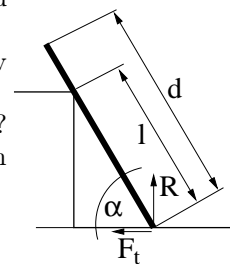


1. Doska dlhá  $d$  s hmotnosťou  $m$  sa opiera vo vzdialenosti  $l$  o schod (vid. obr). Medzi doskou a podlahou je trenie nenulové, trenie medzi schodom a doskou možno zanedbať.

- (1) Pre aký uhol  $\alpha_{max}$  je trecia sila medzi doskou a podlahou ( $F_t$ ), ktorá udržiava dosku v pokoji, maximálna?  
 (2) Aký musí byť koeficient statického trenia pre kontakt podlahy s doskou v tomto prípade?  
 (3) Zabezpečí táto hodnota koeficientu trenia stabilitu dosky opretej pod ľubovoľným uhlom?



**Re:** (1) Trecia sila ktorá zabezpečí stacionárnosť pre uhol  $\alpha$  je

$$F_t = \frac{d}{2l} G \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \frac{d}{4l} G \sin(2\alpha),$$

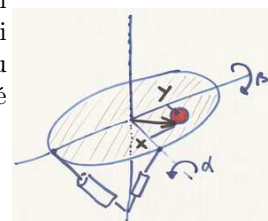
a nadobúda maximum pre  $\alpha_m = \pi/4$ .

- (2) Koeficient statického trenia  $\mu$  musí byť v situácii (1) prinajmenšom

$$\mu = \frac{F_t}{R} = \frac{1}{2} \frac{\sin(2\alpha)}{2l/d - \cos^2(\alpha)}$$

- (3) Nie, pretože hoci pri  $\mu = \pi/2$  je potrebná maximálna trecia sila, pre klesajúci uhol je normálová sila  $R$  menšia čo vyžaduje väčší koeficient trenia na vyvinutie dostatočne veľkej trecej sily čo dosku ustabilizuje. (Alebo matematicky,  $d\mu/d\alpha = 0$  pre  $\alpha < \pi/2$ .)

2. Kruhovú dosku je naklápaná dvomi piestami tak, že jej naklonenie charakterizujeme dvomi uhlami  $\alpha$  a  $\beta$  zodpovedajúcim otočeniu okolo osi  $x$  (o  $\alpha$ ) a následne okolo pootočenej osi  $y$  (o  $\beta$ ). Aká bude zložka gravitačného zrýchlenia v rovine kruhu, pôsobiaca na guľičku nachádzajúcu sa na tomto kruhu v mieste  $(x, y)$  vzhľadom na súradnicové osi pevne spojené s kruhom? Pre  $\alpha = \beta = 0$  je kruhová doska vo vodorovnej referenčnej polohe.

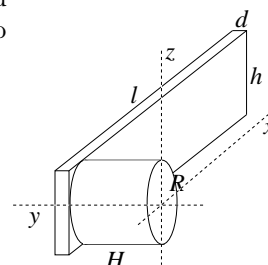


**Re:** V báze vektorov pevne spojenou s kruhovou doskou nájdeme

$$\begin{aligned} \vec{g} &= \sum_{ij} \vec{f}_j R_{ji}^{-\beta, 2} R_{i3}^{-\alpha, 1} (-g) = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) \begin{pmatrix} c\beta & 0 & -s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\beta & 0 & c\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ s\alpha \\ c\alpha \end{pmatrix} (-g) \\ &= gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2 - gc\alpha c\beta \vec{f}_3 \end{aligned}$$

t.j. v rovine kruhu je zložka gravitačného zrýchlenia  $\vec{g}_{||} = gc\alpha s\beta \vec{f}_1 - gs\alpha \vec{f}_2$ .

3. Nájdite polohový vektor ťažiska ramena manipulátora s motorom vzhľadom na sústavu súradníc na obrázku. Rameno môžeme modelovať homogénnou doskou s rozmermi  $h, d, l$  o hmotnosti  $m$  a motor ako homogénny valec s výškou  $H$ , polomerom  $R$  a hmotnosťou  $M$ .



**Re:**

$$\vec{r}^* = \frac{\vec{r}_1^* m + \vec{r}_2^* M}{m + M} = \left( (MH/2 + m(H + d/2))\vec{j} + m(l/2 - R)\vec{i} \right) / (m + M)$$