Laboratórna úloha č. 4

Matematické kyvadlo

Úlohy:		
	A	Zmerať periódu malých kmitov matematického kyvadla a určiť pomocou nej tiažové zrýchlenie v laboratóriu.
	B	Zmerať závislosť doby kmitu matematického kyvadla od veľkosti začiatočnej výchylky a porovnať s teoretickou predpoveďou.
	C	Zmerať koeficient útlmu kmitov daného kyvadla.

Teoretický úvod

Kyvadlo a jeho história. Matematickým kyvadlom nazývame systém pozostávajúci z hmotného bodu uchyteného na nehmotnej niti v homogénnom gravitačnom poli. Matematické kyvadlo predstavuje model mnohých reálnych kyvadiel, pričom ich spoločnou črtou je periodický pohyb a závislosť periódy tohto pohybu od tiažového[1] zrýchlenia. Tieto vlastnosti tvorili základ prvých kyvadlových hodín, zostrojených holandským učencom Christiaanom Huygensom v roku 1656, umožňujúcich ľudstvu po prvý krát merať čas s presnosťou na sekundy. Kľúčom k úspechu bolo Huygensovo pozorovanie, že len pre malé výchylky z rovnovážnej polohy bola perióda kmitov stabilná, prakticky nezávislá od budenia (závažia s kladkami), ktoré udržiavalo kyvadlo v pohybe.

Pohybová rovnica a jej riešenie. Pohybovú rovnicu popisujúcu časový vývoj uhlovej výchylky kyvadla so závažím zanedbateľných rozmerov v homogénnom gravitačnom poli možno získať použitím Newtonových pohybových zákonov (pozri doplnkový dokument k úlohe), pričom jej výsledný tvar je

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0 \tag{1}$$

kde $\varphi = \varphi(t)$ je od času závislý uhol[2] vychýlenia kyvadla z rovnovážnej polohy, g je tiažové zrýchlenie a ℓ je dĺžka závesu (obr. 1). V prípade, že kyvadlo vykonáva malé kmity (t.j. $|\varphi(t)| \ll 1$), môžeme v druhom člene pohybovej rovnice urobiť priblíženie $\sin\varphi \approx \varphi$, čím získame linearizovanú rovnicu pre kmity harmonického oscilátora,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0 \tag{2}$$

[1] Pojmy tiažové a gravitačné zrýchlenie sa často zamieňajú, čo však nie je správne. Gravitačné zrýchlenie je spôsobené výlučne hmotnosťami telies (tu najmä Zeme), zatiaľ čo tiažové zrýchlenie zahŕňa aj vplyv otáčania Zeme (odstredivá sila na kyvadlo). V bežných podmienkach teda telesá pociťujú tiažové zrýchlenie, nie čisto gravitačné. Preto je v našich úlohách potrebné používať pojem tiažové zrýchlenie.

[2] Uhol vychýlenia teda budeme značiť gréckym písmenom φ (vyslovovať fí). Tento znak treba odlišovať od iných foriem zápisu tohoto písmena, ktoré sú ϕ a Φ.

Jej riešením pre počiatočný uhol vychýlenia φ_0 a nulovú počiatočnú rýchlosť sú tzv. *malé* harmonické[3] kmity:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) \tag{3}$$

kde

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \tag{4}$$

je perióda malých harmonických kmitov kyvadla. Všimnime si, že táto perióda závisí len od dĺžky závesu a od tiažového zrýchlenia a je nezávislá od počiatočnej výchylky. Uhol φ_0 (zvyčajne býva kladný, ale nie je to nutné) predstavuje maximálnu veľkosť výchylky, do akej sa kyvadlo dostáva. Veľkosť tohto uhla sa preto nazýva *amplitúda* kmitania. Často je praktické používať aj uhlovú frekvenciu kmitavého pohybu, ktorá je definovaná ako

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5}$$

Vyjadrenie (4) využijeme pri výpočte tiažového zrýchlenia g z experimentálne získaných hodnôt ℓ a T_0. Musíme však mať na pamäti, že riešenie (3) a perióda (4) sú platné len pre malé kmity. Kmity matematického kyvadla sú teda harmonické len vtedy, keď sú to malé kmity. Konkrétna hranica použiteľnosti tohto priblíženia závisí od presnosti, s akou chceme alebo sme schopní pracovať. V prípade, že výchylky nie sú malé, rovnicu (1) nedokážeme riešiť analyticky. Dá sa ale ukázať, že uhol vychýlenia bude vykonávať neharmonické periodické kmity, ktorých perióda T už bude závislá aj od počiatočnej výchylky, pričom túto závislosť môžeme vyjadriť približným vzťahom

$$T(\varphi_0) = T_0\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_0^2\right) \tag{6}$$

Zdôvodnenie tohto vzťahu tiež nájdete v doplnkovom dokumente k úlohe. Vidíme, že tento vzťah je v súlade s periódou harmonických kmitov (4), pretože $\lim_{\varphi_0\to 0} T(\varphi_0) = T_0$. Z vyjadrenia (6) vieme tiež ľahko určiť, akej chyby sa dopúšťame, keď používame menej presné vyjadrenie (4).

Pri pohybe kyvadla je potrebné rozlišovať pojmy *kmit* a *kyv*. Kmit je pohyb predstavujúci celú periódu, trvá teda dobu T. Kyv je pohyb zahŕňajúci len polovicu periódy, trvá teda dobu $T/2$.

Tlmené kmitanie. Vyššie uvedené rovnice a vzťahy nezahŕňajú vplyv odporu vzduchu a teda kyvadlo podľa nich má kmitať ideálne periodicky donekonečna. V laboratórnom prostredí sa však nevyhneme vplyvu odporu vzduchu, ktorý spôsobuje postupné utlmovanie až zánik kmitov. Pre tlmené kmity s malými výchylkami je možné odvodiť závislosť uhlovej výchylky od času v nasledovnom tvare

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{-\gamma t}\cos(\omega t) \tag{7}$$

[3] Kmitavý pohyb nazývame harmonickým vtedy, keď výchylka kmitajúceho objektu v závislosti od času je úmerná buď funkcii $\cos(\omega t+\alpha)$, alebo funkcii $\sin(\omega t+\alpha)$, kde ω je od času nezávislá konštanta (nazývaná aj uhlovou frekvenciou) a α je konštanta predstavujúca počiatočnú fázu.

kde γ je *koeficient útlmu* a

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{8}$$

je uhlová frekvencia tlmených kmitov, ktorá je zvyčajne nepatrne menšia, než by bola frekvencia netlmených kmitov.

Analytické riešenie platné pre veľké tlmené kmity uvádzať nebudeme, nakoľko by to bolo podstatne zložitejšie než pre malé tlmené kmity alebo pre veľké netlmené kmity. Meranie koeficientu útlmu v našom cvičení obmedzíme na kmity do vychýleni 20°, pri ktorých bude možné použiť vzťah (7) platný pre malé kmity.

Metódy meraní a princípy vyhodnotenia

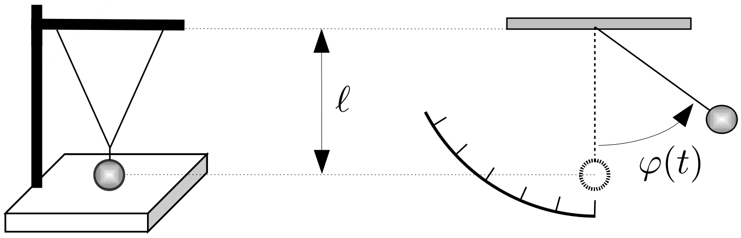
(A) Perióda malých kmitov a určenie tiažového zrýchlenia. Toto meranie uskutočníme tak, že kyvadlo necháme vykonávať malé kmity s amplitúdou okolo 5° a zmeriame ich periódu T_0. Kľúčovým vzťahom pre vyhodnotenie malých netlmených kmitov je rovnica (4). Z nej vyjadríme hľadané tiažové zrýchlenie nasledovne:

$$g = \ell \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 \tag{9}$$

(B) Meranie veľkých kmitov. Toto meranie tiež uskutočníme priamočiarym spôsobom. Keďže kmity kyvadla sú tlmené, amplitúda jeho výchyliek klesá s každým kyvom. Pritom však každé jednotlivé meranie v tejto časti má byť uskutočnené pri konkrétnej hodnote amplitúdy φ_0. Preto každé meranie musí trvať krátko, aby sa počas neho amplitúda nestihla významne meniť. Zabezpečíme to najlepšie tak, že pre danú počiatočnú výchylku (amplitúdu) zmeriame len jeden kyv. Vynásobením doby trvania kyvu dvoma dostaneme príslušnú periódu (dobu kmitu). Podobný postup nebol potrebný v časti (A), keďže pri malých kmitoch perióda prakticky nezávisela od amplitúdy, a teda zmena amplitúdy v dôsledku útlmu nám nevadila.

Pri vyhodnocovaní veľkých kmitov si uvedomíme, že závislosť periódy kyvadla od *štvorca* amplitúdy je lineárna (6). Preto ak zakreslíme namerané usporiadané dvojice (φ_0^2, T) do grafu, (kde na vodorovnej osi sú hodnoty φ_0^2 a na zvislej príslušné hodnoty T), tak by v ideálnom prípade mali ležať na priamke. Ak je to s dostatočnou presnosťou tak, teoretickú predpoveď (6) sme overili. Priesečník tejto priamky s osou y zodpovedá perióde nekonečne malých kmitov. Označíme si ho $T(0)$. Ak sme merali správne a aparatúra bola v poriadku, hodnota $T(0)$ by mala byť takmer rovná hodnote T_0 z merania malých kmitov v úlohe A.

(C) Meranie útlmu. Pri výbere metódy merania je potrebné zvažovať, či máme k dispozícii matematický aparát, ktorým je možné výsledky merania spracovať. V úlohách (A) a (B) bol tento aparát založený na rovniciach (4) a (6). V prípade tlmených kmitov máme k dispozícii riešenie (7), ktoré je platné len pre malé kmity. Preto je nutné meranie útlmu



Obr. 1: Vľavo: Bifilárny záves, na ktorom je guľôčka predstavujúca hmotný bod. Vpravo: Uhol vychýlenia predstavuje uhol medzi aktuálnou a zvislou polohou lanka pri pohľade z boku na bifilárny záves. V experimentálnej zostave v laboratóriu meradlo uhla výchylky pokrýva len ľavú stranu roviny kmitov, tak, ako je to znázornené na obrázku.

vykonať v režime malých kmitov[4], v praxi do cca 20°. Ak by sme meranie uskutočnili s veľkými kmitmi a na vyhodnotenie použili aparát platný pre malé kmity, získali by sme nesprávny výsledok (koeficient tlmenia), ako by sa dalo ľahko presvedčiť. Riešenie (7) využijeme tak, že pri meraní tlmených kmitov nájdeme dva časové okamihy t_1 a t_2, kedy výchylky dosahujú svoju amplitúdu (zakaždým na tej istej strane). V týchto okamihoch budú kosínusy v rovnici (7) rovné jednej a dostaneme jednoduché vyjadrenia $\varphi(t_1) = \varphi_0 e^{-\gamma t_1}$ a $\varphi(t_2) = \varphi_0 e^{-\gamma t_2}$. Ich podielom a následným zlogaritmovaním dostávame rovnicu, z ktorej sa potom jednoducho vyjadríme hľadaný koeficient útlmu v tvare

$$\gamma = \frac{\ln \dfrac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}}{t_2 - t_1} \tag{10}$$

Postup práce

Dĺžka závesu.

1.) Odmerajte dĺžku kyvadla ℓ, za ktorú pokladajte vzdialenosť od bodu nachádzajúceho sa v strede medzi úchytmi nití (bod A) až po stred guľôčky. Aby ste dosiahli presnosť 1 mm, je vhodné zvlášť zmerať priemer guľôčky D mikrometrom, a zvlášť kolmú vzdialenosť ℓ' od bodu A po horný okraj guľôčky a celkovú dĺžku potom vypočítať ako $\ell = \ell' + D/2$.

Perióda malých kmitov a určenie tiažového zrýchlenia.

2.) Na časomiere nastavte režim „manual štart-stop“ a prečítajte si príslušný návod na priloženom hárku, odsek **B**.

3.) Kyvadlo dajte do pohybu s počiatočnou amplitúdou $5° - 6°$. Zmerajte, ako dlho kyvadlu trvá „odkmitať“ 200 polperiód[5]. Výsledok zapíšte do tabuľky 1. Potom meranie zopakujte ešte aspoň raz a výsledok opäť zapíšte do tabuľky 1.

[4]Pre uhol $20° = 0{,}34907$ rad máme $\sin 0{,}34907 = 0{,}34202$, teda použitím priblíženia $\sin\varphi \approx \varphi$ vnesieme chybu na úrovni 1%.

[5]Pokusy ukazujú, že týmto spôsobom sa s danou aparatúrou dá získať presnejšia hodnota tiažového zrýchlenia, než iným spôsobom merania, pri ktorom by časomiera bola v režime „auto štart-stop“, a to aj keby sme započítali korekciu spôsobenú nenulovou dobou prechodu clony (ihly) cez fotosnímač.

Pomerne vysoký počet 200 polperiód je nevyhnutný na to, aby sme eliminovali chyby spôsobené nepresným spustením a zastavením stopiek. Táto chyba sa nedá dostatočne eliminovať tým, že by sme spravili

4.) Z priemernej hodnoty T_0 získanej z údajov tabuľky 1 vypočítajte tiažové zrýchlenie použitím vzťahu (9); ide teda o zrýchlenie získané z merania malých kmitov. (Toto vyhodnotenie môžete spraviť aj neskôr.)

Meranie veľkých kmitov.

5.) Časomieru nastavte do režimu „auto štart-stop“ a prečítajte si príslušný návod na priloženom hárku, odsek **A**.

6.) Nastavte kyvadlu počiatočnú výchylku 10° a zmerajte dobu kyvu (t.j. polperiódu). Toto zopakujte 6 krát s tým, že polovica meraní bude zaznamenávať prechod kyvadla na pravej strane od rovnovážnej polohy a druhá polovica zasa prechod na ľavej strane od rovnovážnej polohy. Týmto eliminujete prípadné nepresné umiestnenie snímača časomiery. Údaje zapisujte do tabuľky 2.

7.) Merania z predošlého bodu spravte aj pre počiatočné výchylky 20°, 30°, 40°, 50°.

8.) Dopočítajte údaje v tabuľke 2 a nakreslite graf závislosti $T(\varphi_0^2)$. S uhlami pracujte v radiánoch. (Pozri podrobné inštrukcie v samostatnom odseku nižšie.) Pomocou lineárnej regresie určite extrapolovanú hodnotu T pre $\varphi_0 \to 0$. Aj tieto vyhodnotenia môžete spraviť neskôr.

Meranie útlmu.

9.) Časomieru nastavte do režim „manual štart-stop“ podľa odseku **B**.

10.) Nastavte počiatočnú výchylku kyvadla na 20°. Kyvadlo uvoľnite a pri prvom prechode rovnovážnou polohou spustite časomieru tlačítkom START. To je okamih t_1, ktorému je najjednoduchšie priradiť hodnotu 0 s. Sledujte, ako sa kmitavý pohyb utlmuje a keď amplitúda klesne na 10°, zastavte časomieru tlačítkom STOP (okamih t_2). Výsledný čas zapíšte do tabuľky 3. Meranie zopakujte ešte aspoň raz a opäť zapisujte do tabuľky 3.

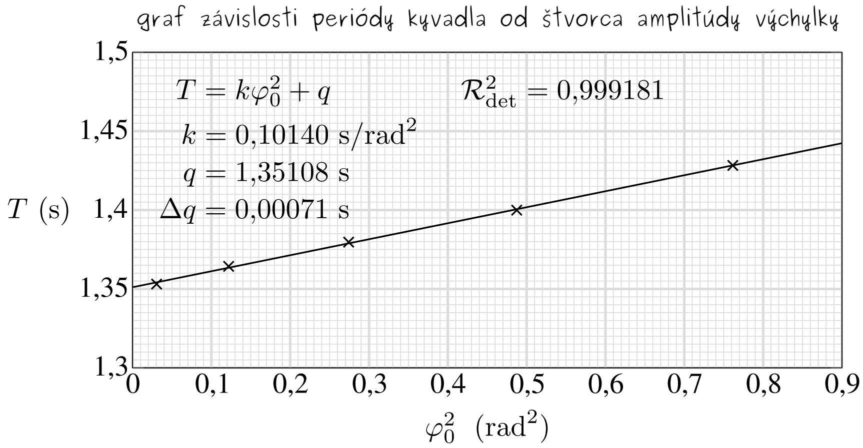
11.) Vypočítajte priemernú hodnotu doby $t_2 - t_1$, ktorá bola potrebná na utlmenie pohybu kyvadla z amplitúdy 20° na 10° a vypočítajte koeficient tlmenia podľa vzťahu (10).

Inštrukcie na zostrojenie grafu

K protokolu pripojte graf závislosti periódy kmitov od druhej mocniny amplitúdy a príslušné popisky. Graf nakreslite ručne na milimetrový papier. Namerané hodnoty zaznačujte napr. krížikmi a pravítkom preložte priamku v súlade s výsledkami lineárnej regresie. Do grafu zapíšte modelovú rovnicu $T = k\varphi_0^2 + q$, ktorá je prepisom rovnice (6) a je teda zrejmé, že priesečník priamky s osou y je hľadanou periódou malých kmitov[6]: $T(0) = q$.

viac meraní s menším počtom polperiód (napr. 8×50 polperiód), pretože je to z veľkej časti systematická chyba spôsobená oneskoreným reakčným časom. Namiesto merania 8×50 kyvov je preto výhodnejšie spraviť meranie 2×200 kyvov.

[6]Ako je vidieť z porovnania modelovej rovnice s rovnicou (6), platí aj vzťah $T(0)/16 = k$. To znamená, že hľadanú hodnotu $T(0)$ by sme mohli určiť aj zo smernice k. Ako sa môžme presvedčiť, tento spôsob dáva omnoho menej presnú hodnotu, čo vyplýva zo samotnej povahy takého alternatívneho postupu.



Obr. 2: Ukážka, čo má obsahovať a ako má byť vypracovaný graf v úlohe Matematické kyvadlo. Keďže číselné údaje v grafe sú predbežného charakteru, je potrebné ich uvádzať na vyšší počet platných číslic. (Použite však vaše vlastné údaje!) Hlavné výsledky v protokole treba potom vhodne zaokrúhliť. V podobnom zmysle je potrebné vypracovávať grafy aj vo väčšine iných úloh.

Do grafu zapíšte hodnotu q, jej smerodajnú odchýlku[7] Δq, hodnotu smernice k a koeficient determinovanosti $\mathcal{R}^2_{\mathrm{det}}$. Hodnoty q, k v grafe uvádzame na aspoň 4 platné číslice. Hodnotu Δq na aspoň 2 platné číslice. Hodnotu $\mathcal{R}^2_{\mathrm{det}}$ píšte na toľko desatinných miest, aby aspoň posledné dve boli odlišné od číslice 9.

Presnosť merania

Pre odhad neistoty meriania tiažového zrýchlenia vychádzame zo vzťahu (9). Predpokladajme, že dĺžku ℓ vieme odmerať s neistotou $\Delta\ell$. Potom v dôsledku tejto neurčitosti je odhad neistoty g rovný

$$\Delta g_\ell = \left|\frac{\partial g}{\partial \ell}\right| \Delta\ell = \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \Delta\ell = g\frac{\Delta\ell}{\ell} \tag{11}$$

Podobne, ak periódu malých kmitov T_0 dokážeme určiť s neistotou ΔT_0, potom toto prispeje k neistote určenia g nasledovným spôsobom:

$$\Delta g_{T_0} = \left|\frac{\partial g}{\partial T_0}\right| \Delta T_0 = \left(\frac{8\pi^2\ell}{T_0^3}\right)^2 \Delta T_0 = 2g\frac{\Delta T_0}{T_0} \tag{12}$$

Pre odhad celkovej smerodajnej odchýlky použijeme hodnotu získanú podľa štandardných pravidiel skladania náhodných odchýlok:

$$\Delta g = \sqrt{(\Delta g_\ell)^2 + (\Delta g_{T_0})^2} \tag{13}$$

Predpokladáme, že neistota určenia dĺžky lanka ($\Delta\ell$) je 3 mm (presnosť dĺžkového meradla a neistota v určení polohy ťažiska kyvadla). Neistotu určenia periódy (ΔT_0) môžeme odhadnúť z rozptylu meraných hodnôt v tabuľke 1.

[7] Δ, vyslovovať delta, je tlačená forma zápisu príslušného gréckeho písmena. Smerodajné odchýlky by sa štandardne mali značiť pomocou symbolu s, napr. s_{g_ℓ}, $s_{g_{T_0}}$. Pre zjavnú nepraktickosť zápisov s trojnásobným vrstvením indexov radšej v tejto úlohe uprednostníme značenie pomocou symbolu Δ.

Meno: Krúžok: Dátum merania:

Protokol laboratórnej úlohy č. 4

Matematické kyvadlo

Stručný opis metódy merania

Vzťahy, ktoré sa používajú pri meraní

Prístroje a pomôcky

Záznam merania, výpočty a výsledky

Určenie dĺžky závesu matematického kyvadla:

$\ell' =$ $D =$

$\ell = \ell' + D/2 =$

(A) Perióda malých kmitov a určenie tiažového zrýchlenia

Tabuľka 1: Meranie vykonajte aspoň dva krát. Údaje v tabuľke nezaokrúhľujte. Priemerné T_0 uveďte na aspoň 5 platných číslic. Stopky nastavte podla odseku B na priloženom hárku.

i	1	2	3	T_0 priemerné (s)
$200\ T_0/2$ (s)				

$$g = \ell \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 =$$

$$\Delta g = \sqrt{(\Delta g_\ell)^2 + (\Delta g_{T_0})^2} =$$

(B) Meranie veľkých kmitov

Tabuľka 2: Merané údaje nezaokrúhľujte. Hodnoty φ_0^2 uvádzajte na aspoň 4 platné číslice, priemerné T na aspoň 5 platných číslic. Stopky nastavte podla odseku A.

φ_0	φ_0^2	$T/2$ (s) – vpravo			$T/2$ (s) – vľavo			priemer
(°)	(rad^2)	1	2	3	4	5	6	T (s)
10								
20								
30								
40								
50								

Uveďte príklad výpočtu φ_0^2 v jednotkách rad^2:

Extrapolovaná hodnota získaná lineárnou regresiou: $T(0) =$

Odhad neistoty (smerodajná odchýlka z regresie): $\Delta T(0) =$

(C) Meranie útlmu

Tabuľka 3: Meranie vykonajte aspoň dva krát. Odporúčané parametre merania sú $t_1 = 0\,\mathrm{s}$, $\varphi(t_1) = 20°$, $\varphi(t_2) = 10°$. Stopky nastavte podla odseku B.

$t_1 =$ $\varphi(t_1) =$ $\varphi(t_2) =$

i	1	2	3	$t_2 - t_1$ priemerné (s)
$t_2 - t_1$ (s)				

$$\gamma = \frac{\ln \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_2)}}{t_2 - t_1} =$$

Prílohy

- graf závislosti T od φ_0^2

Zhodnotenie výsledkov

Dátum odovzdania protokolu:

Podpis študenta: **Hodnotenie a podpis učiteľa:**