Rotácie súradnicových sústav. Kolotoč

Martin Konôpka

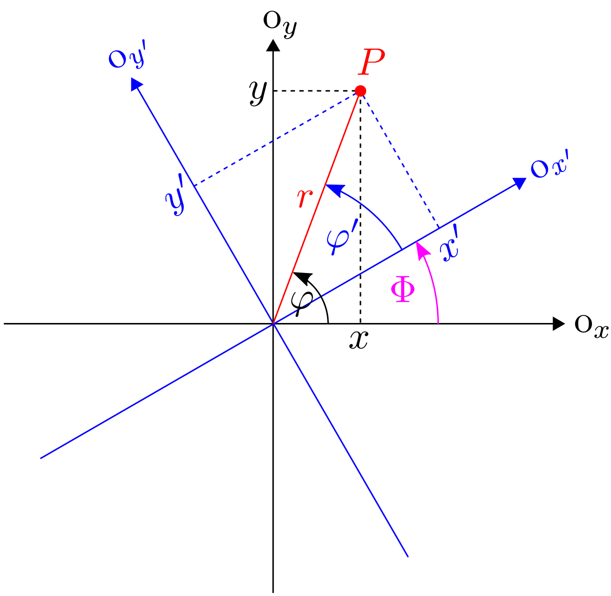
Oddelenie fyziky, ÚJFI, FEI STU v Bratislave, martin.konopka@stuba.sk

18. marca 2023

Úloha 1: Transformácia zložiek vektora pri rovinnej rotácií súradnicovej sústavy

Nech polohový vektor istého bodu P v priestore má vzhľadom na súradnicovú sústavu S zložky x, y. Aké zložky má v sústave S', ktorá je oproti S pootočená okolo osi z o uhol Φ? Ľahko sa to dá odvodiť, keď si zapíšeme karteziánske súradnice tohto bodu pomocou polárnych, a to tak v sústave S ako aj v S':

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \qquad & x' &= r\cos\varphi' \\
y &= r\sin\varphi \qquad & y' &= r\sin\varphi'
\end{aligned}
\tag{1}
$$



Obr. 1: Navzájom natočené súradnicové sústavy a bod v nich. Používa sa aj fráza *rovinná rotácia súradnicovej sústavy.*

Ešte si uvedomíme, že platí

$$\varphi' = \varphi - \Phi \tag{2}$$

a jednoduchými výpočtami s využitím niektorých goniometrických vzťahov dostaneme súradnice v pootočenej sústave:

$$x' = x \cos\Phi + y \sin\Phi \tag{3a}$$
$$y' = -x \sin\Phi + y \cos\Phi \tag{3b}$$

V maticovo-vektorovom zápise

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi \\ -\sin\Phi & \cos\Phi \end{pmatrix}}_{R} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4}$$

Matica R je reálna a spĺňa podmienku

$$RR^{\mathrm{T}} = I \tag{5}$$

kde I je jednotková matica 2×2. Preto je R *ortogonálnou maticou.* Aj všeobecne by sa dalo dokázať, že každá rotácia transformuje karteziánske súradnice ortogonálnou transformáciou. Ešte poznamenajme, že v práve vyriešenom príklade ide o tzv. *pasívnu* rotáciu, t. j. takú, pri ktorej sa otáča súradnicová sústava, a bod zostáva na svojom mieste. Keby sme namiesto otáčania súradnicovej sústavy hýbali bodom, šlo by o *aktívnu* (nazývanú aj fyzikálnu) rotáciu.

Toto bola prototypická úloha, úplne základná, akú treba vedieť vyriešiť, ak chceme rozumieť popisu rotácií súradnicových sústav alebo aj telies. Takéto rotácie sa hojne vyskytujú v technických, vedeckých, leteckých, kozmických aj vojenských disciplínach a aplikáciách, napr. aj v rôznych simulátoroch, a samozrejme aj v počítačových hrách, v ktorých sa narába s priestorom a s otáčavými pohybmi. Zároveň to bol pomerne jednoduchý príklad, ktorý nám poslúžil aj ako rozcvička pred ďalšou úlohou, ktorá už bude zložitejšia.

Úloha 2: Kolotoč

Predstavme si kolotoč, ktorý má veľké koleso a na ňom umiestnené sedačky. Chceli by sme takýto kolotoč vizualizovať na scéne počítačovej hry. Polomer kolesa kolotoča nech je ρ. Koleso kolotoča je upevnené na tyči dĺžky ℓ. Táto tyč sa môže aj nakláňať a vždy je pritom kolmá na rovinu kolesa a prechádza stredom kolesa. Koleso sa teda točí v rovine kolmej na tyč. Niekto stlačí gombík a kolotoč sa začne roztáčať. Uhlovú rýchlosť $\omega(t)$ jeho otáčania okolo tej tyče považujte za danú funkciu času.[1] Pomyselne sledujte niektorú zo sedačiek. **Určte, ako sa v čase menia jej súradnice x, y, z.** Pre konkrétnosť nech sú to súradnice bodu, kde je sedačka pripevnená o koleso.[2] **Určte aj, ako sa v čase mení rýchlosť a zrýchlenie zvoleného bodu**.[3]

Výsledky vyjadrite vzhľadom na súradnicovú sústavu S, ktorej počiatok je v mieste, kde je päta kolotoča (teda v mieste na úrovni dlažby, o ktoré sa opiera spodný koniec tyče). Os z nech ide kolmo nahor od zeme. Osi x a y teda ležia v rovine dlažby. Nech sú rovnobežné s okrajmi vydláždenej plochy (aby bola tá vzťažná sústava jednoznačne definovaná). V čase nula, t. j. v okamihu, keď sa kolotoč rozbieha, nech je uhlová poloha sedačky rovná φ_0.

(a) Predpokladajte, že v časovom intervale $\langle 0, t_1 \rangle$ je tyč kolmá na dlažbu a vyriešte úlohu pre tento časový interval.

Riešenie:

$$\boxed{x(t) = \rho \cos\varphi(t)}\,, \qquad \boxed{y(t) = \rho \sin\varphi(t)}\,, \qquad \boxed{z(t) = \ell} \tag{6}$$

kde

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega(t')\,\mathrm{d}t' \tag{7}$$

Konkrétny priebeh $\omega(t)$ nemáme daný, tak to takto nechajme a budeme mať všeobecne použiteľné formuly. Karteziánske zložky rýchlosti určíme derivovaním:

$$\boxed{v_x(t) = -\rho\omega \sin\varphi}\,, \qquad \boxed{v_y(t) = \rho\omega\cos\varphi}\,, \qquad \boxed{v_z(t) = 0 = \text{konšt}} \tag{8}$$

a dali by sa zapísať aj pomocou súradníc x, y. Veľkosť rýchlosti by sme mohli určiť Pytagorovou vetou, ale priamo z prednášky vieme, že je $v(t) = \rho|\omega(t)|$. Aj karteziánske zložky zrýchlenia by sme mohli zobrať priamo z prednášky, ale môžeme si ich vypočítať tu znova a trochu iným spôsobom:

$$\begin{aligned} &a_x = \dot{v}_x = -\rho\dot{\omega}\sin\varphi - \rho\omega\dot{\varphi}\cos\varphi \\ &\text{atď} \end{aligned} \tag{9}$$

[1] Môže nadobúdať aj záporné hodnoty.

[2] Rozumie sa, že to môže byť aj hociktoré iné miesto kolesa, lebo na to, aby sme ho v počítačovej hre zvizualizovali, potrebujeme poznať súradnice nielen jedného jeho bodu. Keď si vyberieme len jeden, ale všeobecný bod x, y, z a vyriešime úlohu preň, bude vlastne vyriešená pre celé koleso.

[3] Najmä zrýchlenie je pri kolotočí dôležité, lebo nesmie presiahnuť interval zdraviu bezpečných hodnôt.

(b) Predpokladajte, že v časovom intervale $\langle t_2, t_3 \rangle$ je tyč voči dlažbe naklonená o pevný uhol θ a jej ***azimutálny uhol ϕ*** nech je tiež pevný a nulový, teda tyč ja naklonená nad kladný smer osi x. Uhol $\boldsymbol{\theta}$ sa v danom kontexte nazýva ***polárny uhol***.[4] Keby nebolo dlažby, tak by mohol nadobúdať hodnoty z intervalu až $\langle 0, \pi \rangle$. Časový priebeh $\omega(t)$ opäť pokladajte za známy, aj začiatočnú hodnotu uhla pre tento interval; označme ju φ_2. Vyriešte úlohu z úvodu zadania pre časový interval $\langle t_2, t_3 \rangle$.

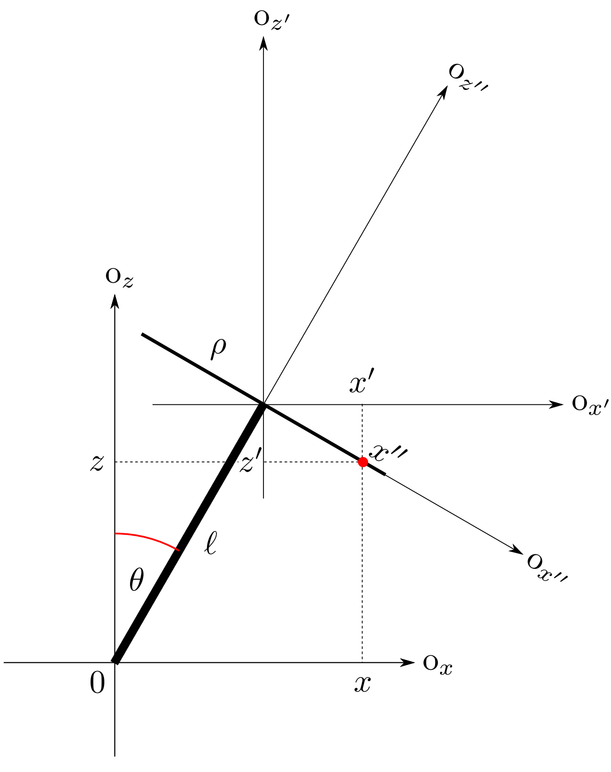
Riešenie: V naklonenej súradnicovej sústave S'', ktorá má stred v strede kolotočového kruhu, ale neotáča sa, má sledovaný bod sedačky súradnice

$$x''(t) = \rho \cos \varphi(t)\,, \qquad y''(t) = \rho \sin \varphi(t)\,, \qquad z''(t) = 0 \tag{10}$$

kde $\varphi(t)$ je vyjadrené formulou (7). V nenaklonenej vzťažnej sústave S', ktorá má počiatok tiež v strede kolotočového kruhu, má uvažovaný bod súradnice

$$\begin{aligned} x'(t) &= \quad x''(t) \cos \theta + z''(t) \sin \theta \\ y'(t) &= \quad y''(t) \\ z'(t) &= -x''(t) \sin \theta + z''(t) \cos \theta \end{aligned} \tag{11}$$

[4] Znaky ϑ, θ a Θ sú tri rôzne spôsoby písania gréckeho písmena, ktoré vyslovujeme „theta“. Podobne zasa znaky φ, ϕ a Φ sú tri rôzne spôsoby písania gréckeho písmena, ktoré vyslovujeme „fí“.



Dá sa to zistiť aj priamou úvahou, ale aj použitím a vhodným prispôsobením výsledku (3) predošlého príkladu. Nulovosť súradnice z'' robí aj priamu úvahu jednoduchou.

Aby sme vypočítali súradnice (x, y, z) vzhľadom na našu referenčnú súradnicovú sústavu S, treba už len spraviť posunutie (transláciu). Počiatok oboch tých zdvihnutých súradnicových sústav má voči referenčnej súradnice

$$X = \ell \sin\theta \cos\phi \,, \qquad Y = \ell \sin\theta \sin\phi \,, \qquad Z = \ell \cos\theta \tag{12}$$

(dobre známe transformačné formuly medzi sférickými a karteziánskymi súradnicami). Translačná transformácia teda je

$$x = X + x' \,, \qquad y = Y + y' \,, \qquad z = Z + z' \tag{13}$$

Nezabúdajme, že súradnice označené malými písmenami sú časovo závislé. X, Y, Z sú zložky konštantného translačného vektora, ktorý by sme mohli označiť napr. $\vec{T}$.

Teraz to treba ešte všetko pospájať (podosadzovať), ak teda by sme chceli analytické formuly. Pre výpočet rýchlosti treba súradnice derivovať, a ešte raz pre výpočet zrýchlenia. Výsledky môžu byť doosť zdĺhavé.

Úloha by sa dala ešte skomplikovať napr. tak, že tyč kolotoča by konala nejaký precesný pohyb a aj uhol jej náklonu by sa mohol meniť.