Cvičenia z Fyziky procesov
zima 2012.

Zopakovanie niečoho z vektorov a diferenciálnych rovníc

1. Nájdite rovnovážne riešenia a vyšetrite správanie sa riešení v ich okolí pre dynamický systém daný pohybovou rovnicou
$$m\ddot{x} = a - bx^2, a > 0, b > 0 \tag{1}$$

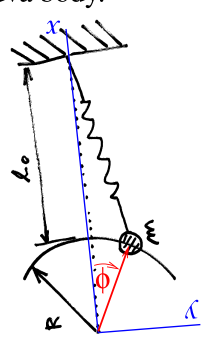
2. Na začiatok stručne zopakovať zápis polohového vektoru cez jednotkové, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, skalárny súčin a jeho použitie na získanie priemetu do smeru.

3. Vyjadrite časovú deriváciu vektora s konštantnou dĺžkou pomocou vektora okamžitej uhlovej rýchlosti.
Re: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ + geometrické odvodenie + prepísanie do súradnicovej formy po zložkách. (príklad slúži aj ako pripomenutie vektorového súčinu)

4. Nájdite riešenie rovníc (Vhodné ako domáca úloha za 1,5b, ale musia poznať výsledok predchádzajúceho príkladu)
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$
pre počiatočnú podmienku $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ ak $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.
Re:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

5. Ako bude vyzerať matica rotácie okolo osi x o uhol θ a y o uhol ψ? (cyklická zámena; ak je predchádzajúci problém domáca úloho, potom toto diskutovať až na nasledujúcom cvičení)

6. Nájdite dĺžku pružiny pri vychýlení korálky o uhlol ϕ pre systém na obrázku. Pomôcka: zvolte si počiatok súradníc v strede kružnice, vyjadrite si polohový vektor uchytenia pružiny na stene a polohový vektor korálky v týchto suradniciach a následne nájdite veľkosť vektora spájajúceho tieto dva body.



7. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ sú lineárne nezávislé vektory. Dokážte, že

- $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

(vhodnou voľbou súradnicovej sústavy budeme mať $\vec{c} = c_x\vec{i}, \vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}, \vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ čo následne priamo použijeme na overenie vzťahu priamo vyčíslením pomocou $\vec{i} \cdot \vec{j}$... a $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$... postup vysvetliť a zvyšok zadať ako domácu úlohu za 1,5b.)

8. Presvedčte sa, že ľubovoľný vektor $\vec{r}$ môžeme rozložiť na vektory v smere $\vec{e}$ a v smere kolmom na $\vec{e}$ pomocou vzťahu

$$\vec{r} = (\vec{e} \cdot \vec{r})\vec{e} + \vec{e} \times (\vec{r} \times \vec{e}).$$

(jednoduchý dôsledok predchádzajúceho problému)