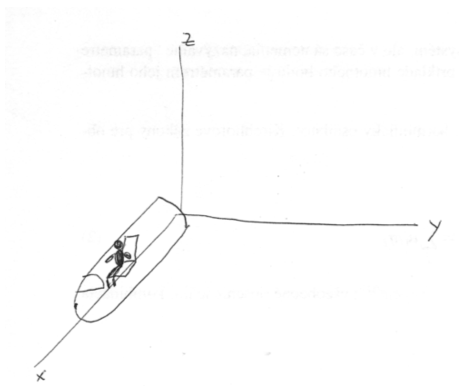
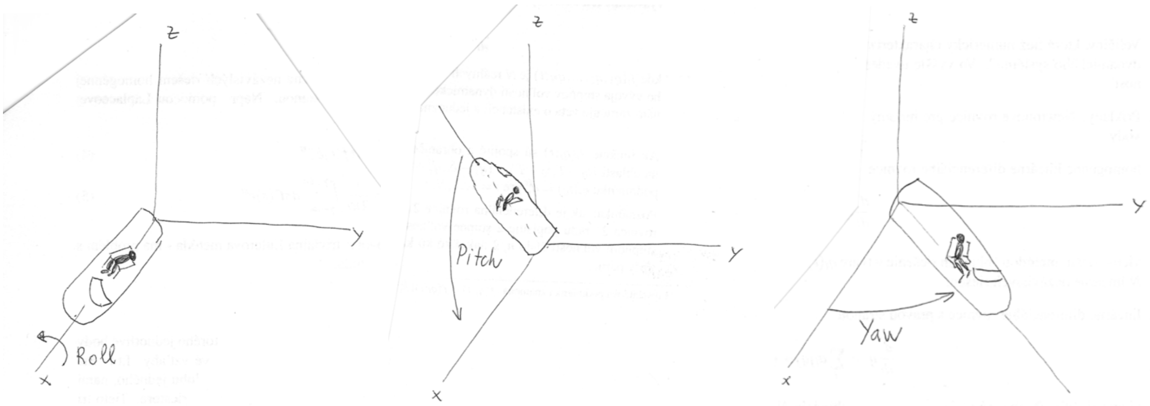


Obrázok 2: Zvolená orientácia sústavy pevne spojenej s lietadlom.



Obrázok 3: Tri možné rotácie vzhľadom na sústavu pevne spojenú s lietadlom.

2 Pohybové rovnice diskrétnych sústav I.

2.1 Ideálne tuhé teleso

(i.t.t.) predstavuje hmotné teleso, rozložité v priestore, ktorého jednotlivé body a ich spájajúce úsečky nemôžu meniť svoje vzdialenosti ani vzájomné uhlové vzťahy. I.t.t. má **6 geometrických stupňov voľnosti** - tri súradnice vektora ukazujúceho na polohu jedného, nami vybraného bodu pevne fixovaného na telese a tri uhly natočenia tohto telesa v priestore. Ako vybraný bod si typicky volíme tri súradnice ťažiska i.t.t., $\vec{r}^* = x^*\vec{i} + y^*\vec{j} + z^*\vec{k}$ a predstavu o týchto pre rôzne telesá máme z predmetu Fyzika 1. Uhly natočenia sú niečo nové; ako príklad si zoberme kabínku letca v lietadle. Tri uhly tzv. 'roll', 'pitch' a 'yaw' sa často používajú v inžinierskych aplikáciach. Nech počiatočná orientácia je taká, že kabínka je vodorovne, svojou osou (špicom lietadla) orientovanou v smere osi x. Do všeobecnej orientácie v priestore je môžeme dostať nasledovnými tromi rotáciami realizovanými vždy vzhľadom na sústavu pevne fixovanú s lietadlom podľa Obrázku 2:

1. **Roll** - pootočenie okolo osi x tak, že pilot už nesedí vodorovne, ale je naklonený aj s celým lietadlom do strany, aj keď os lietadla je stále vo vodorovnej rovine (xy).

2. **Pitch** - pootočenie okolo osi y tak, že os lietadla mieri niekam do výšky, a teda už nie je vo vodorovnej rovine.

3. **Yaw** - pootočenie okolo osi z tak, že lietadlo už neleží v rovine xz.

Problematike orientácie i.t.t. sa budeme neskôr veľa venovať.

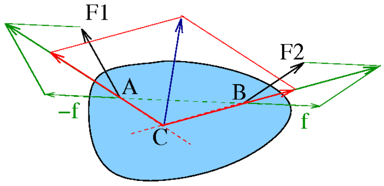
Pri konštrukcii dynamických rovníc tuhého telesa prídeme na to, že okrem súradníc polohy zvoleného bodu telesa a uhlov jeho orientácie sú stupňami voľnosti aj ich prvé časové derivácie. Celkový počet stupňov voľnosti i.t.t. potom bude $2 \times 6 = 12$. Pre pohyb jedného itt potrebujeme teda skonštruovať 12 pohybových rovníc 1. rádu.

2.2 Redukcia síl v i.t.t.

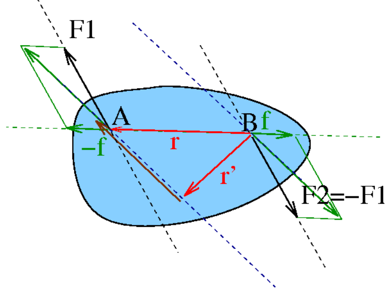
Uvažujme i.t.t. na ktoré v rôznych bodoch pôsobia rôzne orientované sily. Pôsobí každá z nich na dynamiku telesa nezávislým spôsobom alebo ich možno redukovať na menší počet. Inými slovami, musíme pri rôznych počtoch síl a ich orientáciách riešiť nanovo diferenciálne pohybové rovnice, alebo existujú skupiny problémov ktoré predstavujú jednu a tú istú úlohu? Ukážeme si, že postupom nazývaným **redukcia síl** dokážeme, že jediné čo ovplyvňuje pohyb telesa je celkový vektorový súčet všetkých pôsobiacich síl nezávisle od bodu ich pôsobenia a jedna výsledná **dvojica síl**, vedúca na celkový moment všetých síl.

- Redukcia dvoch síl pôsobiacich v dvoch bodoch, A a B, ležiacich na priamke, v smere tejto priamky je najjednoduchšia. Keďže teleso je tuhé, môžeme každú silu presúvať v jej smere t.j. napr. silu z bodu A do bodu B.

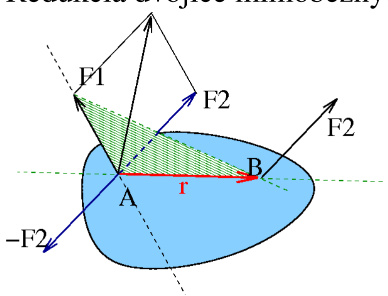
- Redukcia 2 síl v rovine ale nie paralelných s opačnou orientáciou:



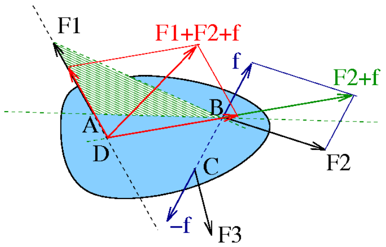
- Dve paralelné sily s opačnou orientáciou a rovnakou veľkosťou redukovať na jednu silu v jednom bode nemôžeme, preto zavádzame pojem dvojice síl. Táto je jednoznačne charakterizovaná momentom sily $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$.



- Redukcia dvojice mimobežných síl na výslednú silu v jednom bode a jednu dvojicu síl:



- Redukcia ľub. 3 síl v 3 bodoch na 2 sily v dvoch bodoch



Uvedomme si, že poloha bodu C na obrázku sa procesom redukcie nezmenila. Ak na začiatku redukcie síl si tento bod môžeme ľubovoľne zvoliť (aj ak v ňom sila nepôsobí - je to vlastne nulová sila) a typicky by sme si tento bod zvolili v ťažisku.

- Indukciou, N síl pôsobiacich v N bodoch vieme predchádzajúcou metódou zredukovať na $N-1$ síl v $N-1$ bodoch tak, že z N vyberieme ľubovoľné 3.

Pomcou týchto konštrukcií je vyššie uvedené tvrdenie o redukcií síl 'dokázané'.

2.3 Úvodné myšlienky k pohybovým rovniciach i.t.t.

Základný pohybový zákon (v rámci nerelativistickej a nekvantovomechanického popisu) je Newtonov pohybový zákon pre hmotný bod:

$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = \vec{F}. \tag{21}$$

I.t.t. nie je hmotný bod a preto rozložíme i.t.t. na infinitezimálne časti s hmotnosťami m_i a polohovými vektormi $\vec{r}_i$.; akcia-reakcia medzi nepohybujúcimi sa časťami $\vec{F}_{ij}$ ("krátko-dosahové sily") a externé sily $\vec{F}_i$ (napr. gravitačná); tým získame N pohybových rovníc pre kažý jeden hmotný element:

$$m_i\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ji}, \quad i = 1, \ldots, N \tag{22}$$

V skutočnosti ale potrebujeme len 12 rovníc pre všetky stupne voľnosti i.t.t.

2.4 1. pohybová rovnica i.t.t. - o pohybe ťažiska

Spočítame všetky rovnice v (22), výsledok je

$$M\frac{d^2}{dt^2}\vec{R}^* \quad = \quad \vec{F} \tag{23}$$

$$\tag{24}$$

kde sme zaviedli výslednicu všetkých vonkajších síl,

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i, \tag{25}$$

a **ťažisko i.t.t.**:

$$\vec{R}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} \tag{26}$$

Príklady polohy ťažísk, integrálny vzorec, výpočet kombinovaním dvoch telies pre ktoré poznáme polohu ťažiska.

2.5 2. pohybová rovnica i.t.t. - o otáčaní i.t.t.

Odvodenie, s výsledkom:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^{*}\times M\dot{\vec{R}}^{*}\right)+\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right) \quad = \quad \vec{D} \tag{27}$$

Komentár:

- Výsledný moment sily je definovaný **vzhľadom na zvolenú súradnicovú sústavu**, t.j.

$$\vec{D}=\sum_{i}\vec{r}_{i}\times\vec{F}_{i} \tag{28}$$

  pričom zahŕňa externé sili pôsobiace v miestach daných polohovými vektormi $\vec{r}_i$; typicky toto predstavuje sumu relatívne malého konečného počtu členov (uchytená pružina, silové pôsobenie kontaktnej sily v mieste dotyku, etc.)

- Moment gravitačných síl sa dá napísať ako

$$\vec{D}_{g}=\sum_{i}\vec{r}_{i}\times m_{i}\vec{g}=\vec{R}^{*}\times m\vec{g}, \tag{29}$$

  kde sme použili definíciu ťažiska. Rovnica 29 hovorí že moment gravitačných síl počítame akoby celá tiaž pôsobila v ťažisku i.t.t.

- Úprava člena na ľavej strane vedúceho k tenzoru zotrvačnosti:

$$\begin{aligned}
\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega} &= \sum_{i}\vec{a}_{i}\times m_{i}(\vec{\omega}\times\vec{a}_{i}) \\
&= \sum_{i}m_{i}\left(\vec{\omega}(\vec{a}_{i}\cdot\vec{a}_{i})-\vec{a}_{i}(\vec{\omega}\cdot\vec{a}_{i})\right) \\
&= \sum_{i}m_{i}((\vec{a}_{i}\cdot\vec{a}_{i})\vec{\vec{1}}-\vec{a}_{i}\vec{a}_{i})\cdot\vec{\omega}
\end{aligned}$$

  kde sme zaviedli **jednotkový tenzor**

$$\vec{\vec{1}}=\vec{i}\vec{i}+\vec{j}\vec{j}+\vec{k}\vec{k}, \tag{30}$$

  s vlastnosťou $\vec{\vec{1}}\cdot\vec{\omega}=\vec{\omega}$. a **tenzor momentu zotrvačnosti i.t.t.**

$$\vec{\vec{I}}=\sum_{i}m_{i}((\vec{a}_{i}\cdot\vec{a}_{i})\vec{\vec{1}}-\vec{a}_{i}\vec{a}_{i}). \tag{31}$$

- Člen $\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^{*}\times M\dot{\vec{R}}^{*}\right)$ sa dá upraviť

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{R}^{*}\times M\dot{\vec{R}}^{*}\right)=\dot{\vec{R}}^{*}\times M\dot{\vec{R}}^{*}+\vec{R}^{*}\times\vec{F}_{t}$$

  Prvý je nula lebo je to vektorový súčin paralelných vektorov a druhý dá moment celkovej sily vzhľadom na ťažisko: ten sa odpočíta od celkového momentu $\vec{D}$ na pravej strane,

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right)=\sum_{i}(\vec{r}_{i}-\vec{R}^{*})\times\vec{F}_{i} \tag{32}$$

  t.j. okrem tvaru (27) môžeme druhú pohybovú rovnicu i.t.t. zapísať aj v tvare

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right)=\vec{D}^{*}, \tag{33}$$

  kde $\vec{D}^{*}$ je výsledný moment síl počítaný **vzhľadom na ťažisko**.

2.6 Tenzor zotrvačnosti

Pripomienka výpočtu polohového vektora ťažiska (vzhľadom na vybranú inerciálnu sústavu pri zadanej polohe a orientácii teles). Defninícia je

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{34}$$

čo vlastne predstavuje tri rovnice pre každú súradnicu zvlášť, napr. pre x-ovú súradnicu

$$x^* = \frac{\sum_i m_i \vec{x}_i}{M}. \tag{35}$$

čo môžeme počítať ako

1. Numericky ako sumu pre dostatočne rozdrobené teleso,
2. Integrálom pre symetrické telesá

$$x^* = \frac{1}{M}\int dxdydz\rho x, \tag{36}$$

   kde ρ je hustota telesa,
3. Skladaním telies pre ktoré polohu ťažiska poznáme,

$$x^* = \frac{m_1 x_1^* + m_2 x_2^*}{m_1 + m_2}, \tag{37}$$

   kde x_1^* a m_1 sú x-sová súradnica 1. telesa a jeho homtnosť, a podobne pre druhé teleso.

Podobné možnosti máme aj pre výpočet tenzora zotrvačnosti. V rámci odvádzania 2. pohybovej rovnice sme si zaviedli **tenzor zotrvačnosti**

$$\vec{\vec{I}} = \sum_i m_i((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i)\vec{\vec{1}} - \vec{a}_i\vec{a}_i). \tag{38}$$

$\vec{\vec{I}}$ môžeme reprezentovať v tvare matice ak vyjadríme polohové vektory všetkých hmotných elementov pomocou ich zložiek, $\vec{a}_i = x_i\vec{i} + y_i\vec{j} + z_i\vec{k}$:

$$I = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i z_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \tag{39}$$

Metódy výpočtu tenzora zotrvačnosti

1. Numericky, priamym implementovaním definície (39).
2. Pre symetrické a jednoduché telesá možno vypočítať integrovaním, napr. prvý element z (39) ako

$$I_{xx} = \int_V dxdydz\rho(x,y,z)\left(y^2 + z^2\right), \tag{40}$$

   kde $\rho(x,y,z)$ je hustota telesa v mieste $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, pričom integrujeme cez celý objem telesa.

   Na prednáške sme spočítali tenzor zotrvačnosti kvádra.

3. Pre teleso pozostávajúce z niekoľkých jednoduchých symetrických telies získame tenzor súčtom tenzorov týchto telies ale vyjadrených vzhľadom na nové ťažisko celkového telesa

$$\vec{\vec{I}} = \vec{\vec{I}}^{(1)} + \vec{\vec{I}}^{(2)} \tag{41}$$

pričom

$$\vec{\vec{I}}^{(1)} = \vec{\vec{I}}^{(01)} + M_1 \left(\vec{r}_{01} \cdot \vec{r}_{01} \vec{\vec{1}} - \vec{r}_{01} \vec{r}_{01} \right) \tag{42}$$

$$\vec{\vec{I}}^{(2)} = \vec{\vec{I}}^{(02)} + M_2 \left(\vec{r}_{02} \cdot \vec{r}_{02} \vec{\vec{1}} - \vec{r}_{02} \vec{r}_{02} \right), \tag{43}$$

kde $\vec{\vec{I}}^{(01)}$ je tenzor zotrvačnosti prvého telesa vzhľadom na jeho ťažisko, $\vec{r}_{01}$ je vektor spájajúci ťažisko celého spojeného telesa a ťažisko prvého telesa a M_1 je hmotnosť prvého telesa; a analogicky pre druhé teleso s indexmi 2. Presun bodu vzhľadom na ktorý je tenzor zotrvačnosti definovaný, t.j. výraz (42) alebo (43), nazývame Steinerova veta pre tenzor zotrvačnosti. Steinerova veta pre moment zotrvačnosti, známa zo základného kurzu fyziky zodpovedá vzťahu pre diagonálne elementy Steinerovej vete pre tenzory.

Dôkaz Steinerovej vety: Majte tenzor $\vec{\vec{I}}^{(01)}$ definovaný vzhľadom na ťažisko tohto telesa, t.j.

$$\vec{\vec{I}}^{(01)} = \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{\vec{1}} - \vec{a}_i \vec{a}_i), \tag{44}$$

kde $\vec{a}_i$ sú polohové vektory hmotných elementov m_i vzhľadom na ťažisko tohto telesa.

Tenzor $\vec{\vec{I}}^{(1)}$ nech je definovaný vzhľadom bod $\vec{r}_1$, ktorého polohový vektor vzhľadom na ťažisko telesa nech je $\vec{d}$. Potom tento tenzor má tvar

$$\vec{\vec{I}}^{(01)} = \sum_i m_i ((\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i) \vec{\vec{1}} - \vec{b}_i \vec{b}_i), \tag{45}$$

kde $\vec{b}_i$ sú polohové vektory hmotných elementov vzhľadom na bod $\vec{r}_1$. Pre tieto prirodzene platí $\vec{b}_i = \vec{a}_i - \vec{d}$, čo dosadíme do 45, a nájdeme,

$$\vec{\vec{I}}^{(01)} = \sum_i m_i ((\vec{b}_i \cdot \vec{b}_i) \vec{\vec{1}} - \vec{b}_i \vec{b}_i), \tag{46}$$

$$\sum_i m_i (((\vec{a}_i - \vec{d}) \cdot (\vec{a}_i - \vec{d}) \vec{\vec{1}} - (\vec{a}_i - \vec{d})(\vec{a}_i - \vec{d})), \tag{47}$$

$$\sum_i m_i (\vec{d} \cdot \vec{d} \vec{\vec{1}} - \vec{d}\vec{d}) + \sum_i m_i ((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) \vec{\vec{1}} - \vec{a}_i \vec{a}_i), \tag{48}$$

$$M (\vec{d} \cdot \vec{d} \vec{\vec{1}} - \vec{d}\vec{d}) + \vec{\vec{I}}^{(01)}. \tag{49}$$

pričom 'krížové členy' sú nulové lebo obsahujú faktory typu $\sum_i m_i \vec{a}_i = 0$.

Na prednáške bolo naznačené skladanie tenzoru pre dva kvádre.

Matica tenzora zotrvačnosti závisí od voľby orientácie osí (ukázané na otáčaní tenkej tyčky) preto musíme maticu udávať vzhľadom na súradnicovú sústavu pevne spojenú s telesom, ktorú budeme označovať bázovými vektormi $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Táto sústava je ale **neinerciálna** - v pohybových rovniciach musíme uvážiť že tieto bázové vektory sa otáčajú v čase. Matematike ktorá takéto otáčanie popíše sa budeme venovať v nasledujúcej časti.