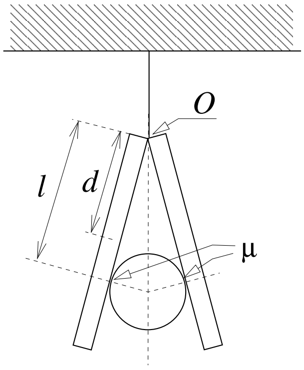
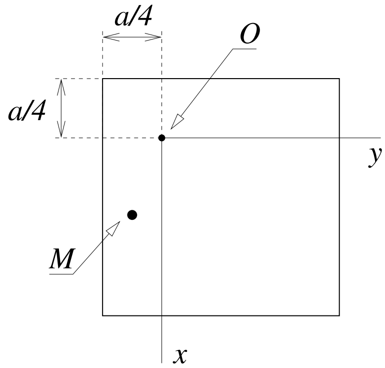
1. Gulička s hmotnosťou M a polomerom r je uchytená medzi dvoma svorkami. Svorky sú spojené na spoločnej osi, ktorá je zavesená na lanku. Medzi svorkami a osou nepôsobí žiaden moment sily, a teda každá zo svoriek pôsobí na guličku len v dôsledku vlastnej hmotnosti m. Aký veľký musí byť koeficient statického trenia μ medzi guličkou a svorkami, ak vzdialenosť ťažiska svorky od osi otáčania je d, a svorky tlačia na guličku vo vzdialenosti l od osi otáčania? (Hrúbku svoriek zanedbajte.)

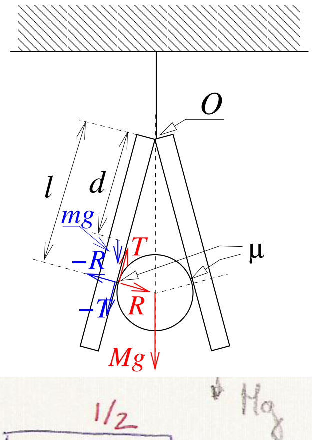


2. Nájdite tenzor zotrvačnosti štvorca s dĺžkou hrany a, zanedbateľnou hrúbkou a hmotnosťou m vzhľadom na osi x, y a z (os z je kolmá na rovinu štvorca) s počiatkom vo vyznačenom bode O. Nájdite súradnice aspoň jedného bodu M na štvorci, kam ak položíme hmotný bod s hmotnosťou $m/2$, tak výsledný tenzor zotrvačnosti štvorca a tohto bodu vzhľadom na O a vyznačené osi bude diagonálny.
Tenzor zotrvačnosti kvádra s hranami a, b, c je

$$\overset{\leftrightarrow}{I}_k = \frac{m}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix}.$$



Riešenia a bodovania sú na nasledovných stranách.



1/2

$\boxed{\tan\varphi = \frac{r}{l}}$

gulička:

$\vec{F} = M\vec{g} + \vec{R}_L + \vec{T}_L + \vec{R}_P + \vec{T}_P$

$F_x = R\cos\varphi - R\cos\varphi + T\sin\varphi - T\sin\varphi = 0$

$F_y = -Mg - 2R\sin\varphi + 2T\cos\varphi = 0$

1/2 1/2 1/2

$D_z = rT - rT = 0$

symetria: $\boxed{\begin{array}{l} R_{Lx} = -R_{Px} \quad \text{etc.} \\ R_{Ly} = R_{Py} \end{array}}$ 1/2

$\boxed{T = \mu R}$ v kritickej situácii

1/2

$T\cos\varphi = R\sin\varphi + Mg/2$

$\mu R\cos\varphi = R\sin\varphi + Mg/2$

$\mu = \tan\varphi + \frac{Mg}{2R\cos\varphi}$

$= \tan\varphi + \frac{Mg\,l}{2d\,mg\sin\varphi\cos\varphi}$

*

svorka (ľavá):

$\vec{F} = m\vec{g} - \vec{R}_L - \vec{T}_L + \vec{F}_{os}$

$F_x = -R\cos\varphi - T\sin\varphi + F_{os,x} = 0$

$F_y = +R\sin\varphi - T\cos\varphi + F_{os,y} \cancel{-mg} = 0$

D_z (vzhľadom na os otáčania)

$D_z = -Rl + d\,mg\sin\varphi = 0 \longrightarrow R = \frac{d\,mg\sin\varphi}{l}$

1/2 1/2 + 1/2

* $\mu = \frac{r}{l} + \frac{Ml}{2dm\sin\varphi\cos\varphi}$

$\sin\varphi = \frac{r}{\sqrt{r^2+l^2}} \qquad \cos\varphi = \frac{l}{\sqrt{r^2+l^2}}$

$\sin\varphi\cdot\cos\varphi = \frac{rl}{r^2+l^2}$

$= \frac{r}{l} + \frac{M}{2md}\cdot\frac{r^2+l^2}{r}$ 1/2

Pr 2

$$\overline{\overline{I}}^{*}_{\breve{S}} = \frac{m}{12}\begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} \quad 1b$$

vektor vysunutia ťažiska

$$\bar{d} = \frac{a}{4}(\bar{i} + \bar{j}) \qquad \underbrace{\bar{d}\cdot\bar{d} = 2\cdot\frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{8} \qquad \bar{d}\bar{d} = \frac{a^2}{16}\left(\bar{i}\bar{i} + \bar{j}\bar{j} + \bar{i}\bar{j} + \bar{j}\bar{i}\right)}_{1b}$$

1/2b

$$\Delta\overline{\overline{I}} = m\left(\bar{d}\cdot\bar{d}\,(\overline{\overline{1}}) - \bar{d}\bar{d}\right)$$

$$\overline{\overline{I}}_{\breve{S}} = \overline{\overline{I}}^{*}_{S} + m\begin{pmatrix} \frac{a^2}{16} & -\frac{a^2}{16} & 0 \\ -\frac{a^2}{16} & \frac{a^2}{16} & 0 \\ 0 & 0 & a^2/8 \end{pmatrix} = \frac{m}{4}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} & -\frac{a^2}{4} & 0 \\ -\frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & a^2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) \end{pmatrix}$$

1b

ak pridáme $M = (x, y)$ s $m/2$ bude

$$\Delta\overline{\overline{I}}_M = \frac{m}{2}\left((x^2 + y^2)(\bar{i}\bar{i} + \bar{j}\bar{j} + \bar{k}\bar{k}) - x^2\bar{i}\bar{i} - y^2\bar{j}\bar{j} - xy(\bar{i}\bar{j} + \bar{j}\bar{i})\right)$$

$$= \frac{m}{2}\begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \quad 1b$$

celkovo

$$\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{I}}_{\breve{S}} + \Delta\overline{\overline{I}}_M = \frac{m}{4}\begin{pmatrix} \frac{7}{12}a^2 + 2y^2 & -\frac{a^2}{4} - 2xy & 0 \\ -\frac{a^2}{4} - 2xy & \frac{7}{12}a^2 + 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(x^2 + y^2) + a^2\frac{7}{6} \end{pmatrix}$$

aby boli off-diagonals nulové

$$-\frac{a^2}{4} - 2xy = 0 \qquad \text{napr.} \quad x = a/2$$

$$xy = -\frac{a^2}{8} \quad 1/2b \qquad y = -a/4$$