

3.7.4 Trecie sily

Celkom všeobecne, trecie sily pôsobia proti smeru pohybu.

Trecie sily úmerné rýchlosti V lineárnom priblížení (ak sú rýchlosti malé) sa najčastejšie používa model trenia úmerného rýchlosti,

1. Pri otáčaní okolo uhla ϕ : $\vec{D}^n = -k_1 \vec{\omega}$. Moment trecej sily pôsobí vzhľadom na os otáčania, napr. prostredníctvom ložísk a $\vec{\omega}$ je uhlová rýchlosť otáčania, ktoré táto sila tlmí. Pri osi spájajúcej dve pohybujúce sa časti musí pritom ísť o *relatívnu uhlovú rýchlosť* medzi týmito telesami.
2. Pri posuvnom pohybe v smere: $\vec{F}^n = -k_2 \vec{v}$. Tento model je chápaný tak, že sila pôsobí v ťažisku. Podobne ako v predchádzajúcom prípade, ak ide o treciu silu medzi pohybujúcimi sa časťami, musí byť táto závislá len na ich relatívnej rýchlosti.

Konštanty k_1 a k_2 sú fenomenologické konštanty závisiace od konkrétneho študovaného prípadu. Ich rádoový odhad môžeme získať z času, za ktorý sa daný pohyb utlmí; ak máme jeden stupeň voľnosti q , ktorý je tmený konštantou k , potom jeho pohybová rovnica (jeho hmotnosť bude m a zanedbáme akékoľvek iné sily) bude

$$\ddot{q} = -\frac{k}{m}\dot{q}$$

ktorá má riešenie

$$\dot{q}(t) = \dot{q}(0)e^{-t/\tau}, \tau = \frac{m}{k}$$

Rýchlosť klesne na $1/e = 0,36$ -násobok počiatočnej rýchlosti za čas $t = \tau$. Ak tento čas poznáme (odmeriame, odhadneme) potom $k = m/\tau$.

Niekedy môže byť zaujímavejšie brať pokles na iný zlomok počiatočnej rýchlosti, napr. na jednu desatinu počiatočnej rýchlosti klesne za čas $\tau_{1/10}$,

$$\frac{1}{10} = e^{-\tau_{1/10}/\tau} \Rightarrow \tau_{1/10} = \tau \ln(10) \approx 2,3\tau$$

a potom $k = m \ln(10)/\tau_{1/10}$.

Ako príklad vezmeme “typické” teleso s hmotnosťou $m = 100\text{kg}$, ktorého rýchlosť vplyvom trenia klesne na $1/10$ pôvodnej za $\tau_{1/10} \sim 1\text{min} \sim 60\text{s}$. Potom $k \sim 100 \cdot 2,3/60 \sim 4\text{N}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$. Pri rýchlosti $v \sim 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ bude teda táto trecia sila rádovo $F \sim 4\text{N}$.

Sila aerodynamického odporu Veľmi častou situáciou je, že odporová sila prúdenia vzduchu prerastie za lineárne priblížení. V tomto prípade tenzor napätia má člen závislý od druhej mocniny rýchlosti telesa vzhľadom na prostredie, čo vedie na celkovú odporovú silu prostredia silu v tvare

$$F = \frac{1}{2}c_d\rho v S |\vec{v}(\vec{r}^*)|^2 \quad (226)$$

kde c_d je koeficient aerodynamického odporu, ρ je hustota vzduchu, S je efektívna plocha telesa ktorú vidíme ak sa na teleso pozeráme v smere jeho rýchlosti a $\vec{v}(\vec{r}^*)$ rýchlosť telesa vzhľadom na prostredie.

Táto sila sa výrazne prejavuje až pri väčších rýchlostiach. Ak napríklad uvažujeme teleso s rozmermi $l \sim 1\text{m}$, potom $S \sim 1\text{m}^2$. Pre “kocku” bude $c_d \sim 1$ čo pre pohyb vo vzduchu $\rho_v = 1\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ dá silu

$$F \sim \frac{1}{2}v^2$$

A bude teda pri rýchlosti $v \sim 1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ bude táto sila približne $F \sim 0,5\text{N}$, čo je menšie ako trecia sila uvažovaná v predchádzajúcom prípade. S rastúcou rýchlosťou však jej význam narastá; sila aerodynamického

odporu bude v uvažovanom prípade porovnateľná so silou lineárneho trenia pri rýchlostiach daných rovnicou

$$\frac{1}{2}v_c^2 \approx 4v_c, \Rightarrow v_c \sim \sqrt{8m \cdot s^{-1}} \approx 2,8m \cdot s^{-1}$$

Porovnajme silu aerodynamického odporu s typickou tiažovou silou na takéto teleso (stále predpokladáme hmotnosť $m = 100\text{kg}$), $G = mg \sim 10^2\text{kg} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \sim 10^3\text{N}$. Aby G a F boli porovnateľné, musela by byť rýchlosť telesa

$$v \sim \sqrt{2mg} \sim 45\text{m} \cdot \text{s}^{-1} = 162\text{km/h}.$$

Kinetické trenie (kontaktné) Nakoniec, trecie sily v dôsledku kontaktu s podložkou, čo zahŕňa aj trecie sily v ložiskách, majú aj konštantný člen, ktorý nemožno zanedbať už v lineárnom priblížení, pričom veľkosť lokálne pôsobiacej trecej sily je priamoúmerný normálovej sile R ,

$$T = \mu R, \quad (227)$$

kde μ je kinetický koeficient trenia. Ich vyčíslenie teda potrebuje znalosť o silách reakcií, ktorým sme sa cielene Lagrangeovým formalizmom vyhli. Ich zarátanie je možné ak k Lagrangeovým rovniciach znovu pridáme potrebné 1. a 2. pohybové rovnice itt. Veľkosť sily kinetického trenia je daná prítláčnou silou a koeficientom trenia, ktorý nadobúda hodnoty od 0,01 (ocel-l'ad) po 0,5 (drevo-drevo) v bežných situáciách.

Pre náš "typický" prípad budeme uvažovať, že prítláčná sila je daná tiažou telesa, $R = mg$. Veľkosť kinetického trenia bude $T \sim 10 - 500\text{N}$ a teda pri rýchlostiach $v \sim 1\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ kinetické trenie bude dominantné.

Prirodzene, v iných situáciách môže dominovať iný z týchto troch spomenutých mechanizmov, pričom predstavu o ich veľkostiach si môžeme urobiť podobnými rádrovými odhadmi, ako boli tu urobené pre zvolený "typický" prípad.

Všeobecná formulácia pre trecie sily Ani jeden z týchto modelov nie je vždy perfektný. Trecie sily závislé od rýchlosti majú pôvod v pôsobení prostredia na teleso, a teda pôsobia *lokálne* na všetkých miestach jeho povrchu a sú závislé od lokálnej rýchlosti telesa vzhľadom na prostredie (vzduch, kvapalina). Ak silové pôsobenie prostredia na teleso v mieste \vec{r} na jeho povrchu na plôške dS ,

$$d\vec{F} = \vec{\sigma}(\vec{r}) \cdot \vec{dS}, \quad (228)$$

kde $\vec{\sigma}$ je tenzor napätia charakterizujúci obtekajúce prostredie (a teda závisí od jej lokálnej rýchlosti, tlaku, etc.) a \vec{dS} je vektor plôšky orientovaný v smere vonkajšej normály povrchu telesa, potom celkový príspevok od takýchto síl na teleso musíme vyjadriť ako integrál

$$\vec{F}^n = \int d\vec{F} = \int \vec{\sigma} \cdot \vec{dS}. \quad (229)$$

Podobne nájdeme aj príspevok k momentu síl pôsobiacich na teleso od prostredia,

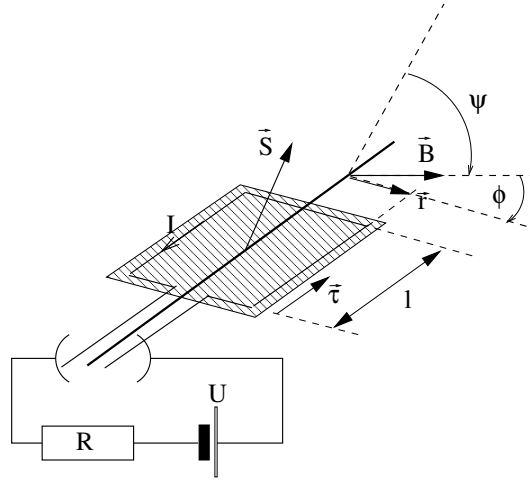
$$\vec{D}^{n,*} = \int (\vec{r} - \vec{r}^*) \times d\vec{F}. \quad (230)$$

3.7.5 Moment sily od jednosmerného elektromotora

Na každý krátky úsek prúdovodiča, ktorým preteká premenný elektrický prúd $i(t)$ a ktorý sa nachádza v magnetikom poli $\vec{B}(t)$ pôsobí Lorentzova sila²

² Na náboj dq pôsobí sila $d\vec{F} = dq\vec{v} \times \vec{B}$, kde \vec{v} je rýchlosť, ktorou sa náboj pohybuje pozdĺž vodiča (tzv. driftová rýchlosť). V krátkom úseku prúdovodiča s prierezom s plochou S a dĺžkou $d\vec{l}$ je náboj $dq = en\vec{S} \cdot d\vec{l}$, kde n je objemová hustota nosičov náboja. Elektrický prúd, t.j. náboj, ktorý prejde vodičom za jednotku času je daný $i = dqn\vec{S} \cdot \vec{v}$, a preto Lorentzovu silu možno napísať v tvare $d\vec{F} = en\vec{S} \cdot d\vec{l}\vec{v} \times \vec{B} = id\vec{l} \times \vec{B}$, pričom sme uvažili, že vektory $d\vec{l}$ aj \vec{v} majú rovnaký smer, daný napr. jednotkovým vektorom \vec{e} , t.j.

$$\vec{S} \cdot d\vec{l}\vec{v} \times \vec{B} = \vec{S} \cdot \vec{e}dlv\vec{e} \times \vec{B} = \vec{S} \cdot \vec{v}d\vec{l} \times \vec{B}$$



Obr. 12: Elektromechanický systém jednoduchého elektromotora.

$$d\vec{F} = i(t)d\vec{l} \times \vec{B}(t) \quad (231)$$

Označme si jednotkový vektor $\vec{\tau}$ ako smer otáčania uhlu ϕ podľa obrázku. Priemet celkového momentu Lorentzovej sily, pôsobiacej na prúdovodič, do smeru osi otáčania bude

$$D(t) = \vec{\tau} \cdot \vec{D}(t) = \vec{\tau} \cdot \int \vec{r}(t) \times d\vec{F} \quad (232)$$

$$= 2\vec{\tau} \cdot \left(\vec{r}(t) \times \left(l i(t) \vec{\tau} \times \vec{B}(t) \right) \right) \quad (233)$$

$$= 2i(t) l \vec{r}(t) \cdot \vec{B}(t) = 2i(t) l r B(t) \cos(\phi), \quad (234)$$

kde integrál v prvom riadku predstavuje integrovanie pozdĺž celého prúdovodiča, $\vec{r}(t)$ je polohový vektor krátko úseku prúdovodiča dl a r v poslednom riadku označuje polomer vinutia na cievke.

Zberače sú postavené tak, aby vždy keď je $\cos(\phi) < 0$ zmenil prúd polaritu tak, aby výsledný moment sily bol vždy kladný a dochádzalo k pretáčaniu. Znamená to, že úloha zberačov je postaviť funkciu $\cos(\phi)$ do absolútnej hodnoty, t.j.

$$D = 2i(t) l r B |\cos(\phi)|. \quad (235)$$

V tomto tvare je ale motor neefektívny, nakoľko pre $\phi \approx \pi/2, 3\pi/2, \dots$ je $D \approx 0$. Preto sa využíva viac závitov, vzájomne posunutých o fázu $\Delta\alpha$,

$$D = \sum_{n=0}^{N-1} 2i(t) l r B |\cos(\phi - n\Delta\alpha)|. \quad (236)$$

Numericky sa možno presvedčiť, že pre veľké N je moment sily motora prakticky nezávislý od aktuálneho natočenia ϕ . Limitný prípad $N \rightarrow \infty, \Delta\alpha \rightarrow 0, N\Delta\alpha = \pi$ možno získať aj priamou integráciou zavedením $\alpha = n\Delta\alpha, \Delta\alpha = \Delta n\pi/N$,

$$D = 2i(t) l r B \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha |\cos(\phi - \alpha)| \quad (237)$$

$$= 2i(t) l r B \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \sin(\alpha) \quad (238)$$

$$= \frac{4}{\pi} N i(t) l r B = K I(t) \quad (239)$$

Tento výsledok sa často používa pri stavaní dynamických modelov zahŕňajúcich jednosmerný elektromotor. V týchto problémoch treba riešiť dynamiku manipulátora spolu s dynamikou elektrických obvodov, s pohybovou rovnicou pre prúd

$$U_Z = Ri(t) + \frac{d\Phi}{dt}. \quad (240)$$

kde U_Z je napätie na zdroji, R je celkový odpor obvodu, Φ je časovo premenný magnetický tok. Magnetický tok má samoindukčnú časť, $L(t)i(t)$, kde $L(t)$ indukčnosť motora, a časť pochádzajúcu z permanentného magnetu, $\int \vec{B}_{mag} \cdot d\vec{S}$. $L(t)$ sa pri pohybe motora môže meniť s časom, čo modifikuje silovým účinkom externého póla magnetu B_{mag} .

Magnetický tok zachytený n -tým závitom je

$$\Phi_n(t) = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS \cos(\psi - n\Delta\alpha) = BS \cos(\phi - \pi/2 - n\Delta\alpha) = BS \sin(\phi - n\Delta\alpha) \quad (241)$$

a jeho príspevok k indukovanému napätiu bude

$$U_n = \text{sgn} \frac{d}{dt} \Phi_n(t) = \text{sgn} BS \cos(\phi - n\Delta\alpha) \dot{\phi}. \quad (242)$$

Kvôli zberačom bude znamienko tohto napätia v obvode vždy, keď je $\cos(\phi - n\Delta\alpha) < 0$ zmenené, čo je značené symbolom “sgn”. Toto opäť vytvára absolútnu hodnotu z funkcie $\cos(\)$,

$$U_n = BS |\cos(\phi - n\Delta\alpha)| \dot{\phi}. \quad (243)$$

Opäť môžeme získať limitu hustého vinutia,

$$U_{ind} = \sum_{n=0}^{N-1} U_n = BS \sum_{n=0}^{N-1} |\cos(\phi - n\Delta\alpha)| \dot{\phi} = \quad (244)$$

$$= BS \dot{\phi} \frac{N}{\pi} \int_0^\pi d\alpha |\cos(\phi - \alpha)| \quad (245)$$

$$= BS \dot{\phi} \frac{2N}{\pi} = K \dot{\phi}, \quad (246)$$

kde sme využili, že $2rl = S$.

Energetické bilancia v elektro-mechanickom systéme

Výskyt identickej konštanty pri indukovanom napätí a pri momente sily motora je principiálne dôležitý - práca, ktorú koná motor je $W_M = \int dt D \dot{\phi}$. Táto musí súvisieť s energiou ktorú dodá batéria. Z rovnice (240) nájdeme pre túto energiu,

$$W_{bat} = \int dt U_Z i(t) = \int dt Ri^2(t) + \int dt U_{ind} i(t). \quad (247)$$

Použitím výsledku (246) nájdeme

$$W_{bat} = \int dt Ri^2(t) + \int dt K \dot{\phi} i(t) = \int dt Ri^2(t) + W_M, \quad (248)$$

kde prvý člen predstavuje ohmické straty v obvode a druhý je presne práca konaná motorom.

Pohybové rovnice jednosmerného elektromotora Je dôležité si uvedomiť, že úplné modelovanie mechanického systému s motormi predstavuje vlastne paralelné riešenie nie len dynamiky mechanických ale aj elektrických stupňov volnosti. Napríklad náš tu študovaný problém predstavujú prepojené diferenciálne rovnice pre uhol pootočenia elektromotora a prúd v riadiacom obvode,

$$I_M \ddot{\phi}(t) = Ki(t) - D_Z(q_i(t)), \quad (249)$$

$$U_Z(t) = RI(t) + K \dot{\phi}(t) \quad (250)$$

kde $D_Z(q_i(t))$ indikuje moment záťaže motora, ktorý môže závisieť od ďalších stupňov voľnosti a teda vyžadovať ďalšie diferenciálne rovnice. V tomto jednoduchom prípade možno prúd priamo vyjadriť z 2. rovnice čo eliminuje problém riešenia dvoch rovníc.

Často je však nutné uvážiť aj samo-indukčnosť závitov, čo vedie k výskytu prvej derivácie prúdu v 2. rovnici a teda k skutočnému systému dvoch prepojených diferenciálnych rovníc.