2.10 Geometrické väzby, virtuálne posunutie a D'Alembertov princíp

Uvažujme systém N hmotných bodov, analogické vzťahy platia aj pre systém N i.t.t. no treba paralelne viesť aj súradnice a rovnice pre otáčanie.

- Sily reakcie - splnenie geometrickej reštrikcie pohybu, tzv. *väzby*:
  1. Holonómne väzby: $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0, i = 1, ..., N_v$, jednoducho redukujú stupne voľnosti.
  2. Neholonómne väzby: dané nerovnosťami $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \geq 0, i = 1, ..., N_v$(napr. gulička na povrchu gule v homog. gravitačnom poli), alebo obsahujúce rýchlosti (napr. kotúlanie kolesa v 2D rovine)

- Holonómne - veľmi časté pri manipulátoroch, možno obísť zavedením vhodných súradníc $\{q_i\}_{i=1}^{M}$, $M = 3N - N_v$, ktoré nazývame *zovšeobecnené súradnice*, a úlohu formulovať pomocou tzv. Lagrangeových rovníc, diferenciálnych rovníc pre týchto M geometrických stupňov voľnosti. Pôvodné a zovšeobecnené súradnice spolu súvisia transformáciou

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t), \quad i = 1, ..., N \tag{76}$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t) \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t), \quad i = 1, ..., N \tag{77}$$

  t.j. kým $\vec{r}_i$ sú len funkciami q_i a času, $\vec{v}_i$ sú funkciami $q_i, \dot{q}_i$ a času.

- *Virtuálne posunutie* je malé ľubovolné posunutie systému bodov $\delta\vec{r}_i$ také, že pritom geometrické obmedzenie (holonómne väzby) na tieto posunutia sa berie fixované pre vybraný okamžik času t. Takáto zmena zodpovedá zmene zovšeobecnených súradníc δq_j

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{78}$$

- *D'Alembertov princíp* Práca vykonaná silami reakcií geometrických obmedzení pri virtuálnom posunutí je nulová - triviálne nakoľko reakcie sú kolmé na posunutia. Ak pohybové rovnice sú

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad i = 1, ..., N, \tag{79}$$

  kde $\vec{f}_i$ je súčet všetkých síl geometrických obmedzení (reakcie) pôsobiacich na i-ty bod a $\vec{F}_i$ súčet všetkých ostatných síl (gravitačné,elektrické) pôsobiacich na tento bod, potom D'Alembertov princíp vraví

$$0 = \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i \tag{80}$$

  Ak by boli $\delta\vec{r}_i$ nezávislé stupne voľnosti, potom z poslednej rovnice dostaneme naspäť

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i = 0$$

  Oni ale nie sú...

2.11 Lagrangeove pohybové rovnice, Lagrangeova funkcia

- Vyjadrime virtuálne posunutie pomocou posunutia zovšeobecnených súradníc

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{81}$$

potom D'Alembertov princíp je

$$0 = \sum_{ij}\left(m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{82}$$

a keďže δq_j sú naozaj nezávislé a ľubovoľné, máme pohybové rovnice

$$0 = \sum_{i}\left(m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i - \vec{F}_i\right)\cdot\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}, \quad j = 1, \ldots, M \tag{83}$$

- Odvodenie Lagrangeových rovníc:
  - Zovšeobecnená sila

  $$Q_j = \sum_j \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$$

  - Kinetická energia vyskočí v prvom člene:

$$\begin{aligned}
\sum_i m_i \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\right) - m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i \cdot \frac{d}{dt}\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} && (84)\\
&= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} && (85)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 - \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 && (86)\\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K && (87)
\end{aligned}$$

  kde sme využili identitu vyplývajúcu priamo z rovnice (77)

  $$\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

  a identifikovali kinetickú energiu systému bodov

  $$K = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2$$

  - Teda pohybové rovnice majú tvar

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} K - \frac{\partial}{\partial q_j} K = Q_j, \quad j = 1, \ldots, M \tag{88}$$

– Ak sily rozdelíme na potenciálové a nie, tak tie prvé možno písať ako

$$Q_j = \sum_i \vec{F}_i^{pot} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\sum_i \nabla_i U \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$$

Uvážením, že potenciálna energia nezávisí od rýchlostí , t.j.

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

Môžeme zaviesť *Lagrangeovu funkciu*

$$L(q_i, \dot{q}_i) = K - U \tag{89}$$

vyjadrené ako funkcie zovšeobecnených polôh a rýchlostí, pomocou ktorej dostávajú pohybové rovnice tvar *Lagrange-Eulerových rovníc*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^n \tag{90}$$

kde Q_i^n je i-ta zložka zovšeobecnených nepotenciálových síl.