

3.7 Nepotenciálové sily na pravých stranách LPR.

3.7.1 Zovšeobecnená nepotenciálová sila pre systém itt

V odvodzovaní LPR pre N hmotných bodov sme zaviedli zovšeobecnené nepotenciálové sily

$$Q_i^n = \sum_j \vec{F}_j^n \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

Ich zovšeobecnenie na N itt, vzhľadom na diskusiu v časti (3.3) a s pomocou vyjadrenia pre prácu konanú na itt (rovnica 113), je

$$Q_i^n = \sum_{j=1}^N \left\{ \vec{F}_j^n \cdot \frac{\partial \vec{r}_j^*}{\partial q_i} + \vec{D}_j^{*,n} \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_j}{\partial \dot{q}_i} \right\} \quad (213)$$

kde \vec{F}_j^n je súčet všetkých nepotenciálových síl pôsobiacich na j -te teleso, ktorej pôsobenie sa redukciami prenieslo do ťažiska tohto telesa \vec{r}_j^* a $\vec{D}_j^{*,n}$ je súčet všetkých momentov nepotenciálových síl pôsobiacich na j -te teleso vzhľadom na ťažisko tohto telesa.

V nasledujúcich častiach si priblížime niekoľko príkladov použitia všeobecného vzťahu (213).

3.7.2 Moment sily od motora.

Uvažujme dvojramenný manipulátor, pričom na osi otáčania spájajúcej 1. a 2. rameno nech je umiestnený motor. Jeho stator nech je na 1. ramene a rotor je pevne spojený s 2. ramenom. Nech na 1. rameno pôsobí motor momentom sily $\vec{D}_1(t) = D_M(t)\vec{k}$, potom z akcie reakcie vieme, že na 2. rameno pôsobí moment sily $\vec{D}_2(t) = -D_M(t)\vec{k}$. Tieto momenty predstavujú pôsobenie síl, ktorých súčet je nulový, a preto nie je dôležité, vzhľadom na aké miesto na danom itt sú vyčísľované.

Nájdeme nepotenciálové sily vstupujúce do Lagrangeovej rovnice pre ϕ_1 ,

$$Q_1 = \vec{D}_1 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_1}{\partial \dot{\phi}_1} = \vec{D}_1 \cdot (-\vec{k}) = -D_M(t) \quad (214)$$

A následne aj pre ϕ_2 ,

$$Q_2 = \vec{D}_2 \cdot \frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_2} = \vec{D}_2 \cdot (-\vec{k}) = D_M(t). \quad (215)$$

Vidíme, že pôsobenie momentu sily motora má v týchto dvoch rovniciach opačné znamienko, čo priamo súvisí s zákonom akcie-reakcie.

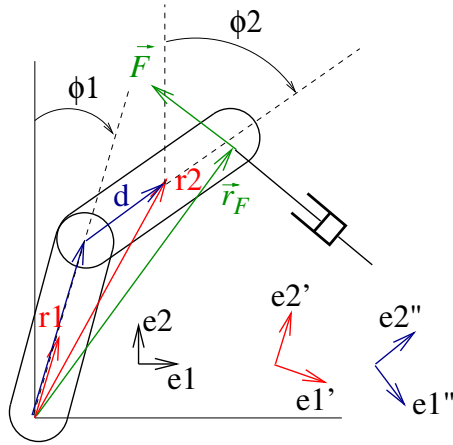
3.7.3 Silové pôsobenie piestov.

Predstavme si, že na 2. rameno dvojramenného manipulátora pôsobí nepotenciálová sila od piestu \vec{F} v mieste $\vec{r}_F = \vec{l} + \vec{d}_F$ (Obr. 11). Pôsobenie sily od piestu zredukujeme na silu

$$\vec{F}_2^n = \vec{F}, \quad (216)$$

pôsobiacu v ťažisku 2. telesa a jej moment sily pôsobiaci vzhľadom na ťažisko,

$$\vec{D}_2^{n,*} = (\vec{d}_F - \vec{d}) \times \vec{F}. \quad (217)$$



Obr. 11: 2-ramenný manipulátor na ktorý pôsobí v mieste \vec{r}_F nepotenciálová sila \vec{F} .

Na 2. itt teda pôsobí aj nepotenciálová sila aj nepotenciálový moment sily, na 1. teleso nepôsobia iné nepotenciálové sily. Pre použitie všeobecného vzťahu (213) budeme ďalej potrebovať nasledovné vzťahy,

$$\frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_2} = -\vec{e}_3 \quad (218)$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}_2}{\partial \dot{\phi}_1} = 0 \quad (219)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2^*}{\partial \phi_2} = \frac{\partial}{\partial \phi_2} (\vec{l} + \vec{d}) = -\vec{e}_3 \times \vec{d} \quad (220)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_2^*}{\partial \phi_1} = \frac{\partial}{\partial \phi_1} (\vec{l} + \vec{d}) = -\vec{e}_3 \times \vec{l}, \quad (221)$$

kde sme využili vyjadrenie malej zmeny (diferenciálu) vektora s konštantnou dĺžkou (narp. \vec{n}) pomocou vektora malého pootočenia $\delta \vec{\phi} = \vec{e} \delta \phi$,

$$\delta \vec{n} = \delta \vec{\phi} \times \vec{n} = \vec{e} \times \vec{n} \delta \phi, \quad (222)$$

z čoho predelením veľkosťou pootočenia nájdeme

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial \phi} = \frac{\delta \vec{\phi}}{\delta \phi} \times \vec{n} = \vec{e} \times \vec{n}. \quad (223)$$

Dosadením rovníc (216,217,218,219, 220,221) do rovnice (213) nájdeme tvar zovšeobecnenej sily vystupujúcej v Lagrangeovej rovnice pre ϕ_1 ,

$$Q_1 = -\vec{k} \cdot (\vec{l} \times \vec{F}), \quad (224)$$

a tvar zovšeobecnenej sily vystupujúcej v Lagrangeovej rovnici pre ϕ_2 ,

$$Q_2 = -\vec{k} \cdot (\vec{d}_F \times \vec{F}). \quad (225)$$

Vidíme, že hoci samotná sila od piestu pôsobí len na druhé teleso, zovšeobecnená sila zodpovedajúca tejto sile vystupuje v LPR pre ϕ_2 ale aj v LPR pre ϕ_1 ! Tento na prvý pohľad prekvapivý výsledok možno pochopiť predstavou, ako by sila piestu pôsobila na pohyb v okamžiku, keď je $\vec{l} \parallel \vec{F}$ pri všeobecnej orientácii \vec{d}_F a v inom okamžiku, keď by bolo $\vec{d}_F \parallel \vec{F}$ pri všeobecnej (generickej) orientácii \vec{l} . V prvom prípade by sa evidentne otáčalo len teleso "2", t.j. ϕ_2 by sa menilo a v druhom prípade by sa točilo teleso "1", t.j. ϕ_1 by sa menilo. Nie je teda až také prekvapivé, že sila \vec{F} vedie na zovšeobecnené sily vystupujúce v oboch LPR.