Vektory, polia, diferenciálne operátory (osnova niektorých cvičení z Teórie poľa)

spracoval Martin Konôpka

posledná aktualizácia: 19. marca 2013

Cvičenie č. 3   (4. 3. 2013)

Rotácia vektorového poľa

O tomto sme už hovorili. Narýchlo kvôli poriadku prebehneme, čo už vieme, aby sme mohli na to nadviazať. Pod vektorovým poľom budeme rozumieť trojicu funkcií značených napr. F_x, F_y, F_z. Každá z nich môže byť závislá na polohe v priestore. Spoločne ich zapíšeme ako vektorovú funkciu $\vec{F}(\vec{r})$.

- definícia rotácie - už sme mali
- Stokesova veta - už sme mali
- geometrický význam rotácie vektorovej funkcie - už sme si vysvetlili

Cirkulácia vektorového poľa (vektorovej funkcie)

$$C = \oint_K \vec{F} \, . \, \mathrm{d}r \tag{1}$$

Ukážka, že sa to dá rozsekať na cirkulácie cez malé krivky získané delením veľkej krivky K.

Nižšie toto využijeme, keď sa pokúsime spraviť aspoň náznak dôkazu Stokesovej vety.

Greenova veta

Nech $P(x, y)$ a $Q(x, y)$ sú dve funkcie so spojitými parciálnymi deriváciami na súvislej oblasti D. Potom

$$\boxed{\oint_K P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y} \tag{2}$$

Dôkaz: (spravený aký-taký)

Náznak dôkazu Stokesovej vety

(spravené ako-tak, ale ozaj len náznak)

Príklady

<u>Príklad 1:</u> Daná je vektorová funkcia $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos(\vec{k} \,.\, \vec{r} - \omega t)$. Vypočítajte jej rotáciu.

<u>Príklad 2:</u> Určte význam výrazu $\mathrm{rot}\,\vec{v}$ pre rýchlosť pri pohybe po kružnici.

Vieme, že sa dá písať

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Uhlová rýchlosť $\vec{\omega}$ nemusí byť konštantná; môže závisieť od času, čiže môže ísť aj o nerovnomerný pohyb po kružnici. Ale na tom v tomto príklade nezáleží. Derivuje sa len podľa súradníc.

Spôsob (1):

Počítajme

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{\nabla} \,.\, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{\nabla} \,.\, \vec{\omega})$$

Uhlová rýchlosť nezávisí od $\vec{r}$. Preto $\vec{\nabla} \,.\, \vec{\omega} = 0$. Máme $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (Predstavujeme si, že daný hmotný bod krúži v rovine xy.) Preto bude $\vec{\nabla} \,.\, \vec{r} = 2$. Tak dostávame výsledok

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{v} = 2\,\vec{\omega}}$$

Výsledok teda máme, ale niektoré nejasnosti môžu zostávať; napr. prečo neuvažujeme úplný zápis polohového vektora, teda $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$? Potom by sme predsa dostali to, čo zvyčajne píšeme, že totiž $\vec{\nabla} \,.\, \vec{r} = 3$ a výsledok by bol iný. Aby sme získanému výsledku verili, spočítajme to teraz takto:

Spôsob (2): Rýchlosť pohybu po kružnici v zložkách sa dá všeobecne zapísať

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y\,, \qquad v_y = \omega_z x - \omega_x z\,, \qquad v_z = \omega_x y - \omega_y x$$

Tieto vyjadrenia nám explicitnejšie ukazujú, ako závisí vektorové pole $\vec{v}$ od súradníc. Teraz po zložkách vypočítame operáciu rotácie:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_x = \nabla_y v_z - \nabla_z v_y \equiv \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \omega_x - (-\omega_x) = 2\omega_x$$

Obdobne

$$(\vec{\nabla} \times \vec{v})_y = 2\omega_y\,, \qquad (\vec{\nabla} \times \vec{v})_z = 2\omega_z$$

Teda zistili sme, že pre bod krúžiaci v rovine (hocijakej, *nemuseli sme ani predpokladať špeciálnu rovinu* xy) platí

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{v} = (2\omega_x, 2\omega_y, 2\omega_z)}$$

čo je výsledok v súlade s tým, čo sme získali vyššie.

Poznámka: Ak sa nám stále niečo nezdá, máme pravdu. Rýchlosť $\vec{r}$ ako funkcia polohy *hmotného bodu na kružnici* nie je skutočným poľom, aké by sme potrebovali. Súradnice hmotného bodu na kružnici sú totiž zviazané, nie sú nezávislé. Napr. ak by sme sa obmedzili na rovinu xy, tak by platilo obmedzenie $x^2 + y^2 = r^2 = \mathrm{const}$. Zisťujeme, že v úvahách tohto príkladu vyššie sme si plietli súradnice hmotného bodu (ktoré sa dajú chápať aj ako nejaké funkcie času) s obecným bodom $\vec{r}$ v priestore. Situáciu však rýchlo vieme napraviť tak, že si predstavíme napr. rotujúci disk. V každom jeho bode potom môžeme definovať rýchlostné pole $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$, ktorého závislosť od $\vec{r}$ je popísaná vzťahom $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Alebo si predstavíme rýchlostné pole vody rotujúcej vo víre v umývadle.

Symboly Kronecker (δ_{ij}) a Levi-Civita (ε_{ijk})

Kroneckerov „delta“ symbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

Použití tohto tenzora 2. rangu (stupňa) je mnoho. Napr. sa pomocou neho kompaktne zapíše skalárny súčin jednotkových vektorov určujúcich smery súradnicových osí:

$$\vec{e}_i \,.\, \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Levi-Civitov symbol: Je to pseudotenzor 3. rangu (stupňa), lebo má tri indexy. Hodnoty jeho prvkov môžu byť 1, -1 a 0.

$$\varepsilon_{123} = 1 \tag{4}$$

Akékoľvek prehodenie (permutácia) indexov $\Rightarrow$ zmena znamienka na opačnú. Preto je ε_{ijk} úplne *antisymetrický* objekt.

Ak sú dva alebo tri indexy rovnaké $\Rightarrow$ nulová hodnota.

Napr.

$$\varepsilon_{132} = -1\,, \qquad \varepsilon_{312} = 1\,, \qquad \varepsilon_{321} = -1\,, \qquad \varepsilon_{322} = 0$$

Levi-Civitov tenzor má mnoho použití: napr. vyjadrenie vektorového súčinu:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

(Použitá je tam Einsteinova sumačná konvencia).

Alebo napr. v kvantovej mechanike:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$$

Praktické vyjadrenie niekedy môže byť aj

$$\varepsilon_{ijk} = \frac{(i-j)(j-k)(k-i)}{2} \tag{5}$$

Dôležitý vzťah je

$$\boxed{\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} \tag{6}$$

Praktické vzorce pre prácu s vektormi

Pomocou práve zadefinovaných symbolov δ_{ij} a ε_{ijk} sa veľmi ľahko odvodia mnohé dôležité vzorce vektorového počtu (a ako uvidíme v ďalšom odseku, aj mnohé vzorce diferenciálneho vektorového počtu). V tomto odseku si uvedieme a odvodíme tieto dva:

$$\vec{a} \,.\, (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \,.\, (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \,.\, (\vec{c} \times \vec{a}) \tag{7}$$

a

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \,.\, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \,.\, \vec{b}) \tag{8}$$

Časté výrazy a vzorce pri práci s diferenciálnymi operátormi

Jednonásobná aplikácia operátora $\vec{\nabla}$

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = \vec{v} \,.\, \operatorname{grad}\rho + \rho \operatorname{div}\vec{v}$$

$$\vec{\nabla} \,.\, (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \,.\, (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \,.\, (\vec{\nabla} \times \vec{b})$$

Pár poznámok:

- Gradient vyrobí zo skalára vektor. Napr. $\vec{f} = -\vec{\nabla}U$
- Divergencia vyrobí z vektora skalár: $\vec{\nabla} \,.\, \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
- Rotácia vyrobí z vektora iný vektor: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

(Uvedené príklady síce podľa použitých písmenok vyzerajú ako niektoré „renomované“ fyzikálne vzťahy, ale ilustrovali sme nimi čisto matematické poznatky o vektoroch a operátore nabla.)

Dvojnásobná aplikácia operátora $\vec{\nabla}$

a)

$$\boxed{\vec{\nabla} \,.\, \vec{\nabla}\phi = \ldots = \nabla^2\phi} \tag{9}$$

Je to **Laplaceov operátor**; môže pôsobiť tak na skalár ako aj na vektor; tu to uvádzame na skalár. Výsledkom pôsobenia je potom tiež skalár. Pôsobenie Laplaceovho operátora na vektor je vlastne pôsobením na 3 skaláre. Výsledkom sú tri skaláre, čiže vektor.

<u>Príklad:</u> Nech $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$. Potom

$$\nabla^2\phi = \frac{2}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$$