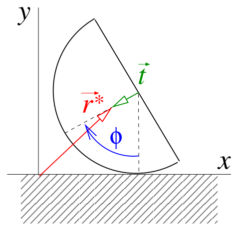
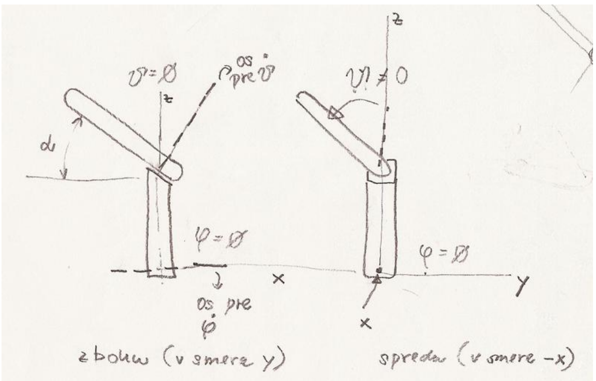
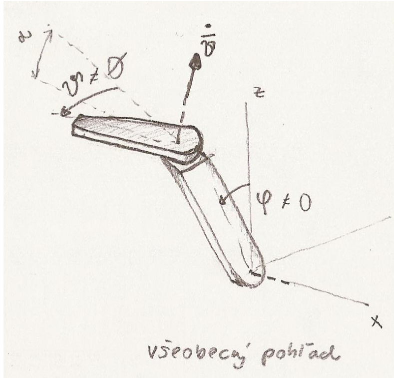
1. Povalček s polomerom R, hmotnosťou m, a známou vzdialenosťou jeho ťažiska od osi valca $t = |\vec{t}|$ sa kolíše na vodorovnej podložke. Moment zotrvačnosti vzhľadom na os otáčania prechádzajúcu jeho ťažiskom je I^*. Nájdite Lagrangeovu funkciu a Lagrangeovu pohybovú rovnicu pre uhol pootočenia polvalčeka ϕ. S akou frekvenciou sa bude valček prevalovať? Pomôcka: Polohový vektor ťažiska si vyjadriťe cez bod dotyku polvalčeka s rovniou a polohového vektora osi valca.



2. 



Dvojrammenný manipulátor má naklopenú os otáčania druhého ramena vzhľadom na prvé rameno o nemenný uhol α (viď. obr.). Nájdite vyjadrenie pre koncový bod manipulátora pomocou stupňov voľnosti ϑ, ϕ a parametrov α, l a d, kde l je dĺžka prvého ramena a d je dĺžka druhého ramena. Nájdite vyjadrenie pre celkový vektor uhlovej rýchlosti druhého ramena pomocou jednotkových vektorov pevne spojených s druhým ramenom (t.j. bázou $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$) pomocou stupňov voľnosti ϑ, ϕ, ich rýchlostí a parametrov α, l.

Pr-2

1. φ okolo $\times$ $+\sigma^{\varphi,1}$ 1/2
2. α okolo $+\sigma^{\alpha,2}$ y 1/2
3. ϑ okolo z $+\sigma^{\vartheta,3}$ 1/2

koncový bod

$F = \ell\,\bar{e}_3' - d\,\bar{e}_1''' = \bar{f}_1$ 1/2

$\dot{\vec{\varphi}} = \dot{\varphi}\,\bar{e}_1 = \dot{\varphi}\,\bar{e}_1'$

$\dot{\vec{\vartheta}} = \dot{\vartheta}\,\bar{f}_3 = \dot{\vartheta}\,\bar{e}_3''$

$\bar{\omega} = \dot{\vec{\varphi}} + \dot{\vec{\vartheta}} = \underset{1/2}{\dot{\varphi}\,\bar{e}_1} + \dot{\vartheta}\,\bar{f}_3$ 1/2

---

a) F v $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$

$$\bar{e}_3' = \sigma^{1,\varphi}[\bar{e}_3] = (-\sin\varphi\,\underset{\bar{e}_2}{\bar{e}_3} + \cos\varphi\,\bar{e}_3)\,B$$ 1/2

$$= \sum_i \bar{e}_i R^{1,\varphi}_{i3} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}$$

$$\bar{f}_1 = \sigma^{3,\vartheta}[\bar{e}_1'']$$

$$= \sum_i \bar{e}_i'' R^{3,\vartheta}_{i1} = \sum_i \sigma^{\alpha,2}[\bar{e}_i'] R^{3,\vartheta}_{i1} = \sum_{i,j} \bar{e}_j' R^{\alpha,2}_{ji} R^{\vartheta,3}_{i1} = \sum_{i,j} \sigma^{\varphi,1}[\bar{e}_j] R^{\alpha,2}_{ji} R^{\vartheta,3}_{i1}$$

$$= \sum_{i,j,k} \bar{e}_k R^{\varphi,1}_{kj} R^{\alpha,2}_{ji} R^{\vartheta,3}_{i1}$$ 1/2 (...)

$$= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\vartheta & -s\vartheta & 0 \\ s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\alpha\, c\vartheta \\ s\vartheta \\ -s\alpha\, c\vartheta \end{pmatrix} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\begin{pmatrix} c\alpha\, c\vartheta \\ c\varphi\, s\vartheta + s\varphi\, s\alpha\, c\vartheta \\ s\varphi\, s\vartheta - s\alpha\, c\vartheta\, c\varphi \end{pmatrix}$$

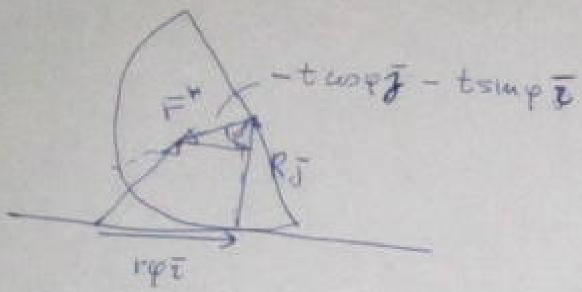
$$F = -d\,c\alpha\, c\vartheta\,\bar{e}_1 + (\ell s\varphi - d(c\varphi\, s\vartheta + s\varphi\, s\alpha\, c\vartheta))\,\bar{e}_2 + (\ell c\varphi - d(s\varphi\, s\vartheta - s\alpha\, c\vartheta\, c\varphi))\,\bar{e}_3$$

$$\bar{e}_1' = \sigma^{-\alpha,2}[\bar{e}_1''] = \sum_i \bar{e}_i'' R^{-\alpha,2}_{i1} = \sum_i \sigma^{-\vartheta,3}[\bar{f}_i] R^{-\alpha,2}_{i1} = \sum_{i,j} \bar{f}_j R^{-\vartheta,3}_{ji} R^{-\alpha,2}_{i1}$$ 1/2

$$= (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)\begin{pmatrix} c\vartheta & s\vartheta & 0 \\ -s\vartheta & c\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c\alpha & 0 & -s\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ s\alpha & 0 & c\alpha \end{pmatrix} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)\begin{pmatrix} c\vartheta\, c\alpha \\ -s\vartheta\, c\alpha \\ s\alpha \end{pmatrix}$$ 1/2

$\bar{\omega} = \dot{\varphi}\, c\vartheta\, c\alpha\,\bar{f}_1 + (-s\vartheta\, c\alpha\,\bar{f}_2\,\dot{\varphi}) + (s\alpha\,\dot{\varphi} + \dot{\vartheta})\,\bar{f}_3$ ✓

Pr1



$$F^* = r\varphi\,\bar{i} + (R - t\cos\varphi)\,\bar{j} - t\sin\varphi\,\bar{i} \quad \checkmark \quad 1/2$$

$$\bar{v}^* = (r\dot{\varphi} - t\cos\varphi\,\dot{\varphi})\,\bar{i} + t\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,\bar{j}$$

$$|\bar{v}^*|^2 = r^2\dot{\varphi}^2 - 2rt\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 + t^2\dot{\varphi}^2 \quad 1/2$$

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{1}{2}\tilde{I}\dot{\varphi}^2 - mrt\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - mg(R - t\cos\varphi) \quad 1$$

$$\tilde{I} = m(R^2 + t^2) - I^*$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgt\sin\varphi + mrt\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \tilde{I}\dot{\varphi} - 2mrt\cos\varphi\,\dot{\varphi} \quad 1/2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \tilde{I}\ddot{\varphi} + 2mrt\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2mrt\cos\varphi\,\ddot{\varphi} \quad 1/2$$

<u>LPR:</u> $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad 1/2$

$$\tilde{I}\ddot{\varphi} - 2mrt\cos\varphi\,\ddot{\varphi} + mrt\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + mgt\sin\varphi = 0 \quad 1/2$$

<u>Linearizácia:</u> rovnovážny stav $\varphi \equiv 0$

$$\tilde{I}\ddot{\varphi} - 2mrt\ddot{\varphi} - mgt\underbrace{\sin\varphi}_{\sim\varphi} = 0 \quad 1/2$$

$$(\tilde{I} - 2mrt)\ddot{\varphi} = -mgt\varphi$$

$$\ddot{\varphi} = -\frac{mgt}{\tilde{I} - 2mrt}\varphi = -\overbrace{\frac{mgt}{m(R-t)^2 + I^*}}^{\Omega^2}\varphi$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{mgt}{m(R-t)^2 + I^*}} \quad 1/2$$