Žiarenie bodového náboja

spracoval Martin Konôpka

posledná aktualizácia: 15. mája 2013

1 Polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ od bodového náboja – pripomenutie

Vyjdeme zo vzťahov pre polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$, ktoré sme si odvodili minule, a ktoré sú v skriptách [1] uvedené ako formuly (18.14a) a (18.14b):

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{\left(R - \frac{\vec{R}\,.\,\vec{u}}{v}\right)^3} \left\{ \left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)\left(\vec{R} - R\frac{\vec{u}}{v}\right) + \frac{1}{v^2}\vec{R} \times \left[\left(\vec{R} - R\frac{\vec{u}}{v}\right) \times \vec{a}\right]\right\} \tag{1}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{v}\frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} \tag{2}$$

kde

$$\vec{a} = \vec{a}(t') = \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{z}}{\mathrm{d}t'^2} \tag{3}$$

pričom $\vec{z} = \vec{z}(t')$ je poloha náboja v retardovanom čase t'. Pripomeňme aj, že

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}, t)\,, \qquad \vec{B} = \vec{B}(\vec{x}, t)\,, \qquad \vec{R} = \vec{R}(t') = \vec{x} - \vec{z}(t')\,, \qquad t' = t - \frac{R}{v} \tag{4}$$

Vyjadrenia (1) a (2) platia pre homogénne izotropné bezstratové prostredia za podmienky, že *rýchlosť pohybu* náboja $\vec{u}$ má veľkosť stále *menšiu, než je rýchlosť šírenia sa vĺn*,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{5}$$

v danom prostredí. Za daných podmienok sú výsledky (1) a (2) v rámci klasickej (teda nie kvantovej) elektrodynamiky úplne presné.

Bude praktické zaviesť si jednotkový vektor

$$\vec{n} = \frac{\vec{R}}{R} \tag{6}$$

označujúci smer od náboja v retardovanom čase t' k miestu pozorovania. Potom vyššie uvedené polia budú vyjadrené praktickejšími formulami

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon R^2} \frac{\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)\left(\vec{n} - \frac{\vec{u}}{v}\right)}{\left(1 - \frac{\vec{n}\,.\,\vec{u}}{v}\right)^3} + \frac{q}{4\pi\epsilon R} \frac{\frac{1}{v^2}\,\vec{n} \times \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{u}}{v}\right) \times \vec{a}\right]}{\left(1 - \frac{\vec{n}\,.\,\vec{u}}{v}\right)^3}} \tag{7}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{v}\,\vec{n} \times \vec{E}} \tag{8}$$

2 Ďaleké pole (žiarenie) nerelativistického bodového náboja

2.1 Elektrické pole, Poyntingov vektor, smerový výkon, Larmorova formula

Uvažujme teraz len tú zložku elektrického poľa, ktorá vo veľkých vzdialenostiach od zdroja klesá nepriamo úmerne prvej mocnine vzdialenosti. Je to zložka závisiaca od zrýchlenia náboja. Len táto zložka poľa odnáša energiu preč ďaleko od zdroja vďaka šíreniu EM vĺn. Pre nerelativistické rýchlosti, čiže

$$\frac{u}{v} \ll 1$$

a pre veľké vzdialenosti od náboja sa nám výrazy (7), (8) pre polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$ mimoriadne zjednodušia:

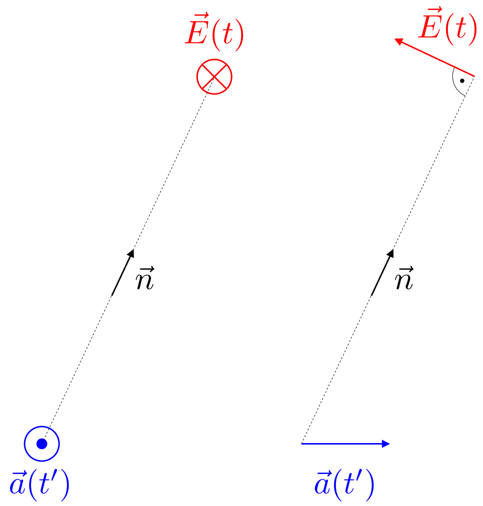
$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon v^2 R}\, \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{a})} \tag{9}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{v}\, \vec{n} \times \vec{E}} \tag{10}$$

Keďže polia pozorujeme ďaleko, vektor $\vec{n} = \vec{n}(t')$ a aj vzdialenosť $R = R(t')$ môžeme považovať prakticky za konštanty a nemusíme sa teda starať ani o to, že v presných vzorcoch vystupujú v retardovanom čase. $\vec{E}$ sa dá prepísať aj do tvaru

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon v^2 R}\, [\vec{n}(\vec{n}\,.\,\vec{a}) - \vec{a}]} \tag{11}$$

ale na určenie smeru a orientácie vektora $\vec{E}$ je oveľa vhodnejšie vyjadrenie (9). Pozri obrázok. Zíde sa



Obr. 1: Dve ukážky možných vzájomných smerov a orientácií vektorov zrýchlenia náboja a generovaného elektrického poľa. Pre správne pochopenie je nutné si uvedomiť, že vektory $\vec{a}(t')$ a príslušný $\vec{E}(t)$ sú zobrazené v dvoch rôznych časoch: zrýchlenie v retardovanom čase t', teda v momentne vzniku žiarenia, zatiaľ čo elektrické pole je zobrazené také, aké sa javí v momente pozorovania t vo zvolenom bode priestoru. Jednotkové vektory $\vec{n}$ sú v presných formulách brané v retardovanom čase, ale zvyčajne to pri skúmaní ďalekého poľa v nerelativistickom prípade nie je dôležité, keďže pri pohľade z veľkej diaľky sa pohyb náboja deje len na malom uhlovom výseku priestoru.

nám vypočítať veľkosť, alebo praktickejšie druhú mocninu vektora v hranatej zátvorke:

$$[\vec{n}(\vec{n}\,.\,\vec{a}) - \vec{a}]\,.\,[\vec{n}(\vec{n}\,.\,\vec{a}) - \vec{a}] \;=\; a^2 - (\vec{n}\,.\,\vec{a})^2 \;=\; a^2 \sin^2\alpha \tag{12}$$

kde

$$\boxed{\alpha = \alpha(t') = \quad \text{uhol medzi vektorom zrýchlenia } \vec{a}(t') \text{ a smerom pozorovania } \vec{n} = \vec{n}(t')} \tag{13}$$

Preto veľkosť vyžarovaného elektrického poľa je

$$E = \frac{|q| a \sin\alpha}{4\pi\epsilon v^2 R} \tag{14}$$

(Uvažovaný uhol má vždy nezáporný sínus.)

Počítajme teraz hustotu toku energie žiarenia, čiže Poyntingov vektor

$$\vec{P}_{\mathrm{Po}} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu v}\,\vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{\mu v}\,E^2\,\vec{n} \tag{15}$$

Energia teda prúdi v smere od zdroja, v súlade s intuíciou. Hustota jej toku je úmerná druhej mocnine elektrického poľa. Dosaďme teraz za E podľa (14). Dostávame

$$\vec{P}_{\mathrm{Po}} \;=\; \frac{1}{\mu v}\,\frac{q^2}{(4\pi\epsilon)^2}\frac{a^2\sin^2\alpha}{(v^2 R)^2}\,\vec{n} \;=\; \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\,\left(\frac{qa}{4\pi\epsilon v^2}\right)^2\,\frac{\sin^2\alpha}{R^2}\,\vec{n} \;=\; \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{\sin^2\alpha}{4\pi v R^2}\,\left(\frac{a}{v}\right)^2\,\vec{n} \tag{16}$$

Pri vektore $\vec{n} = \vec{n}(t')$ sa za daných podmienok nemusíme starať o to, že je v retardovanom čase, pretože je tak či onak prakticky konštantný. Pri uhle $\alpha = \alpha(t')$ môže však aj pri ďalekom poli byť dôležité, v akom čase ho berieme.[1] Samotné zrýchlenie je samozrejme tiež v retardovanom čase: $\vec{a} = \vec{a}(t')$.

Počítajme teraz výkon vyžiarený do priestorového uhla $\mathrm{d}\Omega$. Máme

$$\mathrm{d}\Omega = \frac{\mathrm{d}S}{R^2}$$

pričom

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$$

Preto

$$\mathrm{d}P = \vec{P}_{\mathrm{Po}}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = P_{\mathrm{Po}}\,\mathrm{d}S = P_{\mathrm{Po}}\,R^2\mathrm{d}\Omega = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{\sin^2\alpha}{4\pi v}\,\left(\frac{a}{v}\right)^2\,\mathrm{d}\Omega$$

Vzdialenosť nám teda do tohto vyjadrenia nevstupuje. To je fyzikálne mimoriadne dôležité, totiž že tá energia sa ozaj šíri donekonečna, že jej *výkon* na priestorový uhol neklesá so vzdialenosťou:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{\sin^2\alpha}{4\pi v}\,\left(\frac{a}{v}\right)^2} \tag{17}$$

Nezabúdajme, že $a = a(t')$ a $\alpha = \alpha(t')$.

Samozrejme nás musí zaujímať aj výkon vyžiarený do celého priestorového uhla. Predstavme si teda guľový povrch s polomerom R opísaný okolo skúmaného bodového náboja vo veľkej vzdialenosti od neho. Aká energia za jednotku času prejde touto plochou? Bude to výkon

$$P(t) = \oint_S \vec{P}_{\mathrm{Po}}(t)\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{a^2(t')}{4\pi v^3}\,\int_0^{4\pi} \sin^2\alpha(t')\,\mathrm{d}\Omega \tag{18}$$

Je to okamžitý výkon. Býva často praktické ustredniť ho cez čas, čo v konkrétnejšom prípade neskôr aj urobíme. Zatiaľ však počítajme to, čo máme. Priestorový uhol Ω zodpovedajúci rovinnému „poluhlu“ α sa vyjadruje vzťahom

$$\Omega(\alpha) = 2\pi(1-\cos\alpha) \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}\Omega = 2\pi\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha \tag{19}$$

Preto

$$\int_0^{4\pi}\sin^2\alpha\,\mathrm{d}\Omega = 2\pi\int_0^{\pi}\sin^3\alpha\,\mathrm{d}\alpha \tag{20}$$

[1] Stačí si predstaviť náboj pohybujúci sa po kružnici. Ale sú samozrejme aj dôležité situácie, keď je uhol α konštantný; napr. keď náboj kmitá po úsečke.

Pomocou rozkladu $\sin^3 \alpha = (\sin \alpha)(1 - \cos^2 \alpha)$ a následnej substitúcie $\cos \alpha = s$ zistíme, že

$$\int \sin^3 \alpha \, \mathrm{d}\alpha = -\cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha + C$$

a

$$\int_0^\pi \sin^3 \alpha \, \mathrm{d}\alpha = \frac{4}{3}$$

Môžeme písať [pozri (20)]

$$\int_0^{4\pi} \sin^2 \alpha \, \mathrm{d}\Omega = \frac{8\pi}{3} \tag{21}$$

Tak dostávame celkový okamžitý výkon žiarenia:

$$\boxed{P(t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon} \frac{2}{3v} \left[\frac{a(t')}{v}\right]^2} \tag{22}$$

Tento mimoriadne dôležitý výsledok sa volá *Larmorova formula.* Netreba zabúdať, že časy t' a t nie sú tie isté:

$$t' = t - \frac{R}{v} \tag{23}$$

je retardovaný čas.

2.2 Súvis Larmorovej formuly a žiarenia dipólu

Tento súvis je veľmi tesný a ide o takmer tie isté výsledky. Uvažujme dva bodové náboje q_+ a q_-, na ktoré sa môžeme pozerať ako na dipól. Teda $q_+ = |q_-| = Q$. Nech sa pohybujú po trajektóriách $\vec{z}_\pm(t)$. Aké bude ďaleké pole od týchto dvoch nábojov? Bude superpozíciou polí od jednotlivých nábojov:

$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \tag{24}$$

Za stanovených okolností (ešte upresníme) sú vektory $\vec{R}_+$ a $\vec{R}_-$ od nábojov ku miestu pozorovania prakticky totožné, teda $\vec{R}_+ = \vec{R}_- = \vec{R}$. Samozrejme potom platí aj $\vec{n}_+ = \vec{n}_- = \vec{n}$. Pole generované jedným z nábojov je dané výrazom (11). Preto pole od dipólu vyjadríme ako

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon v^2 R} \left\{\vec{n}[\vec{n} \,.\, (\vec{a}_+ - \vec{a}_-)] - (\vec{a}_+ - \vec{a}_-)\right\} \tag{25}$$

Teraz to upresnenie podmienok platnosti: Predstavme si na chvíľu, že dané náboje vykonávajú kmitavý pohyb s istou uhlovou frekvenciou ω (typická situácia). Potom aby vyššie napísaný výraz pre $\vec{E}$ platil, musia sa vlnenia od oboch nábojov v mieste pozorovania $\vec{x}$ v čase t skladať zhruba s takým istým rozdielom fáz, aké majú v mieste a čase t' vzniku žiarenia. Aby tomu tak bolo, veľkosť dipólu (rozmery zdroja) musí byť omnoho menšia než je vlnová dĺžka žiarenia. Dalo by sa to samozrejme formulovať aj všeobecnejšie. Nazýva sa to *dlhovlnné priblíženie* a zvyčajne sa s ním stretávame ako s jedným z krokov potrebných k dipólovému priblíženiu pre vyžarovaný výkon.

Zaveďme si iné súradnice na popis polôh nábojov:

$$\vec{Z} = \frac{1}{2} (\vec{z}_+ + \vec{z}_-) \,, \qquad \vec{z}_\mathrm{d} = \vec{z}_+ - \vec{z}_- \tag{26}$$

Potom

$$\vec{z}_+ = \vec{Z} + \frac{1}{2}\vec{z}_\mathrm{d} \,, \qquad \vec{z}_- = \vec{Z} - \frac{1}{2}\vec{z}_\mathrm{d} \tag{27}$$

Prepíšme

$$\vec{a}_+ - \vec{a}_- = \ddot{\vec{z}}_+ - \ddot{\vec{z}}_- = \ddot{\vec{z}}_\mathrm{d} \equiv \vec{a}_\mathrm{d}$$

a dostávame

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon v^2 R}\,[\vec{n}(\vec{n}\,.\,\vec{a}_{\rm d}) - \vec{a}_{\rm d}] \tag{28}$$

čo je výraz formou taký istý ako (11). Preto môžeme napísať rovno aj výraz pre vyžarovaný výkon do priestorového uhla, podobne ako pre bodový náboj [pozri formulu (17)]:

$$\frac{{\rm d}P^{\rm dip}(t)}{{\rm d}\Omega} = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{\sin^2\alpha_{\rm d}}{4\pi v}\,\left(\frac{a_{\rm d}}{v}\right)^2 \tag{29}$$

kde $\alpha_d = \alpha_d(t') = \angle[\vec{a}_{\rm d}(t'), \vec{n}]$ je uhol medzi smerom dipólu a smerom pozorovania. Nakoniec aj celkový výkon vyžarovaný dipólom:

$$P^{\rm dip}(t) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{2}{3v}\left[\frac{a_{\rm d}(t')}{v}\right]^2 \tag{30}$$

Vektor $\vec{z}_{\rm d}$ násobený nábojom Q dáva dipólový moment:

$$\vec{d} = Q\,\vec{z}_{\rm d} \tag{31}$$

Práve napísané vzorce pre diferenciálny a celkový výkon preto môžeme prepísať do tvarov

$$\boxed{\frac{{\rm d}P^{\rm dip}(t)}{{\rm d}\Omega} = \frac{1}{4\pi\epsilon}\,\frac{\sin^2\alpha_{\rm d}}{4\pi v}\left(\frac{\ddot{\vec{d}}}{v}\right)^2} \tag{32}$$

a

$$\boxed{P^{\rm dip}(t) = \frac{1}{4\pi\epsilon}\,\frac{2}{3v}\left[\frac{\ddot{\vec{d}}(t')}{v}\right]^2} \tag{33}$$

Neprekvapuje nás, že majú veľmi podobnú formu ako príslušné formuly (17) a (22) pre bodový náboj. Ale treba mať na pamäti, že formula (33) pre celkový výkon vyžarovaný dipólom bola odvodená aj použitím dlhovlnného priblíženia, zatiaľ čo Larmorova formula (pre bodový náboj) žiadne také priblíženie nevyžadovala.

2.3 Príklad: Lineárny harmonický pohyb náboja

V časti 2.1 sme uvažovali takmer všeobecný zrýchlený pohyb bodového náboja. Jediným obmedzením bolo, že šlo o nerelativistický pohyb. Teraz budeme uvažovať síce veľmi špeciálny, ale mimoriadne dôležitý a častý prípad pohybu – harmonické oscilácie po úsečke:

$$\vec{z}(t') = \vec{z}_0\cos(\omega t') \quad\Longrightarrow\quad \vec{u}(t') = -\omega\vec{z}_0\sin(\omega t') \quad\Longrightarrow\quad \vec{a}(t') = -\omega^2\vec{z}_0\cos(\omega t') \tag{34}$$

Dosaďme toto zrýchlenie do formuly (17). Dostávame diferenciálny výkon

$$\boxed{\frac{{\rm d}P(t)}{{\rm d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{z_0^2\omega^4}{4\pi v^3}\,\sin^2\alpha\,\cos^2\omega t'} \tag{35}$$

Zaujímavým faktorom je tam štvrtá mocnina uhlovej frekvencie oscilácií a samozrejme aj uhlové rozdelenie vyžarovaného výkonu, ale to sme už mali aj skorej. V praxi nás zvyčajne zaujíma časovo ustrednená hodnota

$$\frac{{\rm d}P}{{\rm d}\Omega} = \overline{\frac{{\rm d}P(t)}{{\rm d}\Omega}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{{\rm d}P(t)}{{\rm d}\Omega}\,{\rm d}t \tag{36}$$

kde $T = 2\pi/\omega$ je perióda oscilácií. Keďže ustredňujeme periodickú funkciu, nezáleží na tom, že čas $t' \neq t$. Máme

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\,{\rm d}t = \frac{1}{2}$$

a preto

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{z_0^2\omega^4}{8\pi v^3}\,\sin^2\alpha \tag{37}$$

V optike by nás asi viac zaujímala intenzita žiarenia, čo je stredná časová hodnota Poyntingovho vektora. Tá by sa vyjadrila podobným výrazom, ale klesala by so vzdialenosťou ako $1/R^2$. Celkový vyžarovaný časovo ustrednený výkon je

$$\boxed{P = \int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{z_0^2\omega^4}{3v^3}} \tag{38}$$

2.4 Príklad: Rovnomerný pohyb náboja po kružnici

Uvažujme situáciu, keď sa náboj pohybuje rýchlosťou $\vec{u}$ stálej veľkosti po kružnici s polomerom R_K. Ako v predošlom odseku, aj tu uvažujeme nerelativistickú rýchlosť $\vec{u}$. Pre takúto situáciu sme odvodili všeobecné výsledky (17) a (22). Stačí ich teda špecializovať pre danú situáciu, v ktorej máme (dostredivé) zrýchlenie, čiže stále meniace smer tak, aby v každom okamihu smerovalo do stredu kružnice. Jeho veľkosť je však konštantná. Povrchným nahliadnutím na vzorec (17) by sa mohlo zdať, že teda diferenciálny výkon sa nebude meniť s časom. Bude sa meniť, pretože od času bude závisieť uhol α. Pozri definíciu (13). Aby sme situáciu lepšie preskúmali, zapíšme, čo platí pre rovnomerný pohyb po kružnici:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{z} \tag{39}$$

a

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{u} = -\omega^2 \vec{z} \tag{40}$$

Zvoľme si počiatok súradnicovej sústavy v strede kružnice. A nech rovina (xy) leží v rovine kružnice. Parametrizujme si polohový vektor náboja $\vec{z}(t')$ ako

$$\vec{z}(t') = R_\mathrm{K}\,(\cos\omega t',\, \sin\omega t',\, 0) \tag{41}$$

Aby sme sa rozumne pohli ďalej, bude vhodné rozlišovať niekoľko prípadov.

Pozorovateľ ďaleko od kružnice, čiže $R \gg R_\mathrm{K}$. Kružnicu vidíme v podstate ako malú bodku v diaľke. V tejto situácii môžeme považovať pozorovací vektor $\vec{n}$ za nehybný, teda konštantný. Parametrizujme si tento vektor $\vec{n}$ ako

$$\vec{n} = (\cos\varphi\sin\vartheta,\, \sin\varphi\sin\vartheta,\, \cos\vartheta) \tag{42}$$

Smerujme k tomu, aby sme vedeli vyjadriť napr. Poyntingov vektor ako funkciu sférických pozorovacích uhlov ϑ a φ a ešte samozrejme aj ako funkciu vzdialenosti R. Skôr získaný všeobecný výsledok (17) je síce platný, ale pre danú situáciu nepraktický. Namiesto nepraktického uhla α (mení sa s časom) tam chceme radšej mať fixné uhly ϑ a φ. Zaujíma nás tda, ako vyjadriť uhol α pomocou niečoho iného. Máme

$$\vec{n}\,.\,\vec{a} = a\cos\alpha = \omega^2 R_\mathrm{K}\cos\alpha = -\omega^2\,\vec{n}\,.\,\vec{z}$$

Preto spočítame napr. [použitím (41) a (42)]

$$\cos\alpha(t') = -\frac{\vec{n}\,.\,\vec{z}(t')}{R_\mathrm{K}} = -\sin\vartheta\cos(\omega t' - \varphi) \tag{43}$$

Do výrazu pre uhlové rozdelenie výkonu potrebujeme $\sin^2\alpha$. Vyjadríme si

$$\sin^2\alpha \;=\; 1 - \cos^2\alpha \;=\; 1 - \sin^2\vartheta\cos^2(\omega t' - \varphi)$$

Mohli by sme hneď chcieť počítať uhlové rozdelenie výkonu (17). V tom je však element priestorového uhla vzťahovaný ku uhlu α. To je teraz nepraktické. Preto sa najprv vrátime ku Poyntingovmu vektoru (16) a dosadíme $\sin^2\alpha$ do neho:

$$\boxed{\vec{P}_\mathrm{Po} = \vec{P}_\mathrm{Po}(R,\vartheta,\varphi,t) = \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\,\frac{\omega^4}{4\pi v^3}\left(\frac{R_\mathrm{K}}{R}\right)^2\left[1 - \sin^2\vartheta\cos^2(\omega t' - \varphi)\right]\,\vec{n}(t')} \tag{44}$$

V danej súradnicovej sústave teda okamžité uhlové rozdelenie závisí nielen od jedného uhla, ale od oboch sférických polárnych uhlov ϑ a φ. Najviac žiarenia, ako vidno, ide do smerov kolmo na rovinu kružnice ($\vartheta \in \{0, \pi\}$). Ale aj do iných smerov ide veľa, aj rovnobežne s rovinou kružnice ($\vartheta = \pi/2$). Priestorový uhol by sme teraz museli diferencovať ešte na menšie elementy:

$$\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$$

Tak by sme už ľahko dostali vyjadrenie hustoty výkonu na priestorový uhol a vedeli by sme spraviť aj časové ustrednenie.

Pozorovateľ v strede kružnice a ďalšie prípady. Toto tu už hádam netreba písať. Kto si chce zistiť, aké je žiarenie v tomto a ďalších prípadoch, už to asi zvládne aj sám. Len treba uvážiť, že na to, aby sme mohli hovoriť o ďalekom poli, musí byť polomer kružnice dostatočne veľký.

Hodí sa ešte poznamenať, že rovnomerný pohyb po kružnici je superpozíciou dvoch lineárnych harmonických navzájom kolmých kmitaní fázovo posunutých o $\pi/2$.

Literatúra

[1] M. Noga: *Teória elektromagnetického poľa*, skriptá (Univerzita Komenského v Bratislave, 1982).

[2] I. Hutchinson: **Electromagnetic interactions** (MIT kurz), kapitola 4;
Na zvýraznený odkaz možno kliknúť. Jeho adresa je
`http://ocw.mit.edu/courses/nuclear-engineering/22-105-electromagnetic-interactions-fall-2005/readings/`

[3] J. Schwinger *a kol.*: *Classical Electrodynamics* (Westview Press, Boulder, Colorado 1998).