- Prvý príklad: hmotný bod v 3D pohybujúci sa v potenciálnom poli s potenciálnou energiou $U(\vec{r})$:

$$K = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} \tag{91}$$
$$L(\vec{r},\vec{v}) = K-U, \quad \nabla_{\vec{r}}L = -\nabla U = \vec{F}, \quad \nabla_{\vec{v}}L = m\vec{v} \tag{92}$$
$$\tag{93}$$

a teda Lagrange-Eulerova rovnica

$$\frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}L(\vec{r},\vec{v}) - \nabla_{\vec{r}}L(\vec{r},\vec{v}) = 0 \tag{94}$$

vedie k známej Newtonovej rovnici

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}. \tag{95}$$

- Druhý príklad: hmotný bod v gravitačnom poli viazaný na kružnicu

Lagrangeova metóda V rámci Lagrangeovej formulácie máme

$$K(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) \tag{96}$$
$$U(\phi) = mgy = mgr\sin(\phi) \tag{97}$$
$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - mgr\sin(\phi) \tag{98}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr\cos(\phi) \tag{99}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} \tag{100}$$

a teda Euler-Lagrangeové rovnica

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \tag{101}$$

nadobudne tvar

$$mr^2\ddot{\phi} = mgr\cos(\phi) \tag{102}$$

Newtonova metóda Polárne súracnice v 2D:

$$x = r\cos(\phi), \quad y = r\sin(\phi) \tag{103}$$

Pohybové rovnice

$$m\ddot{x} = f\sin(\phi), \quad m\ddot{y} = -mg + f\cos(\phi) \tag{104}$$

kde $\vec{f} = f\cos(\phi)\vec{i} + f\sin(\phi)\vec{j}$ je sila reakcie od kružnice, vždy kolmá na kružnicu. Prepis do polárnych súradníc:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\dot{\phi} \tag{105}$$
$$\ddot{x} = \ddot{r}\cos(\phi) - 2\dot{r}\sin(\phi)\dot{\phi} - r\cos(\phi)\dot{\phi}^2 - r\sin(\phi)\ddot{\phi} \tag{106}$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\dot{\phi} \tag{107}$$
$$\ddot{y} = \ddot{r}\sin(\phi) + 2\dot{r}\cos(\phi)\dot{\phi} - r\sin(\phi)\dot{\phi}^2 + r\cos(\phi)\ddot{\phi} \tag{108}$$

Dosadením posledných do (104) a násobením prvej s $\cos(\phi)$ a druhej s $\sin(\phi)$ a ich spočítaním dostaneme

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = -mg\sin(\phi) + f \tag{109}$$

Naopak, násobením prvej s $\sin(\phi)$ a druhej s $\cos(\phi)$ a ich odpočítaním máme

$$mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{110}$$

Sila f je taká, aby sa r nemenilo s časom, t.j. garantujú $\ddot{r} = 0$ čo z rovnice (109) dá

$$f = -mr\dot{\phi}^2 + mg\sin(\phi). \tag{111}$$

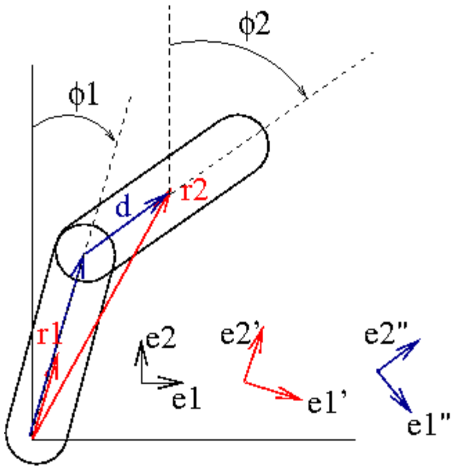
ak bude takáto sila reakcie, bude podľa (109) platiť $\ddot{r} = 0$, t.j. $r(t) = a_1 t + a_2$. Vhodné počiatočné podmienky budú $r(0) = r, \dot{r}(0) = 0$ čo dá $r = const$ a z rovnice (110) končne aj rovnicu

$$mr\ddot{\phi} = mg\cos(\phi) \tag{112}$$

Posledná rovnica predstavuje pohybovú rovnicu bodu viazaného na kružnici a polomerom r, identickú s pohybovou rovnicou získanou Lagrangeovou metódou.

- Program dynamiky manipulátorov:

  1. identifikácia zovšeobecnených súradníc: uhly, vzdialenosti
  2. vyjadrenie kinetickej (translačnej a rotačnej) energie každého dielu manipulátora pomocou zavedených zovšeobecnených súradníc.
  3. prevedenie parciálnych derivácií Lagrangeovej funkcie
  4. (A) (numerická) integrácia diferenciálnych rovníc pre $q_i, \dot{q}_i$ pre danú počiatočnú podmienku.
  5. (B) pre danú trajektóriu nájsť momenty síl a sily ktoré túto trajektóriu budú realizovať.



Obrázok 5: 2-ramenný manipulátor a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

2.12 Lagrangeove rovnice pre sústavy i.t.t.

- Zovčeobecnenie D'Alembertovho princípu zo systému hmotných bodov na systém i.t.t. predstavuje okrem úvah o virtuálnom posunutí polohového vektora ťažiska i-teho telesa, $\delta\vec{r}_i^*$, zahrnutie 2. pohybovej rovnici spolu s jeho vituálnym pootočením $\delta\vec{\phi}_i$, čím pre celkovú prácu síl reakcií dostaneme,
$$W = \sum_i \left(m_i \frac{d}{dt}\vec{v}_i^* - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i^* + \left(\frac{d}{dt}\left(\vec{I}\cdot\vec{\omega}_i \right) - \vec{D}_i \right) \cdot \delta\vec{\phi}_i = 0. \tag{113}$$
Analogickým postupom ako v prípade hmotných bodov potom zavádzame Lagrangeovu funkciu ako rozdiel celkovej kinetickej energie sústavy i.t.t. a celkovej potenciálnej energie
$$L(q_1,\dots,q_M,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_M) = \sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_i\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}_i - U(q_1,\dots,q_M). \tag{114}$$
Samotné Euler-Lagrangeove rovnice sú už identické tým, ktoré sme si odvodili pre systém hmotných bodov.

- Rozcvička: Pohybová rovnica fyzikálneho kyvadla Lagrangeovou metódou.
Výsledná Lagrangeova funckia:
$$L(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}(I+md^2)\dot{\phi}^2 - mg(d - d\cos(\phi)).$$
a z toho Lagrangeova pohybová rovnica
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} - \frac{\partial L}{\partial\phi} = 0 \Rightarrow (I+md^2)\ddot{\phi} = -mgd\sin(\phi)$$

2.13 Dvoj-ramenný manipulátor

(Je aj v skriptách, ale iným postupom)

1. Manipulátor má dva geometrické stupne voľnosti: ϕ_1,ϕ_2 ako uhly osí ramien od vertikálneho smeru (obrázok).

2. Označíme polohy ťažísk $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ vzhľadom na *interciálnu sústavu*, ktorej počiatok zvolíme v bode otáčania 1. ramena. Označíme polohu osi otáčania 2. telesa vektorom $\vec{l}$ a polohu ťažiska 2. telesa vzhľadom na os otáčania 2. telesa vzhľadom na 1. teleso vektorom $\vec{d}$. Evidentne $\vec{r}_2 = \vec{l} + \vec{d}$.

3. Translačná kinetická energia 1. telesa bude $\frac{1}{2}m_1|v_1|^2$ kde

$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \dot{\phi}_1 \vec{e}\,'_3 \times \vec{e}\,'_1 r_1 = \dot{\phi}_1 r_1 \vec{e}\,'_2 \tag{115}$$
$$|\vec{v}_1|^2 = r_1^2 \dot{\phi}_1^2 \tag{116}$$

4. Rotačná kinetická energia 1. telesa $\frac{1}{2}\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{\omega}_1$ kde skalárny súčin vyčíslime v sústave $\vec{e}\,'_i$ nakoľko v tejto sú súradnice tenzora konštantné ($\vec{e}\,'_i$ sú pevne spojené s 1. telesom a zorientované tak, že tento tenzor je v v nich diagonálny.) Potom máme pre túto zložku energie

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\phi}_1^2 \tag{117}$$

kde $I_1 = \vec{e}\,'_3 \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{e}\,'_3$.

5. Translačná kinetická energia 2. telesa bude $\frac{1}{2}m_2|v_2|^2$ kde

$$\vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + \vec{\omega}_2 \times \vec{d} \tag{118}$$
$$= \dot{\phi}_1 l \vec{e}\,'_2 + \dot{\phi}_2 d \vec{e}\,''_2 \tag{119}$$
$$|\vec{v}_2|^2 = \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 = l^2 \dot{\phi}_1^2 + d^2 \dot{\phi}_2^2 + 2dl\dot{\phi}_1 \dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) \tag{120}$$

6. Rotačná kinetická energia 2. telesa bude podobne ako pri 1. telese jednoducho $\frac{1}{2} I_2 \dot{\phi}_2^2$.

7. Kinetická energia oboch i.t.t. prejde po úpravách do tvaru

$$K = \frac{1}{2}\tilde{I}_1(\dot{\phi}_1)^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2(\dot{\phi}_2)^2 + M\cos(\phi_1 - \phi_2)\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2$$

kde $\tilde{I}_1 = I_1 + m_1 r_1^2 + m_2 l^2$, $\tilde{I}_2 = I_2 + m_2 d^2$ a $M = dlm_2$.

8. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = r_1^* m_1 g \cos(\phi_1) + (l\cos(\phi_1) + d_2\cos(\phi_2)) m_2 g$$

9. Odvodiť obe Lagrangeove pohybové rovnice.