3 Lagrangeove pohybové rovnice

3.1 Geometrické väzby, virtuálne posunutie a D'Alembertov princíp

Uvažujme systém N hmotných bodov medzi ktorými musia byť splnené rôzne geometrické podmienky - väzby. Príklad geometrickej väzby môže byť požiadavka, že vzdialenosť medzi 1. a 2. hmotným bodom musí byť stále rovná l, t.j.

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}-l=0. \tag{127}$$

Pri použití Newtonových rovníc pre popis pohybu týchto dvoch bodov musíme uvážiť sily reakcií pôsobiace na tieto dva body, ktoré zabezpečia, že táto geometrická podmienka bude v každom čase splnená. Použitie týchto síl reakcií možno obísť, ak namiesto kartézskych súradníc použijeme iné "zovšeobecnené"súradnice, ktoré majú splnenie geometrickej väzby v sebe priamo zabudované. V tomto prípade môžeme miesto dvoch kartézskych súradníc druhého body použiť uhol ϕ medzi spojnicou oboch bodov a osou x. Zadaním súradníc x_1, y_1, ϕ a použitím *parametra l* vieme jednoznačne nájsť súradnice oboch bodov vzťahmi

$$\vec{r}_1 = x_1\vec{i}+y_1\vec{j} \tag{128}$$

$$\vec{r}_2 = (x_1+l\cos(\phi))\vec{i}+(y_1+l\sin(\phi))\vec{j}. \tag{129}$$

Pre dôležitú skupinu väzieb umožňuje Lagrangeov prístup k mechanike formulovať pohybové rovnice priamo v zovšeobecnených súradniciach a teda obchádza potrebu uvažovať niektoré reakčné sily.

Z hľadiska možnosti zavádzania zovšeobecnených súradníc delíme väzby na holonómne a neholonómne.

1. *Holonómne väzby* predstavujú podmienku na hodnoty ktoré môžu nadobúdať geometrické stupne voľnosti vo forme algebraickej rovnice

   $$f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,t)=0, i=1,...,N_v.$$

   Holonómne možno obísť zavedením *zovšeobecnených súradníc* $\{q_i\}_{i=1}^{M}$, $M=3N-N_v$, Pôvodné a zovšeobecnené súradnice spolu súvisia transformáciou

   $$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1,q_2,...,q_M;t), \quad i=1,...,N \tag{130}$$

   $$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i=\sum_j\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\vec{r}_i(q_1,q_2,...,q_M;t)\right)\dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial t}\vec{r}_i(q_1,q_2,...,q_M;t), \quad i=1,...,N \tag{131}$$

   t.j. kým $\vec{r}_i$ sú len funkciami q_i a času, $\vec{v}_i$ sú funkciami $q_i, \dot{q}_i$ a času.

2. *Neholonómne väzby* sú tie, ktoré nie sú holonómne. Dôležité príklady predstavujú väzby dané nerovnosťami $f_i(\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N,t)\geq 0, i=1,...,N_v$ (napr. gulička na povrchu gule v homog. gravitačnom poli, pre ktorej ťažisko musí platiť $|\vec{r}^*|\geq r+R$ ak R je polomer guli tvoriacej povrch, nachádzajúcej sa v počiatku súradnicovej sústavy), alebo obsahujúce rýchlosti (napr. kotúlanie kolesa v 2D rovine, pričom vektor rýchlosti jeho ťažiska musí byť vždy kolmý na os kolesa). Také to väzby nemožno priamočiaro popisovať pomocou zovšeobecnených súradníc, a my sa im ďalej venovať nebudeme.

Uvažujme systém bodov zviazaných holonómnymi väzbami, charakterizovaný polohovými vektormi $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^{N}$ a vhodnými zovšeobecnenými súradnicami $\{q_i\}_{i=1}^{M}$, ktoré spolu súvisia vzťahmi (130). *Virtuálnym posunutím* nazývame malé ľubovolné posunutie bodov $\delta\vec{r}_i$ také, že pritom geometrické obmedzenie (holonómne väzby) na tieto posunutia sa berie fixované pre vybraný okamžik času t. Takáto zmena zodpovedá zmene zovšeobecnených súradníc δq_j

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{132}$$

Pomocou virtuálneho posunutia môžeme sformulovať *D'Alembertov princíp*: Práca vykonaná silami reakcií geometrických obmedzení pri virtuálnom posunutí je nulová. V podstate ide o triviálne tvrdenie, nakoľko sily reakcie sú vždy kolmé na posunutia, a teda práca $\delta W = \sum_i \vec{R}_i \cdot \delta \vec{r}_i$ je nevyhnutne nula v dôsledku skalárneho súčinu kolmých vektorov.

Nech sú pohybové rovnice pre spomínané body v tvare

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad i = 1, ..., N, \tag{133}$$

kde $\vec{f}_i$ je súčet všetkých síl geometrických obmedzení (reakcie) pôsobiacich na i-ty bod a $\vec{F}_i$ súčet všetkých ostatných síl (gravitačné,elektrické) pôsobiacich na tento bod. Potom z D'Alembertovho princípu máme

$$0 = \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta \vec{r}_i \tag{134}$$

Ak by boli $\delta \vec{r}_i$ nezávislé zmeny polohových vektorov, potom rovnosť nule v poslednej rovnice pre ľubovoľnú malú zmenu polohových vektorov dosiahneme splnením rovnice

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i = 0,$$

čo sú Newtonove rovnice *bez* síl reakcií. Dôvod prečo toto nie je pravda je, že virtuálne posunutia $\delta \vec{r}_i$ nie sú ľubovoľné, ale prostredníctvom transformačných rovníc (132) sú dané *ľubovoľnými* posunutiami zovšeobecnených súradníc.

3.2 Lagrangeove pohybové rovnice, Lagrangeova funkcia

Ak použijeme vyjadrenie pre virtuálne posunutie pomocou posunutia zovšeobecnených súradníc

$$\delta \vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \tag{135}$$

v rovnici (134), nájdeme

$$0 = \sum_{ij} \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{136}$$

a keďže δq_j sú nezávislé a ľubovoľné, rovnosť nule posledného výrazu možno dosiahnuť len za podmienky že

$$0 = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, ..., M. \tag{137}$$

Toto predstavuje nie N, ale len M rovníc, čo naznačuje že pôjde o potrebný počet rovníc pre M geometrických stupňov voľnosti.

Nasledujúce odvodenie Lagrangeových rovníc predstavuje úpravu týchto rovníc do jednoduchšieho tvaru v ktorom vystupuje vyjadrenie pre kinetickú a potenciálnu energiu sústavy hmotných bodov pomocou zovšeobecnených súradníc.

Na začiatok si zavedieme pár označení:

- Zovšeobecnená sila
$$Q_j = \sum_j \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \tag{138}$$

- Sily pôsobiace na hmotné body rozdelíme na potenciálové a nepotenciálové. Zovšeobecnené potenciálové sily možno zapísať v tvare
$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{pot} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \tag{139}$$

- V prvom člene rovnice (137) dokážeme identifikovať kinetickú energia systému bodov,
$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} && (140)\\
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} && (141)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 && (142)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K && (143)
\end{aligned}$$

  kde sme využili identitu vyplývajúcu priamo z rovnice (131)
$$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

  a identifikovali kinetickú energiu systému bodov
$$K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 \tag{144}$$

Uvážením týchto označení (a úprav) rovnica (137) nadobudne tvar
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = -\frac{\partial}{\partial q_j} U + Q_j^n, \quad j = 1, \dots, M \tag{145}$$

Lagrangeovu funkciu definujeme ako rozdiel celkovej kinetickej a potenciálnej energie,
$$L(q_i, \dot{q}_i) = K - U \tag{146}$$

vyjadrené ako funkcie zovšeobecnených polôh a rýchlostí. Použitím tejto definície dostáva rovnica (145) tvar *Lagrange-Eulerových rovníc*
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n, \tag{147}$$

pričom sme uvážili, že potenciálna energia nezávisí od rýchlostí , t.j. $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$.
Príklad: Nájdite pohybové rovnice pre hmotný bod v gravitačnom poli viazaný na kružnicu pomocou Lagrangeových rovníc a pomocou Newtonovej pohybovej rovnice s uvážením väzby.

Lagrangeova metóda V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$
\begin{aligned}
K(\phi,\dot{\phi}) &= \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2) && (148)\\
U(\phi) &= mgy = mgr\sin(\phi) && (149)\\
L(\phi,\dot{\phi}) &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2) - mgr\sin(\phi) && (150)\\
\frac{\partial L}{\partial \phi} &= -mgr\cos(\phi) && (151)\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} &= mr^2\dot{\phi} && (152)
\end{aligned}
$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{153}$$

nadobudne tvar

$$mr^2\ddot{\phi} = mgr\cos(\phi) \tag{154}$$

Newtonova metóda Polárne súradnice v 2D:

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) \tag{155}$$

Pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = f\sin(\phi), \quad m\ddot{y} = -mg + f\cos(\phi) \tag{156}$$

kde $\vec{f} = f\cos(\phi)\vec{i} + f\sin(\phi)\vec{j}$ je sila reakcie od kružnice, vždy kolmá na kružnicu. Prepis do polárnych súradníc:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} && (157)\\
\ddot{x} &= \ddot{r}\cos(\phi) - 2\dot{r}\sin(\phi)\dot{\phi} - r\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r\sin(\phi)\ddot{\phi} && (158)\\
\dot{y} &= \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} && (159)\\
\ddot{y} &= \ddot{r}\sin(\phi) + 2\dot{r}\cos(\phi)\dot{\phi} - r\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r\cos(\phi)\ddot{\phi} && (160)
\end{aligned}
$$

Dosadením posledných do (156) a násobením prvej s $\cos(\phi)$ a druhej s $\sin(\phi)$ a ich spočítaním dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin(\phi) + f \tag{161}$$

Naopak, násobením prvej s $\sin(\phi)$ a druhej s $\cos(\phi)$ a ich odpočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{162}$$

Sila f je taká, aby sa r nemenilo s časom, t.j. garantujú $\ddot{r} = 0$ čo z rovnice (161) dá

$$f = -mr\dot{\phi}^2 + mg\sin(\phi). \tag{163}$$

ak bude takáto sila reakcie, bude podľa (161) platiť $\ddot{r} = 0$, t.j. $r(t) = a_1 t + a_2$. Vhodné počiatočné podmienky budú $r(0) = r, \dot{r}(0) = 0$ čo dá $r = const$ a z rovnice (162) konečne aj rovnicu

$$mr\ddot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{164}$$

Posledná rovnica predstavuje pohybovú rovnicu bodu viazaného na kružnici a polomerom r, identickú s pohybovou rovnicou získanou Lagrangeovou metódou.

Príklad: Ukážte, že použitie Lagrangeových rovníc pre popis hmotného bodu v potenciálnom poli s potenciálnou energiou $U(\vec{r})$ vedie na zvyčajné Newtonove rovnice.

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} && (165)\\
L(\vec{r},\vec{v}) &= K-U, \quad \nabla_{\vec{r}}L = -\nabla U = \vec{F}, \quad \nabla_{\vec{v}}L = m\vec{v} && (166)\\
& && (167)
\end{aligned}
$$

a teda Lagrange-Eulerova rovnica

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}L(\vec{r},\vec{v}) - \nabla_{\vec{r}}L(\vec{r},\vec{v}) = 0 \tag{168}$$

vedie k známej Newtonovej rovnici

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{169}$$

Zhrňme si teda postupnosť krokov, ktoré prevádzame pri používaní Lagrangeových rovníc:

1. identifikácia zovšeobecnených súradníc: uhly, vzdialenosti
2. vyjadrenie kinetickej (translačnej a rotačnej) energie každého dielu manipulátora pomocou zavedených zovšeobecnených súradníc.
3. prevedenie parciálnych derivácií Lagrangeovej funkcie a konštrukcia pohybovej rovnice pre každú zovšeobecnenú súradnicu.
4. (A) (numerická) integrácia diferenciálnych rovníc pre $q_i, \dot{q}_i$ pre danú počiatočnú podmienku.
5. (B) pre danú trajektóriu nájsť momenty síl a sily ktoré túto trajektóriu budú realizovať.