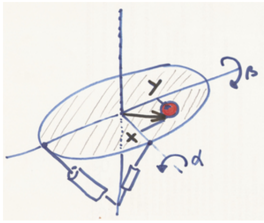
Rotácie
22/10/2012

1. Kruhová doska je naklápaná dvomi piestami tak, že jej naklopenie charakterizujeme dvomi uhlami α a β zodpovedajúcim otočeniu okolo osi x (o α) a následne okolo pootočenej osi y (o β). Aká bude zložka gravitačného zrýchlenia v rovine kruhu, pôsobiaca na guličku nachádzajúcu sa na tomto kruhu v mieste (x, y) vzhľadom na súradnicové osi pevne spojené s kruhom? Pre $\alpha = \beta = 0$ je kruhová doska vo vodorovnej referenčnej polohe.



Výsledok: V báze vektorov pevne spojenou s kruhovou doskou nájdeme

$$\begin{aligned}\vec{g} &= \sum_{ij} \vec{f}_j R_{ji}^{-\beta,2} R_{i3}^{-\alpha,1}(-g) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s\alpha \\ c\alpha \end{pmatrix} (-g) \\ &= gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2 - gc\alpha c\beta \vec{f}_3\end{aligned}$$

t.j. v rovine kruhu je zložka gravitačného zrýchlenia $\vec{g}_{||} = gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2$.

2. Uvažujte dva prípady rotácií vektora $\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i$. V prvom prípade okolo osi x o uhlol α a následne okolo novej osi y o uhol β a v druhom prípade naopak, naprv okolo osi y o β a až následne o uhol α okolo x. Ukážte, že výsledné vektory sú rovnaké len do prvého rádu veľkosti uhlov α a β.

   Dôsledok tohto výsledku je, že kým na poradí operácií otáčania záleží, vektory uhlových rýchlostí môžeme normálne spočítavať, nakoľko ide o nekonečne malé pootočenia za nekonečne krátky čas.
   Návod: Nech pred otáčaním mal vektor tvar $\vec{r} = \sum_i x_i \vec{e}_i$. V provom prípade bude mať natočený vektor tvar

$$\vec{r}^a = \sum_i x_i \vec{f}_i^a = \sum_i x_i \mathscr{O}^{\beta,2}[\vec{e}_i^{a\prime}] = \sum_{ij} x_i \vec{e}_j^{a\prime} R_{ji}^{\beta,2} = \sum_{ij} x_i \mathscr{O}^{\alpha,1}[\vec{e}_i^{a}] R_{ji}^{\beta,2} = \sum_{ijk} \vec{e}_k R_{kj}^{\alpha,1} R_{ji}^{\beta,2} x_i \tag{3}$$

   Podobne nájdeme pre druhý prípad

$$\vec{r}^b = \sum_{ijk} \vec{e}_k R_{kj}^{\beta,2} R_{ji}^{\alpha,1} x_i \tag{4}$$

   Vidno, že vektory za líšia kôli vymenenému násobeniu rotačných matíc. Porovnaním výsledku týchto dvoch násobení matíc nájdeme hľadané tvrdenie.

3. Ukážte že jedinou rotáciou okolo osi z možno nájsť takú súradnicovú sústavu, v ktorej je tenzor zotrvačnosti

$$\vec{\vec{I}} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix} \tag{5}$$

   diagonálny. Nájdite jeho zložky a uhol natočenia.
   Návod: V tenzore $\vec{\vec{I}} = \sum_{ij} I_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$ si vyjadrite jednotkové vektory $\vec{e}_i$ pomocou otočených $\vec{f}_j$, pričom od uholu natočenia vyžadujte aby boli končené minidiagonálne členy nulové.
   Výsledok: $\tan 2\phi = \frac{2I_{12}}{I_{12} - I_{11}}$ (negarantovaný)