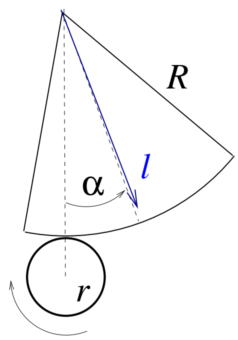
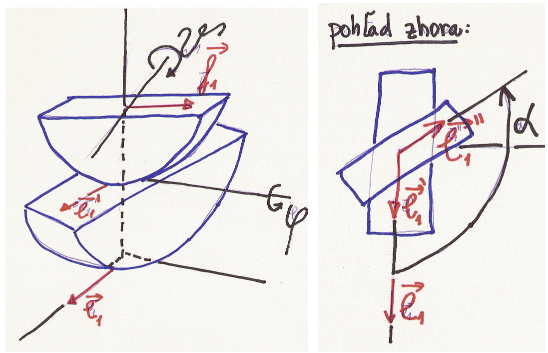
1. Fyzikálne kyvadlo v tvare kruhového výseku s polomerom R a s ťažiskom vo vzdialenom l od jeho osi otáčania je v neprešmykujúcom sa kontakte s valčekom s polomerom r. Os valčeka nemení spoju polohu. Hmotnosť kyvadla nech je M a valčeka m. Nájdite Lagrangeovu funkciu a Lagrangeovu pohybovú rovnicu pre uhlovú výchylku fyzikálneho kyvadla ako stupeň voľnosti tohto systému. Aká bude perióda malých kmitov uhlu α?



2. Na polvalci, položenom valcovou plochou na pevnej podložke, je podobne položený druhý polvalec. V rovnovážnej situácii je horný polvalec pootočený voči spodnému o uhol $\alpha = 3\pi/4$ okolo vertikálnej osi. Nájdite uhol $\vartheta \neq 0$ otočenia horného polvalca okolo vlastnej osi (viď obr.) pri ktorom je horný polvalec zorientovaný tak, že vektor $\vec{f}_1$ (pevne spojený s horným polvalcom, viď obr.) má horizontálny smer, ak je pritom okamžitý uhol natočenia prvého polvalca okolo jeho osi je $\varphi \neq 0$.



Riešenia a bodovania sú na nasledovných stranách.

Pr 1

6b total

$$L(\alpha,\dot\alpha) = \underbrace{\tfrac{1}{2} I^{*} \dot\alpha^2}_{1/2} + \tfrac{1}{2} M v_h^{*2} + \tfrac{1}{2} I_v \dot\varphi^2 \ 1/2 - W(\alpha) \ 1/2$$

volba nuly potenciálnej energie:
$W = 0$ pre $\alpha = \emptyset$

$W(\alpha) = \ldots\ldots$

$= Mg\,h^*(\alpha) = Mg(l - l\cos\alpha)$ 1/2

$v_h^* = l\dot\alpha$ (jednoduché otáčanie)

$I^* + Ml^2 = I_h = \frac{1}{2} MR^2$

$\frac{1}{2} M v_h^{*2} = \frac{1}{2} M l^2 \dot\alpha^2$ 1/2 b

$E_{kk} = \frac{1}{2} I^* \dot\alpha^2 + \frac{1}{2} M v_h^{*2}$

$= \frac{1}{2} I_h \dot\alpha^2 = \frac{1}{4} M R^2 \dot\alpha^2$

Vzťah medzi pootočením kyvadla a valčeka

$R\Delta\alpha = r\Delta\varphi \quad \Big/ \frac{1}{\Delta t},\ \lim_{\Delta t \to \emptyset}$

$R\dot\alpha = r\dot\varphi$

$\dot\varphi = \frac{R}{r}\dot\alpha$ 1/2

$\frac{1}{2} I_v \dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{R^2}{r^2} \dot\alpha^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot\alpha^2$

$L(\alpha,\dot\alpha) = \frac{1}{4} MR^2\dot\alpha^2 + (+) \frac{1}{4} m R^2 \dot\alpha^2 - Mg(l - l\cos\alpha)$

$= \frac{1}{4}(m+M)R^2\dot\alpha^2 - Mg(l - l\cos\alpha)$

Pohybové rovnice:

$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -Mgl\sin\alpha$ 1/3

$\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = \frac{1}{2}(m+M)R^2\dot\alpha$ 1/3

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} = \frac{1}{2}(m+M)R^2\ddot\alpha$ 1/3

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\alpha} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \emptyset$ 1/2

$\frac{1}{2}(m+M)R^2\ddot\alpha + Mgl\sin\alpha = \emptyset$ 1/2

$\ddot\alpha = -\frac{2Mgl}{(m+M)R^2}\sin\alpha$

rov. poloha $\alpha = \emptyset$

linearizácia $\ddot\alpha = -\frac{2Mgl}{(m+M)R^2}\alpha$ 1/2

frekvencia:

$\omega = \sqrt{\frac{2Mgl}{(m+M)R^2}}$

1/2

perioda

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)R^2}{2Mgl}}$

Pr 2

4b total

Postupne natáčame súradnicový sústav voči referenčnej situácii ($\varphi=0, \alpha=0, \vartheta=0$)

$$
\begin{aligned}
&1.\ \ O^{2,\varphi} \longrightarrow \ \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\\
&2.\ \ O^{3,\alpha=3\pi/4} \longrightarrow \ \bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\\
&3.\ \ O^{2,\vartheta} \longrightarrow \ \bar{e}_1'', \bar{e}_2'', \bar{e}_3''\\
&\qquad\qquad\qquad \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3
\end{aligned}
\quad \Bigg\} \ 1b
$$

- požiadavka problému $\vec{f}_1 \perp \bar{e}_3$
- vyjadríme si $\vec{f}_1$ pomocou $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ a $\bar{e}_3$

$$\vec{f}_1 = O^{2,\vartheta}[\bar{e}_1''] = \sum_{i=1}^{3} \bar{e}_i'' R^{2,\vartheta}_{i1} = \sum_{i=1}^{3} O^{3,\alpha}[\bar{e}_i'] R^{2,\vartheta}_{i,1}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \bar{e}_j' R^{3,\alpha}_{ji} R^{2,\vartheta}_{i,1} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \vec{e}_k \underset{1/2}{R^{2,\varphi}_{kj}} \underset{1/2}{R^{3,\alpha}_{ji}} \underset{1/2}{R^{2,\vartheta}_{i1}}$$

$$\vec{f}_1 = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} c\varphi & 0 & -s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ +s\varphi & 0 & c\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\alpha & s\alpha & 0 \\ -s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c\vartheta \\ 0 \\ s\vartheta \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -s\vartheta \\ 0 \\ c\vartheta \end{matrix} \end{pmatrix}$$

1/4 1/4

$$= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} c\varphi & 0 & -s\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ s\varphi & 0 & c\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\alpha\, c\vartheta \\ -s\alpha\, c\vartheta \\ s\vartheta \end{pmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ s\varphi\, c\alpha\, c\vartheta + c\varphi\, s\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\vec{f}_1 = \ldots \bar{e}_1 + \ldots \bar{e}_2 + \underbrace{(s\varphi\, c\alpha\, c\vartheta + c\varphi\, s\vartheta)}_{=\emptyset}\vec{e}_3 \qquad 1/2$$

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} s\varphi\, c\vartheta + c\varphi\, s\vartheta = \emptyset$$

$$tg\,\varphi = \frac{s\varphi}{c\varphi} = \sqrt{2}\, tg\,\vartheta$$

$$\underline{\underline{\varphi = \operatorname{atan}(\sqrt{2}\, tg\,\vartheta)}} \qquad 1/2$$