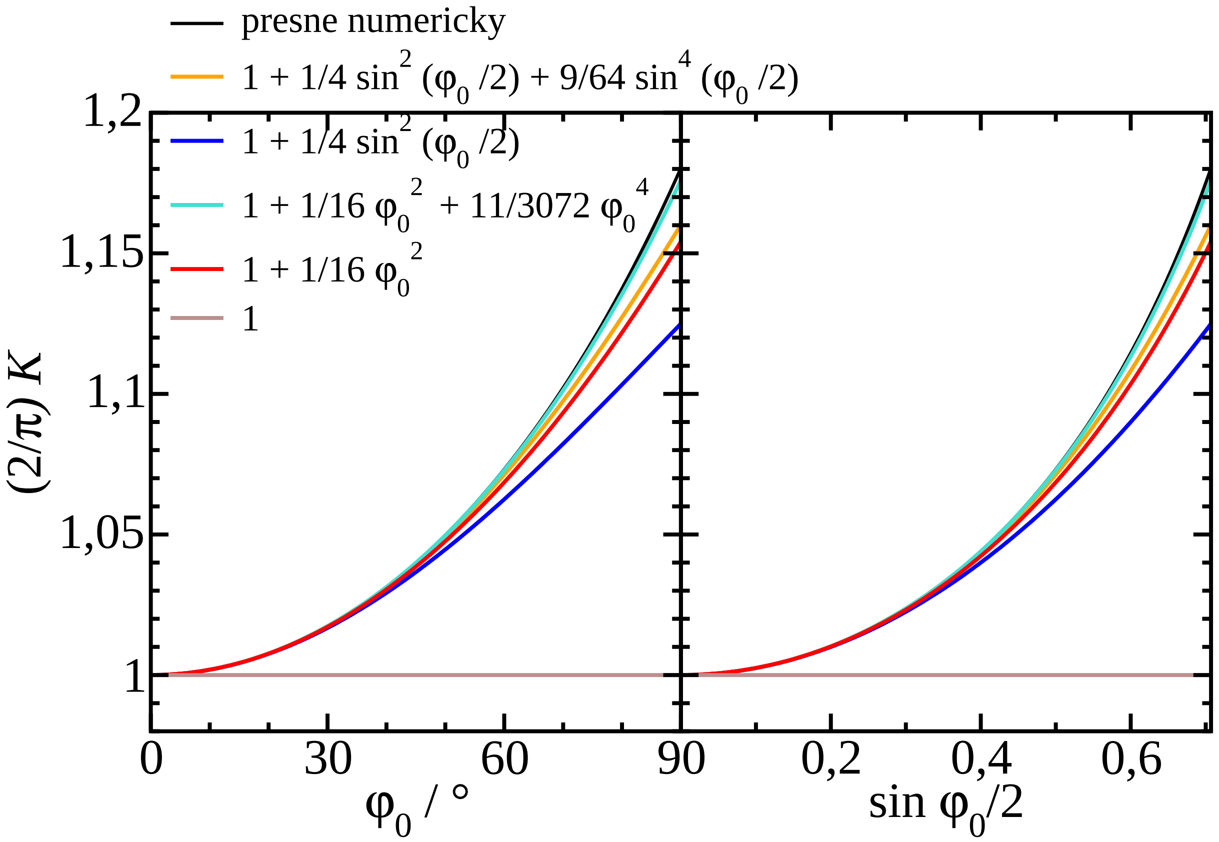
je menej presná ako jednoduchšie vyjadrenie

$$T = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\,\varphi_0^2\right) \tag{5}$$

Výpočet riešenia je ukázaný v knihe [L. D. Landau, E. M. Lifšic: *Mechanika*, Fizmatlit (Moskva, 2002)]. Tu len podrobnejšie rozoberieme výsledok, najmä rozvoj do rôznych mocnín a aj presné numerické riešenie.

Presné riešenie pre periódu matematického kyvadla je

$$\boxed{T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\; K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)}$$



kde

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$$

je tzv. úplný eliptický integrál prvého druhu. Dá sa rozvinúť do Maclaurinovho radu (špeciálny prípad Taylorovho radu, keď rozvíjame funkciu okolo bodu 0). Ozn. $\sin \xi \equiv s$. Najnižšie derivácie potom sú

$$\begin{aligned}
K'(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{ks^2}{(1-k^2s^2)^{3/2}}\, d\xi \\
K''(k) &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{s^2}{(1-k^2s^2)^{3/2}} + \frac{3k^2s^4}{(1-k^2s^2)^{5/2}}\right] d\xi = \int_0^{\pi/2} \frac{s^2(1+2s^2k^2)}{(1-k^2s^2)^{5/2}}\, d\xi \\
K^{(3)}(k) &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{9ks^4}{(1-k^2s^2)^{5/2}} + \frac{15k^3s^6}{(1-k^2s^2)^{7/2}}\right] d\xi = \int_0^{\pi/2} \frac{3ks^4(3+2k^2s^2)}{(1-k^2s^2)^{7/2}}\, d\xi \\
K^{(4)}(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{3s^4(3+24k^2s^2+8k^4s^4)}{(1-k^2s^2)^{9/2}}\, d\xi
\end{aligned}$$

Najnižšie derivácie pri $k = 0$ sú

$$K(0) = \frac{1}{2}\pi\ , \quad K'(0) = 0\ , \quad K''(0) = \frac{1}{4}\pi\ , \quad K^{(3)}(0) = 0\ , \quad K^{(4)}(0) = \frac{27}{16}\pi$$

Pri tom bolo treba vypočítať o.i.

$$\int \sin^4 \xi\, d\xi = \frac{3}{8}\xi - \frac{1}{4}\sin 2\xi + \frac{1}{32}\sin 4\xi + \text{const}\ .$$

Maclaurinov rozvoj eliptického integrálu môžme teda písať

$$K(k) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}k^2 + \frac{27\pi}{16\ 4!}k^4 + \dots$$

a perióda kyvadla sa dá potom vyjadriť

$$T\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \dots\right) \tag{6}$$

Praktickejšie a pri priblížení na konečný počet členov aj výrazne presnejšie (pozri nižšie v texte a na grafe) je vyjadrenie

$$\boxed{T(\varphi_0) = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left[1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2 + \frac{11}{3072}\varphi_0^4 + \dots\right]} \tag{7}$$

ktoré sa dá získať, keď sínusy v riešení (6) rozvinieme do Maclaurinových mocninových radov. Jednotlivé priblíženia ku presnému riešeniu získavame buď z výsledku (6) alebo z výsledku (7) uvážením istého počtu členov týchto nekonečných radov. Na grafe na predošlej strane vidíme, ako presné alebo nepresné sú jednotlivé priblíženia. Pri týchto porovnaniach presností pochopiteľne vždy porovnávame vyjadrenia s rovnakým počtom členov. Podstatné je, že *priblíženie v mocninách* φ_0 *je očividne lepšie než priblíženie v mocninách* $\sin(\varphi_0/2)$. To platí jednak keď periódu uvažujeme ako funkciu argumentu φ_0 a aj keď ju uvažujeme ako funkciu argumentu $\sin(\varphi_0/2)$. Príliš malé hodnoty priblíženia pomocou mocnín sínusu sú dôsledkom oscilujúceho charakteru tejto funkcie, aj keď tá oscilácia pre rozsah φ_0 na grafe ešte nie je osciláciou, len zmenšujúcou sa strmosťou.

Nakoniec si všimnime, že do napísaných riešení v tvare radov vstupujú len párne mocniny φ_0 reps. $\sin(\varphi_0/2)$. To je v súhlase s úvahou, že funkcia (riešenie) $T = T(\varphi_0)$ musí byť párnou funkciou argumentu φ_0. Táto vlastnosť riešenia vyplýva zo samotnej symetrie úlohy, t.j. že kyvadlo sa rozkmitá rovnako bez ohľadu na to, či je počiatočná výchylka φ_0 naľavo alebo napravo (záporná alebo kladná).