Prednášky z Fyziky procesov
Peter Bokes, zima 2012.
Aktualizácia: 30. septembra 2012

Zápočet: 2× test po max 10 bodov, domáce úlohy spolu 20b, projekt 10b.
Skúška: 50 bodov

Sylaby

(počet hodín na tému je len orientačný)

1. **Dynamické procesy - úvod** (3 hod)
   - Stupne voľnosti, diferenciálne rovnice a jednoznačnosť (a existencia) riešenia [1].
   - Príklady analytického riešenia jednoduchých diferenciálnych rovníc - malé kmity a harmonický oscilátor, Laplaceova transformácia
   - Predstava o numerickom riešení dynamických rovníc.
2. **Pohybové rovnice diskrétnych sústav I.** (3 hod) [3]
   - Definícia a vlastnosti tuhého telesa, redukcia síl.
   - Odvodenie pohybových rovníc tuhého telesa v inerciálnej sústave
   - Tenzor zotrvačnosti
3. **Pohybové rovnice diskrétnych sústav II.** (3 hod)
   - Rotácia vektora, rotácia súradnicového systému.
   - Uhly charakterizujúce orientáciu tuhého telesa.
   - Eulerove pohybové rovnice gyroskopu.
4. **Energia a práca vykonaná na sústave ideálne tuhých telies** (3 hod)
   - Práca celkovej sily a práca momentu síl.
   - Potenciálové a nepotenciálové sily
   - Kinetická energia translačného a rotačného pohybu.
5. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) I.** (3 hod) [3, 4]
   - Geometrické väzby: Holonómne a neholonómne.
   - Princíp virtuálnej práce a LPR pre hmotné body.
   - Lagrangeove pohybové rovnice pre systém ideálne tuhých telies.
6. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) II.** (3 hod)
   - LPR dvojramenného manipulátora
   - LPR manipulátora s plecom
   - LPR pre gyroskop
7. **Lagrangeove pohybové rovnice (LPR) III.** (3 hod)

- Priame a inverzné použitie Lagrangeových rovníc.
- Variačný počet - funkcionálne derivovanie, variačný princíp, Lagrangeove multiplikátory.

8. **Dynamika kontinua I.** (3 hod)
   - Dynamika *N* prepojených hmotných bodov: pojem parciálnch diferenciálnych rovníc
   - Základné pojmy teórie parciálnych diferenciálnych rovníc: počiatočná podmienka, okrajové podmienky, predstava numerického riešenia.
9. **Dynamika kontinua II.** (3 hod)
   - Pojem hustoty, rýchlostného pol'a a hustoty toku.
   - Rovnica kontinuity
   - Fourierov zákon vedenia tepla a pohybová rovnica vedenia tepla.
10. **Dynamika kontinua III.** (3 hod)
    - Tenzor napätia
    - Pohybová rovnica kontinua - Navier-Stokesova rovnica
11. **Hydrodynamika I.** (3 hod)
    - Prúdenie ideálnej kvapaliny - Bernoulliho rovnica
    - Prúdenie stlačitel'nej kvapaliny a plynov, vztlaková sila
12. **Hydrodynamika II.** (3 hod)
    - Dynamická viskozita, prúdenie viskóznej kvapaliny, Stokesov vzorec pre brzdenie.
    - Teória podobnosti a turbulencia.
    - Dynamika pri nízkych Reynoldsových číslach.

Referencie

[1] Stručné uvedenie je napr. v 5. kapitole knihy A. Grega, D. Kluvanec, E. Rajčan, "Matematika pre fyzikov", SPN Bratislava 1974.

[2] Š. Bárta, "Fyzika dynamických procesov" skriptá STU, 2002.

[3] D. Ilkovič, "Fyzika I." Alfa-SNTL (1958).

[4] R. Grepl, "Kinematika a dynamika mechatronických systémøu" CERM, Akademické nakladatelství (2007).

[5] S. Cetinkunt, Mechatronics, John Wiley & Sons, (2007).

[6] `http://www.stanford.edu/class/cs223a/`

[7] `http://arri.uta.edu/popa/robotics/`

[8] `http://www-ee.ccny.cuny.edu/www/web/jxiao/G5501-web.htm`

[9] J. R. Welty, CH. E. Wicks, and R. E. Wilson, "Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer", John Wiley & Sons, Inc., New York 1969.

Úvod

Obsahom prednášok Fyziky dynamických procesov je výklad fyzikálnych princípov a matematických postupov popisu mechanických sústav používaných v automatizácii a robotike. Prototypom takejto sústavy je dvojramenný manipulátor ktorého analýze sa budeme detailne venovať ale aj úlohy pohybu a stability mechanických sústav, ktoré si preberieme na príkladoch Každú takúto diskrétnu mechanickú sústavu môžeme popísať ako systém niekoľkých tuhých telies. Systematický prístup ku konštrukcii diferenciálnych rovníc popisujúcich ich dynamiku je založený na tzv. Lagrangeovej formulácii mechaniky[1, 3, 4, 6, 7, 8, 9].

Často je dôležitou súčasťou popisu diskrétnych mechanických sústav aj jej prostredie, napr. pohyb vo vode alebo vzduchu. Cieľom prednášok bude uviesť základné princípy formulácie dynamiky prostredia - kontinua - vo forme parciálnych diferenciálnych rovníc. Výsledný formalizmus je užitočný nie len pre štúdium prostredia diskrétnych mechanických sústav (napr. plávania telesa v kvapaline), ale aj úloh transportu kvapalín, plynov či tepla[1, 2].

1 Matematický popis dynamického systému

1.1 Dynamický systém

Pod **systémom** budeme rozumieť reálny fyzikálny objekt, ktorého všetky zmeny a pôsobenia na okolie môžeme jednoznačne charakterizovať zadaním istého počtu čísel. Tieto čísla nazývame **stupne voľnosti**. Napríklad pre hmotný bod sú jeho stupňami voľnosti jeho poloha, daná 3 súradnicami alebo polohovým vektorom a jeho rýchlosť, daná vektorom rýchlosti (3 zložky). Hmotný bod má teda dokopy 6 stupňov voľnosti. Pre všeobecnú diskusiu budeme označovať stupne voľnosti ako q_i pričom $i = 1, ..., N$ ich indexuje a N je ich celkový počet.

Pr.: Harmonický oscilátor má 2 stupne voľnosti: x a $v = \dot{x}$.

Veličiny, ktoré tiež numericky charakterizujú systém, ale v čase sa nemenia, nazývame "parametre dynamického systému". Vo vyššie uvedenom príklade je parametrom jeho hmotnosť alebo tuhosť pružiny.

Pod **dynamikou systému** rozumieme proces v čase, keď sa jednotlivé stupne voľnosti menia. **Pohybové rovnice** predstavujú predpis pre výpočet hodnôt stupňov voľnosti v ľubovolnom čase, ak si zvolíme ich hodnotu v nami zvolenom počiatočnom momente. Z hľadiska štúdia dynamiky systému si môžeme zvoliť počiatočné hodnoty stupňov voľnosti ľubovoľne (v rámci ich oboru definície) čo vysvetluje ich samotný názov. Matematicky ich reprezentujeme ako diferenciálne rovnice 1. rádu

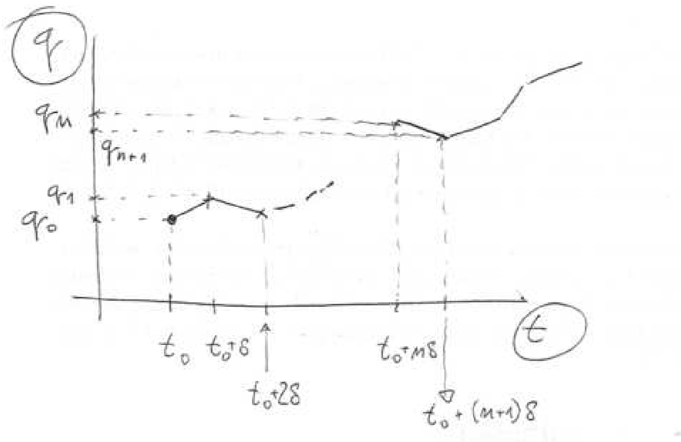
$$\frac{d}{dt} q_i = f_i(q_1, q_2, ..., q_N; t), \quad i = 1, ..., N \tag{1}$$

kde $f_i(q_1, q_2, ..., q_N; t)$ je N reálnych funkcií s $N + 1$ reálnymi premennými. Jednoznačnosť časového vývoja stupňov voľnosti dynamického systému popísaného takýmito diferenciálnymi rovnicami nám zaručuje veta o existencii a jednoznačnosti riešenia:

Ak funkcie $f_i(q_i;t)$ sú spojité a ohraničené a spĺňajú Lipschitzovu podmienku vzhľadom na q_i[1] na oblasti $(t_0 - T, t_0 + T) \times (q_1^0 - \delta_i, q_1^0 + \delta_i) \times ...$ potom existuje práve jedno riešenie ktoré spĺňa podmienku $q_i(t_0) = q_i^0$ pre $i = 1, ..., N$.

Poznámka: ak je diferenciálna rovnica 2. rádu, tak ju vieme previesť na 2 rovnice 1. rádu, t.j. rovnica 2. rádu popisuje 2 stupne voľnosti, a podobne pre n-tý rád. V mechanike často voláme stupňom voľnosti číslo $n/2$ nakoľko ku každej súradnici musíme vždy mať aj rýchlosť, t.j. n je vždy párne.

[1] Lipschitzova podmienka znamená $|f(q_i';t) - f(q_i;t)| \le L \sum_i |q_i' - q_i|, L > 0$



Obrázok 1: K diskretizácii času a numerickému riešeniu diferenciálnej rovnice.

Pr.: Pohybová rovnica harmonického oscilátora: z $ma = F$ sme si ukázali že dostaneme pohybové rovnice pre jeho dva stupne voľnosti x a $v = \dot{x}$:

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x \tag{2}$$
$$\dot{x} = v. \tag{3}$$

1.2 Linearizácia a lineárne dynamické systémy

Lineárne diferenciálne rovnice, pri ktorých sú $f_i(q_1, ..., q_N; t)$ *lineárnymi* funkciami premenných $q_1, ..., q_N$ vieme riešiť Laplaceovou transformáciou. Tu vyžadovaná lineárnosť znamená vlastnosť

$$f_i(q_1, ..., q_j + k, ..., q_N) = f_i(q_1, ..., q_j, ..., q_N) + f_i(q_1, ..., k, ..., q_N) + g(t), \tag{4}$$

pre všetky i, j kde $g(t)$ je od $q_1, ..., q_N$ a k nezávislá funkcia. Laplaceova transformácia je daná vzťahmi,

$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} dt f(t) e^{-st} \tag{5}$$
$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds F(s) e^{st} \tag{6}$$

Úspech Laplaceovej transformácii tkvie v transformovaní derivácií,

$$\dot{x} \to -x(0) + sX(s) \tag{7}$$
$$\ddot{x} \to -\dot{x}(0) - sx(0) + s^2 X(s) \tag{8}$$

čiže lineárne diferenciálne rovnice prevádza na algebraické.

Pr.: Harmonický oscilátor

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x \tag{9}$$
$$\dot{x} = v. \tag{10}$$

prejdú na rovnice

$$
\begin{aligned}
-v(0)+sV(s) &= -\frac{k}{m}X(s) \quad (11)\\
-x(0)+sX(s) &= V(s) \quad (12)
\end{aligned}
$$

ktorých riešením pre $X(s)$ dostaneme

$$X(s)=\frac{x(0)s}{s^2+k/m}+\frac{v(0)}{s^2+k/m} \quad (13)$$

čo po spätnej transformácii dá

$$x(t)=x(0)\cos(\omega t)+(v(0)/\omega)\sin(\omega t), \quad \omega=\sqrt{k/m} \quad (14)$$

Linearizácia dynamického systému pre určenie stability stacionárnych riešení. Nelineárne diferenciálne rovnice vieme analyzovať z hľadiska existencie stacionárnych riešení a správania sa riešení v okolí týchto stacionárnych riešení.
Pr.: Uvažujme nelineárny dynamický systém

$$m\ddot{x}=kx-\alpha x^3, \quad k,\alpha>0. \quad (15)$$

Stacionárne riešenia nájdeme ľahko z podmienky $\ddot{x}=\dot{x}=0$, z čoho dostaneme tri stacionárne riešenia,

$$x_0=0, \quad x_{1,2}=\pm\sqrt{k/\alpha} \quad (16)$$

Pre určenie stability týchto riešení hľadáme linearizáciu pohybovej rovnice v okolí týchto stacionárnych riešení.

V okolí x_0 je linearizovaná rovnica pre výchylku $\delta x(t)$ daná pomocou substitúcie $x(t)=x_0+\delta x(t)$

$$m\ddot{\delta}x(t)=k\delta x(t) \quad (17)$$

riešením napr. pomocou Laplaceovej transformácie nájdeme

$$\delta x(t)=\delta x(0)(\exp(\sqrt{k/m}t)+\exp(-\sqrt{k/m}t))/2,$$

t.j. riešenie bude nestabilné a jeho výchylka rastie exponenciálne v čase.

V okolí x_1 je linearizovaná rovnica pre výchylku $\delta x(t)$ danú substitúciou $x(t)=\sqrt{k/\alpha}+\delta x(t)$,

$$m\ddot{\delta}x(t)=-2k\delta x(t). \quad (18)$$

Riešime opäť Laplaceovou transformáciou a nájdeme, že v protiklade voči predchádzajúcemu prípadu, systém má stabilné oscilácie, a to s frekvenciou $\omega=\sqrt{2k/m}$.

1.3 Numerické metódy riešenia dynamických systémov

Predstava o numerickom riešení diferenciálnych rovníc: triviálna Eulerova metóda (Obrázok 1), jej vylepšenie predstavuje Runge-Kutta metóda. Ukázal som na príklade dynamického systému s 1. stupňom voľnosti:

$$\dot{q}=f(q,t) \quad (19)$$

Diskretizujeme čas: $t_0=0,t_1=\Delta t,t_2=2\Delta t,\ldots,t_n=n\Delta t,\ldots$.
Postupnosť hodnôt ktoré nadobúda stupeň voľnosti: $q(t_0)=q_0,q(t_1)=q_1,\ldots,q(t_n)=q_n,\ldots$.
Približné vyčíslenie derivácie (v rámci Eulerovej metódy)

$$\dot{q}=\frac{q(t_n+\Delta t)-q(t_n)}{\Delta t}=\frac{q_{n+1}-q_n}{\Delta t}$$

nám umožňuje prepísať diferenciálnu rovnicu na rekurentný vzťah

$$q_{n+1}=q_n+\Delta t f(q_n,t_n). \quad (20)$$

Úplne analogicky možno získať maticový rekurentný predpis pre systém s N stupňov voľnosti.