Odraz a lom EM vĺn na rovinnom rozhraní

spracoval Martin Konôpka

posledná aktualizácia: 15. mája 2013

Ako príklad použitia Maxwellových rovníc si ukážeme, ako pomocou nich odvodíme Snellov zákon odrazu a lomu na rovinnom rozhraní dielektrík a aj ďalšie vzťahy [1].

Integrálny tvar Maxwellových rovníc pre materiálové prostredie

Aj keď sme zvyknutí často písať Maxwellove rovnice (MR) pre makroskopické (ustrednené) polia ako diferenciálne rovnice, teda v diferenciálnom tvare, takáto forma MR nie je pre prostredia s ostrými rozhraniami dostatočne všeobecná. Na rozhraniach totiž derivácie nie sú definované. Pre prostredia s ostrými rozhraniami je všeobecnejšie platným tvarom makroskopických MR integrálny tvar:

$$\oint_{L_S} \vec{H} \,.\, \mathrm{d}\vec{r} - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{j} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} \tag{1}$$

$$\oint_{S_V} \vec{D} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \, \mathrm{d}^3 r \tag{2}$$

$$\oint_{L_S} \vec{E} \,.\, \mathrm{d}\vec{r} + \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{3}$$

$$\oint_{S_V} \vec{B} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{4}$$

S je plošná oblasť (nie uzavretá).
L_S je uzavretá krivka obopínajúca plochu S.
V je objemová oblasť v priestore.
S_V je uzavretá plošná oblasť obopínajúca objem V.
Veličiny $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{D}$, $\vec{H}$, ρ a $\vec{j}$ sú polia resp. hustoty definované ako ustrednené príslušné mikroskopické veličiny, keďže sa teraz zaoberáme poliami a hustotami v materiálovom prostredí.

Rovnica (1) je Ampérov-Maxwellov zákon (zovšeobecnený Ampérov zákon celkového prúdu) pre makroskopické materiálové prostredie. Rovnica (2) je Gaussov zákon elektrostatiky napísaný pre makroskopické materiálové prostredie. Ako vidieť, platí aj pre časovo premenné polia. Rovnica (3) je Faradayova-Maxwellova rovnica EM indukcie; jej zápis vyzerá rovnako tak pre makroskopické ustrednené ako aj pre neustrednené polia. Nakoniec, rovnica (4) je magnetickou obdobou Gaussovho zákona s tým, že pravá strana je tu vždy nulová.

Je však vhodné si pripomenúť, že napr. rovnica (3) nie je priamo presne to, čo Faradayov zákon $U_i = -\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$. Faradayov zákon, tak ako bol formulovaný, sa týka fyzických slučiek, vodičov, a to aj takých, ktoré v čase môžu meniť svoju plochu či tvar. Vo Faradayovej-Maxwellovej rovnici (3) sa slučka v čase nedeformuje; je to fixná matematická krivka. Až Maxwell spravil predpoklad, že okrem Faradayovho zákona platí aj veľmi podobný zákon, v ktorom však namiesto fyzického vodiča uvažujeme ľubovoľnú fixnú uzavretú krivku v priestore (ktorá môže aj nemusí prechádzať vodičom). Maxwellov odvážny a prelomový predpoklad sa ukázal ako správny. Faradayov zákon a Maxwellova rovnica (3) teda nie sú celkom to isté. Dá sa povedať, že Faradayov zákon bol pre Maxwella motiváciou ku postulovaniu rovnice (3). Podobne je to aj s rovnicou (1), kde navyše vystupuje aj Maxwellov posuvný prúd. K tejto téme pozri aj Dodatok tohto dokumentu.

Konzistentná s Maxwellovými rovnicami je rovnica vyjadrujúca zákon zachovania elektrického náboja [1]:

$$\oint_{S_V} \vec{j}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho\,\mathrm{d}^3 r = 0 \tag{5}$$

Zvyčajne sa tu predpokladá, že integračný objem V a okolo oboptnutá uzavretá plocha S_V sa nemenia v čase.[1]

Maxwellove rovnice v spojitých prostrediach

V časti priestoru, kde všetky polia majú spojitý priebeh a jednoznačné parciálne derivácie, môžeme na MR (1), ..., (4) uplatniť Stokesovu vetu alebo Gaussovu-Ostrogradského vetu. Následne môžme zmenšiť dĺžku uzavretej krivky L_S resp. veľkosť uzavretej plochy S_V limitne až k nulám. (V dôsledku toho samozrejeme pôjdu k nulám aj veľkosť otvorenej plochy S a veľkosť objemu V.) Pre takéto limitne malé oblasti potom môžeme integrály zahodiť a dostávame MR v diferenciálnom tvare, tu vo forme platnej pre materiálové prostredie:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \tag{6}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{7}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \tag{8}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{9}$$

V homogénnom prostredí je základným typom riešenia MR rovinná vlna [1]:

$$\vec{E} = \frac{1}{2}\left[\vec{E}_0\, e^{i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)} + \vec{E}_0^*\, e^{-i(\vec{k}.\vec{r}-\omega t)}\right] \tag{10}$$

a obdobné vyjadrenia sa dajú písať aj pre polia $\vec{H}$, $\vec{D}$ a $\vec{B}$. Pokiaľ je prostredie izotrópne (čo budeme predpokladať), tak platí $\vec{D} \parallel \vec{E}$ a $\vec{B} \parallel \vec{H}$. Platí aj, že magnetické vektory sú kolmé na elektrické, napr. $\vec{H} \perp \vec{E}$. Vlnový vektor $\vec{k} \perp \vec{E}$ a zároveň $\vec{k} \perp \vec{H}$. Budeme predpokladať, že prostredia sú *bezstratové* dielektriká. Vtedy nedochádza k útlmu vĺn a vlnové vektory sú reálne. Veľkosť vlnového vektora ($k \equiv |\vec{k}|$) je úzko zviazaná s uhlovou frekvenciou vlny:

$$\omega = vk \tag{11}$$

kde

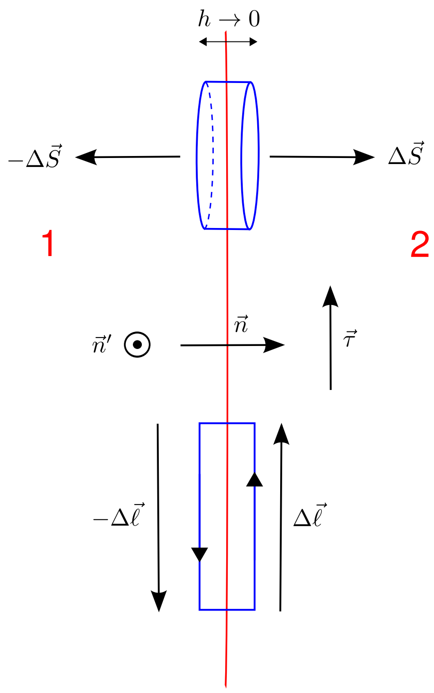
$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \tag{12}$$

je rýchlosť šírenia sa vlny v prostredí s permitivitou ϵ a permeabilitou μ. Vlna (10) nemusí byť len lineárne polarizovaná; napísaný tvar je všeobecný a môže predstavovať aj eliptickú polarizáciu [1]. Zápis (10) poskytuje polia ako reálne vektory, tak ako skutočne tieto veličiny sú definované (reálne). Vo výpočtoch sa však ľahšie narába s komplexnými poliami, a tak budeme zväčša aj robiť. Pod skutočným poľom si však vždy musíme predstavovať reálnu časť komplexnej veličiny.

[1] Ak by sa menili, pekne vidieť, že rovnica potom platí, len ak budeme prúdovú hustotu uvažovať z hľadiska pohybujúcich sa pozorovateľov umiestnených na pohybujúcej (nafukujúcej sa a pod.) uzavretej ploche S_V. Stačí si predstaviť situáciu, keď je prúdová hustota v pokojovej sústave nulová.

Maxwellove rovnice na rozhraniach

Červená čiara na obrázku je rozhranie prostredí 1 a 2. Plocha podstavy $\Delta\vec{S}$ fiktívneho valčeka musí



Obr. 1: Obrázok ku odvodeniu hraničných podmienok. Pri ich odvodení z Maxwellových rovníc (1), ..., (4) si predstavujeme, že malý objem a malá plocha sú nakreslené okolo toho istého zvoleného bodu $\vec{r}$ na rozhraní. Rozhranie je vo všeobecnosti zakrivené.

byť taká malá, aby bolo možné zanedbať krivosť rozhrania na priereze valčeka. Úplne obdobne dĺžka obdĺžnika $\Delta\vec{\ell}$. Navyše tieto rozmery musia byť malé aj z tých dôvodov, aby sme mohli hovoriť o poliach v konkrétnych *bodoch* rozhrania.
$\vec{n}$ je jednotkový vektor smerujúci z prostredia 1 do prostredia 2 kolmo na rozhranie.
$\vec{n}'$ je jednotkový vektor rovnobežný s rozhraním, a teda kolmý na $\vec{n}$. Je zároveň kolmý aj na rovinu nakresleného obdĺžnika, a teda je to normálový vektor tohto obdĺžnika.
Vektor $\vec{\tau} \equiv \vec{n}' \times \vec{n}$ je pomocný jednotkový vektor, tiež rovnobežný s rozhraním.
Šípky na obdĺžniku znázorňujú kladnú orientáciu integračnej krivky. Z pravidla pravej ruky potom definujeme aj orientáciu vektora $\vec{n}'$ (von z roviny nákresne).

Vyplývajúce hraničné podmienky (dá sa povedať, že Maxwellove rovnice na rozhraniach) potom sú

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{\mathcal{J}} \tag{13}$$

$$\vec{n} \,.\, (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \sigma \tag{14}$$

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0} \tag{15}$$

$$\vec{n} \,.\, (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \tag{16}$$

Skalár σ je plošná hustota voľného plošného náboja, ktorý môže byť na rozhraní. Vektor $\vec{\mathcal{J}}$ zasa predstavuje hustotu voľného plošného prúdu, ktorý môže tiecť rozhraním (teda je to vektor rovnobežný s rozhraním). Okrem hraničných podmienok pre polia sa zo zákona zachovania náboja (5) dá ľahko odvodiť hraničná podmienka pre prúdovú hustotu $\vec{j}$ (to nie je plošný prúd, ale bežná prúdová hustota):

$$\vec{n} \,.\, (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{17}$$

V *bežných dielektrikách* na rozhraní nie je ani voľný plošný náboj ani voľný plošný prúd. V takom prípade nám vyššie napísané hraničné podmienky pre polia hovoria, že na rozhraní:

(1) *sa zachovávajú kolmé (normálové) zložky polí $\vec{D}$ a $\vec{B}$,*

(2) *sa zachovávajú dotyčnicové (tangenciálne) zložky polí $\vec{E}$ a $\vec{H}$.*

Praktické vzťahy medzi vektormi monochromatickej rovinnej vlny

Ak sa v homogénnom izotrópnom prostredí šíri rovinná monochromatická vlna, teda vlna s elektrickým poľom podľa (10), tak sa pre ňu dajú odvodiť veľmi dôležité a praktické vzťahy

$$\boxed{\vec{E} = v\vec{B} \times \vec{\kappa}}, \qquad \boxed{\vec{B} = \frac{1}{v}\vec{\kappa} \times \vec{E}} \tag{18}$$

kde

$$\vec{\kappa} = \frac{\vec{k}}{k} \tag{19}$$

(kapa) je jednotkový vektor v smere šírenia sa vlny, teda v smere vlnového vektora a v je veľkosť rýchlosti šírenia sa vlnenia v danom prostredí. Zo vzťahov (18) (ktoré samozrejme jeden z druhého vyplývajú) priamo vidíme vzájomnú *kolmosť* vektorov $\vec{B}$, $\vec{k}$, $\vec{E}$, ako aj to, že v tomto poradí tvoria osi pravotočivej kartrézskej súradnicovej sústavy.

Odraz a lom EM vĺn na rovinnom rozhraní dielektriík

Uvažujme tentoraz už rovinné rozhranie a bez voľných nábojov či prúdov: $\rho \equiv 0$, $\vec{j} \equiv \vec{0}$. Na toto rozhranie dopadá z prostredia 1 rovinná EM vlna. Z experimentov vieme, že následkom toho sa bude prostredím 1 šíriť aj odrazená vlna a že prostredím 2 sa môže šíriť prestúpená (lomená) vlna. Označme si elektrické polia dopadajúcej, odrazenej a prestúpenej vlny symbolmi $\vec{E}_1$, $\vec{E}_1'$ a $\vec{E}_2$. Keďže všetky operácie s poľami, ktoré budeme robiť, budú lineárne, môžeme bez obáv a s výhodou používať vyjadrenia polí v tvare komplexných vektorov. Dopadajúca vlna bude mať vyjadrenie

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01}\, e^{i(\vec{k}_1.\vec{r}-\omega_1 t)} \tag{20}$$

Pre odrazenú vlnu napíšeme

$$\vec{E}_1' = \vec{E}_{01}'\, e^{i(\vec{k}_1'.\vec{r}-\omega_1' t)} \tag{21}$$

a prestúpená vlna bude

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{02}\, e^{i(\vec{k}_2.\vec{r}-\omega_2 t)} \tag{22}$$

Úplne obdobné výrazy by sme napísali aj pre polia $\vec{D}$, $\vec{H}$ a $\vec{B}$. Amplitúdy (vektory s indexami 0) sú vo všeobecnosti komplexné, a tak prípadné fázové posuny medzi vlnami 1, $1'$ a 2, ktoré musíme vo všeobecnosti predpokladať, sú zahrnuté v týchto amplitúdach.

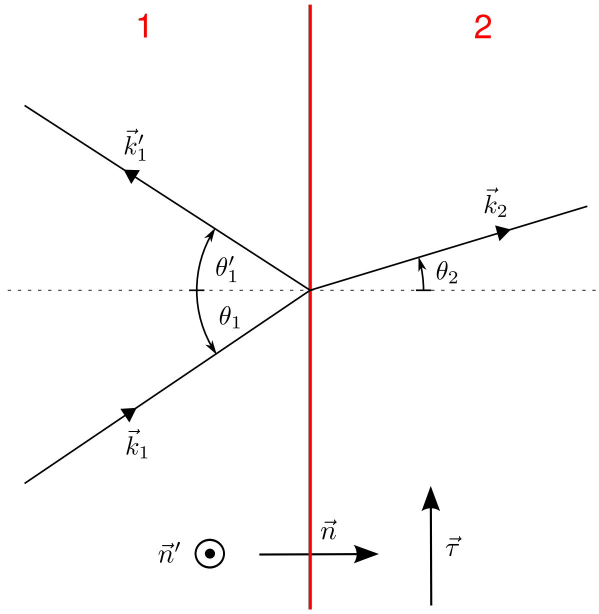
Poznáme všetky parametre dopadajúcej vlny. Parametre odrazenej a prestúpenej vlny zatiaľ nepoznáme. Je potrebné si uvedomiť, že EM pole v prostredí 1 je súčtom dopadajúceho a odrazeného poľa:

$$\vec{E}_1^{\mathrm{celk}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_1' \tag{23}$$

zatiaľ čo prostredím 2 sa šíri len prestúpená vlna:

$$\vec{E}_2^{\mathrm{celk}} = \vec{E}_2 \tag{24}$$

Dosadíme vlny (23) a (24) (a obdobné vyjadrenia pre vektory $\vec{D}$, $\vec{H}$ a $\vec{B}$) do hraničných vzťahov (13), …, (16). Dostaneme rovnice, ktoré však zapíšeme v takom poradí, že najprv pôjdu tie s vyjadreniami



Obr. 2: Obrázok ku odvodeniu Snellovho zákona. Tu je rozhranie rovinné. Pozri aj [2, 3].

rovností normálových zložiek [1].

$$\vec{n}\,.\left[\epsilon_2\vec{E}_2-\epsilon_1(\vec{E}_1+\vec{E}_1')\right]=0 \tag{25}$$

$$\vec{n}\,.\left[\frac{1}{v_2}\vec{\kappa}_2\times\vec{E}_2-\frac{1}{v_1}\left(\vec{\kappa}_1\times\vec{E}_1+\vec{\kappa}_1'\times\vec{E}_1'\right)\right]=0 \tag{26}$$

$$\vec{n}\times\left[\vec{E}_2-(\vec{E}_1+\vec{E}_1')\right]=\vec{0} \tag{27}$$

$$\vec{n}\times\left[\frac{1}{v_2\mu_2}\vec{\kappa}_2\times\vec{E}_2-\frac{1}{v_1\mu_1}(\vec{\kappa}_1\times\vec{E}_1+\vec{\kappa}_1'\times\vec{E}_1')\right]=\vec{0} \tag{28}$$

Tieto rovnice (je ich šesť netriviálnych) musia byť splnené v ľubovoľnom čase a v každom mieste skúmaného rozhrania. Aby to tak platilo, nutne musia byť frekvencie všetkých troch vĺn rovnaké:

$$\boxed{\boxed{\omega_1'=\omega_2=\omega_1}} \tag{29}$$

To je prvý a mimoriadne dôležitý výsledok, ktorý sme dostali. Keďže platí aj $\omega_1'=v_1k_1'$, tak následne zisťujeme, že vlnové číslo odrazenej vlny je zhodné s vlnovým číslom dopadajúcej vlny:

$$k_1'=k_1 \tag{30}$$

Zo vzťahu $\omega_2=v_2k_2$ a z (29) podobne dostávame, že

$$k_2=\frac{\omega_1}{v_2}=\frac{\omega_1}{v_1}\frac{v_1}{v_2}=\sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}}\,k_1 \tag{31}$$

[Nakoniec sme použili vzťah typu (12).] Nutnou podmienkou na platnosť rovníc (25, ..., (28) v každom bode rozhrania však je nielen rovnosť uhlových frekvencií. Pre pohodlnosť úvah si zaveďme kartézsku súradnicovú sústavu tak, že rozhranie dielektrík bude ležať v rovine $z=0$, pričom os z bude smerovať z prostredia 1 do prostredia 2. Na rozhraní musia byť splnené aj podmienky

$$\boxed{k_{1x}'=k_{1x}\,,\qquad k_{1y}'=k_{1y}}\qquad\qquad\boxed{k_{2x}=k_{1x}\,,\qquad k_{2y}=k_{1y}} \tag{32}$$

Teda *vlnové vektory na rozhraní zachovávajú svoje zložky rovnobežné s rozhraním* (tangenciálne zložky). Vyššie sme už zistili, že $k_1' = k_1$. Keďže vlna $\vec{k}_1'$ už zo svojej definície sa šíri prostredím 1 a je to iná vlna než $\vec{k}_1$ (musí teda mať $\vec{k}_1' \neq \vec{k}_1$) tak pre z-ovú zložku tohto vektora musí platiť

$$\boxed{k_{1z}' = -k_{1z}} \tag{33}$$

Vidíme, že uhol odrazu θ_1' je rovný uhlu dopadu θ_1:

$$\boxed{\boxed{\theta_1' = \theta_1}} \tag{34}$$

Veľkosť vektora $\vec{k}_2$ už poznáme [vyjadrenie (31)]. Tak už hneď vieme zistiť aj to, aký je uhol lomu θ_2: počítajme

$$\sin\theta_2 = \frac{k_{2t}}{k_2}$$

kde k_{2t} je priemet $\vec{k}_2$ do roviny rozhrania. Takouto úvahou s pomocou obrázka a goniometrie po pár krokoch dostávame, že

$$\boxed{\boxed{\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \sqrt{\frac{\epsilon_2\mu_2}{\epsilon_1\mu_1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{n_2}{n_1}}} \tag{35}$$

čo sú rôzne vyjadrenia pre *Snellov zákon* lomu svetla (ako vidieť, nielen svetla, ale aj vĺn z iných frekvenčných pásiem). Symboly $n_1 = c/v_1$ a obdobne n_2 sú indexy lomu v jednotlivých prostrediach.

Dodatok: Iný zápis Maxwellových rovníc v integrálnom tvare

Maxwellove rovnice v integrálnom tvare (tu pre makroskopické materiálové prostredie) sa často píšu aj v čiastočnej inej forme než rovnice (1), ..., (4):

$$\oint_{L_S} \vec{H}\,.\,\mathrm{d}\vec{r} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{D}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_S \vec{j}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} \tag{36}$$

$$\oint_{S_V} \vec{D}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}^3r \tag{37}$$

$$\oint_{L_S} \vec{E}\,.\,\mathrm{d}\vec{r} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{38}$$

$$\oint_{S_V} \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} = 0 \tag{39}$$

Časové derivácie sú tu teda vysunuté pred integrály, inak je to to isté ako v hlavnom texte. Takto nám napr. rovnica (38) viac pripomína Faradayov zákon elektromagnetickej indukcie:

$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{40}$$

kde

$$U_{\mathrm{ind}} = \oint_{L_S} \vec{E}_{\mathrm{ind}}\,.\,\mathrm{d}\vec{r} \tag{41}$$

a

$$\Phi = \int_S \vec{B}\,.\,\mathrm{d}\vec{S} \tag{42}$$

Toto pripomenutie Faradayovho zákona je často zrejme aj motiváciou, prečo sa používa zápis s časovou deriváciou pred integrálom. (Už nemusí byť parciálna, lebo priestorové súradice boli vyintegrované.) Ale zákony (3) a (40) nie sú celkom to isté, lebo u Faradaya môže fyzická sľučka meniť aj svoju plochu a tvar, zatiaľ čo u Maxwella ide o uzavretú a inak fixnú matematickú krivku.

Uvažujme známy príklad zo základného kurzu, keď je rovinná uzavretá sľučka umiestnená v časovo konštantnom (a povedzme aj priestorovo homogénnom) magnetickom poli s indukciou $\vec{B}$ kolmou na rovinu sľučky. Ak sľučka bude napr. zväčšovať svoju plochu, tak sa v nej bude indukovať elektrické pole a tým aj elektromotorické napätie U_{ind}. Podľa Maxwellovej rovnice (8) alebo aj rovnice (3) však musí v danom prípade byť cirkulácia elektrického poľa nulová (lebo $\vec{B}$ sa s časom nemení). Ako je potom možné, že v sľučke vzniká indukované elektrické pole? Je to tým, že elektrické pole je relatívnou veličinou a jeho hodnota je v pohybujúcej sa súradicovej sústave iná než v nehybnej. Takže zatiaľ čo Faradayov zákon nám priamo poskytne hodnotu indukovaného elektromotorického napätia v naťahujúcej alebo sťahujúcej sa sľučke, Maxwellova rovnica (3) nám pre daný prípad poskytne len nulu (nulové elektrické pole), a toto nulové pole potom musíme potom transformovať do pohybujúcej sa súradnicovej sústavy, aby sme dostali užitočný výsledok (ktorý bude samozrejme zhodný s tým, ktorý sme dostali z Faradayovho zákona).

Podobné úvahy by sa dali robiť aj pre Ampérov-Maxwellov zákon (1), ktorý sa niekedy píše v tvare (36).

Literatúra

[1] M. Noga: *Teória elektromagnetického poľa*, skriptá (Univerzita Komenského v Bratislave, 1982).

[2] P. Malý: *Optika* (Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha 2008).

[3] P. Markoš, C.M. Soukoulis: *Wave propagation* (Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008).