2.9 Energia a práca v dynamike systému i.t.t

- Ak pôsobíme viacerými silami, potom práca ktorú vykonáme bude daná pôsobením súčtu týchto síl v ťažisku, $\vec{F}_e$, a výsledným momentom dvojice síl $\vec{D}_e^*$. Práca potom bude[2]

$$W = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\vec{F}_e \cdot \vec{V}^* + \vec{D}_e^* \cdot \vec{\omega} \right) \tag{65}$$

- Pôsobme silou $\vec{F}_e$ a momentom síl $\vec{D}_e$ na tuhé teleso, pohybové rovnice budú

$$M \frac{d}{dt} \vec{V}^* - \vec{F} = \vec{F}_e \tag{66}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{I} \cdot \vec{\omega} \right) - \underbrace{(\vec{D} - \vec{R}^* \times \vec{F})}_{\vec{D}^*} = \underbrace{\vec{D}_e - \vec{R}^* \times \vec{F}_e}_{\vec{D}_e^*}, \tag{67}$$

  pričom $\vec{D}$ a $\vec{F}$ predstavujú iné sily ako tie, ktorými pôsobíme my, t.j. gravitačné, trecie....

  Uvedomme si, že hviezdičkovanie momentu síl, t.j. $\vec{D}^*$, zodpovedá výpočtu výsledného momentu síl vzhľadom na ťažisko.

- Gravitačná, ale aj iné (elektrostatické, elastické sily a momenty) sú tzv. potenciálové, t.j. dajú sa zapísať v tvare

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}) \tag{68}$$

$$\vec{D}_{pot}(\vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{\phi}} U'(\vec{\phi}) \tag{69}$$

  Príklad: gravitačná potenciálna energia $U_g(\vec{r}) = Mgz$ alebo elastická energia v natočenej pružine $U_p(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} k \omega_1^2$ pre malé otočenia. Ak konáme prácu prenášaním i.t.t. proti takýmto silám, veľkosť tejto práce závisí len od rozdielu potenciálnej energie medzi koncovou a začiatočnou polohou.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{s} \cdot \nabla U(\vec{r}) = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

  Prípomienka: smer gradientu dá smer najväčšieho nárastu potenciálnej energie, jeho veľkosť dá veľkosť tohto nárastu. Derivácia v smere jednotkového vektora $\vec{n}$ je daná ako $\vec{n} \cdot \nabla U(\vec{r})$.

  Všetky takéto potenciály sa dajú sčítať do spoločnej *potenciálnej energie telesa*

$$U(\vec{r}, \vec{\phi}) = U(\vec{r}) + U'(\vec{\phi}) \tag{70}$$

  pričom potom sila aj moment sily budú jednoducho

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}, \vec{\phi}), \quad \vec{D}_{pot}(\vec{r}, \vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{\phi}} U(\vec{r}, \vec{\phi}) \tag{71}$$

  Zavedením rozdelenia síl na potenciálové a nepotenciálové $\vec{F} = \vec{F}_{pot} + \vec{F}_n$, a podobne pre momenty, dostaneme pre celkovú prácu

$$W = [K + U]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{s} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^* \cdot d\vec{\omega} \tag{72}$$

[2] Prácu v dôsledku otáčania získame takto: ak sila $\vec{F}_D$ pôsobí v bode $\vec{r}$ vzhľadom na bod na osi otáčania, potom

$$\int \vec{F}_D \cdot \vec{ds} = \int \vec{F}_D \cdot (d\vec{\phi} \times \vec{r}) = \int d\vec{\phi} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}_D) = \int \vec{D}^* \cdot \vec{d\phi}$$

kde $K+U$ je súčet *kinetickej a potenciálnej energie* i.t.t.

$$K+U=\frac{1}{2}M|\vec{V}^*|^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}+U(\vec{r},\vec{\phi}) \tag{73}$$

- Rozšírenie na N telies: zavedieme index $\alpha=1,\ldots,N$ a všetko je len súčtom cez všetky telesá, t.j. práca

$$W=\sum_\alpha=[K_\alpha+U_\alpha]_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_n^\alpha\cdot d\vec{s}_\alpha+\int_{t_1}^{t_2}\vec{D}_n^{*,\alpha}\cdot d\vec{\omega}_\alpha \tag{74}$$

alebo *celková kinetická a potenciálna energia*

$$K+U=\sum_\alpha\frac{1}{2}M_\alpha|\vec{V}_\alpha^*|^2+\frac{1}{2}\vec{\omega}_\alpha\cdot\vec{\vec{I}}_\alpha\cdot\vec{\omega}_\alpha+U_\alpha(\vec{r}_\alpha,\vec{\omega}_\alpha) \tag{75}$$