Úvod

Obsahom prednášok Fyziky dynamických procesov je výklad fyzikálnych princípov a matematických postupov popisu mechanických sústav používaných v automatizácii a robotike. Prototypom takejto sústavy je dvojramenný manipulátor ktorého analýze sa budeme detailne venovať ale aj úlohy pohybu a stability mechanických sústav, ktoré si preberieme na príkladoch Každú takúto diskrétnu mechanickú sústavu môžeme popísať ako systém niekoľkých tuhých telies. Systematický prístup ku konštrukcii diferenciálnych rovníc popisujúcich ich dynamiku je založený na tzv. Lagrangeovej formulácii mechaniky[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Často je dôležitou súčasťou popisu diskrétnych mechanických sústav aj jej prostredie, napr. pohyb vo vode alebo vzduchu. Cieľom prednášok bude uviesť základné princípy formulácie dynamiky prostredia - kontinua - vo forme parciálnych diferenciálnych rovníc. Výsledný formalizmus je užitočný nie len pre štúdium prostredia diskrétnych mechanických sústav (napr. plávania telesa v kvapaline), ale aj úloh transportu kvapalín, plynov či tepla[1, 2, 3].

2 Poznámky k jednotlivým prednáškam

2.1 Dynamika systému

1. Pod **systémom** budeme rozumieť reálny fyzikálny objekt, ktorého všetky zmeny a pôsobenia na okolie môžeme jednoznačne charakterizovať zadaním istého počtu čísel. Tieto čísla nazývame **stupne voľnosti**. Napríklad pre hmotný bod sú jeho stupňami voľnosti jeho poloha, daná 3 súradnicami alebo polohovým vektorom a jeho rýchlosť, daná vektorom rýchlosti (3 zložky). Hmotný bod má teda dokopy 6 stupňov voľnosti. Pre všeobecnú diskusiu budeme označovať stupne voľnosti ako q_i pričom $i = 1,...,N$ ich indexuje a N je ich celkový počet.

2. Pod **dynamikou systému** rozumieme proces v čase, keď sa jednotlivé stupne voľnosti menia. **Pohybové rovnice** predstavujú predpis pre výpočet hodnôt stupňov voľnosti v ľubovolnom čase, ak si zvolíme ich hodnotu v nami zvolenom počiatočnom momente. Z hľadiska štúdia dynamiky systému si môžeme zvoliť počiatočné hodnoty stupňov voľnosti ľubovoľne (v rámci ich oboru definície) čo vysvetluje ich samotný názov. Matematicky ich reprezentujeme ako diferenciálne rovnice 1. rádu

$$\frac{d}{dt} q_i = f_i(q_1, q_2, ..., q_N; t), \quad i = 1,...,N \tag{1}$$

   kde $f_i(q_1, q_2, ..., q_N; t)$ je N reálnych funkcií s $N+1$ reálnymi premennými. Jednoznačnosť časového vývoja stupňov voľnosti dynamického systému popísaného takýmito diferenciálnymi rovnicami nám zaručuje veta o existencii a jednoznačnosti riešenia:

   Ak funkcie $f_i(q_i; t)$ sú spojité a ohraničené a spĺňajú Lipschitzovu podmienku vzhľadom na t[1] na oblasti $(t_0 - T, t_0 + T) \times (q_1^0 - \delta_i, q_1^0 + \delta_i) \times ...$ potom existuje práve jedno riešenie ktoré spĺňa podmienku $q_i(t_0) = q_i^0$ pre $i = 1,...,N$.

   Poznámka: ak je diferenciálna rovnica 2. rádu, tak ju vieme previesť na 2 rovnice 1. rádu, t.j. rovnica 2. rádu popisuje 2 stupne voľnosti, a podobne pre n-tý rád. V mechanike často voláme stupňom voľnosti číslo $n/2$ nakoľko ku každej súradnici musíme vždy mať aj rýchlosť, t.j. n je vždy párne.

[1] Lipschitzova podmienka znamená $|f(q_i'; t) - f(q_i; t)| \leq L \sum_i |q_i' - q_i|, L > 0$

3. Veličiny, ktoré tiež numericky charakterizujú systém, ale v čase sa nemenia, nazývame “parametre dynamického systému”. Vo vyššie uvedenom príklade hmotného bodu je parametrom jeho hmotnosť.

4. Príklady: Newtonove rovnice pre hmotný bod, harmonický oscilátor, Kirchhofove zákony pre obvody

5. homogénne lineárne diferenciálne rovnice

$$\frac{d}{dt} q_i = \sum_j a_{ij} q_j \tag{2}$$

vieme riešiť metódou "hľadám riešenie v tvare $q_i(t) = c_i e^{\alpha t}$"; všeobecné riešenie je lin. kombinácia N lineárne nezávislých riešení.

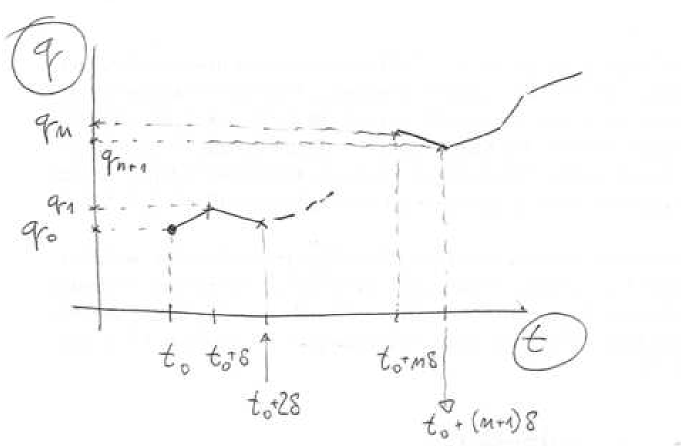
6. lineárne diferenciálne rovnice s pravou stranou

$$\frac{d}{dt} q_i = \sum_j a_{ij} q_j + g_i(t) \tag{3}$$

vieme riešiť; všeobecné riešenie je lin. kombinácia N lineárne nezávislých riešení homogénnej rovnice a jedného partikulárne riešenie rovnice s pravou stranou. Napr. pomocou Laplaceovej transformácie

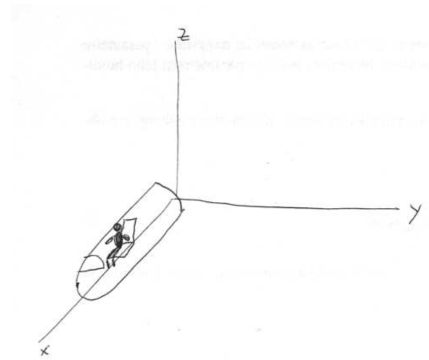
$$F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\} = \int_{0-}^{\infty} dt f(t) e^{-st} \tag{4}$$

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} ds F(s) e^{st} \tag{5}$$

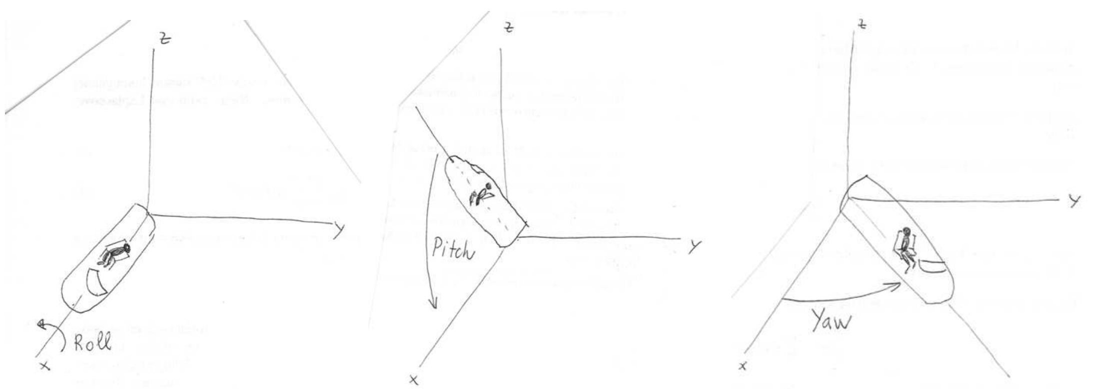


Obrázok 1: K diskretizácii času a numerickému riešeniu diferenciálnej rovnice.

7. Diskusia predstavy o numerickom riešení diferenciálnych rovníc: triviálna Eulerova metóda (Obrázok 1), jej vylepšenie predstavuje Runge-Kutta metóda.



Obrázok 2: Zvolená orienácia sústavy pevne spojenej s lietadlom.



Obrázok 3: Tri možné rotácie vzhľadom na sústavu pevne spojenú s lietadlom.

2.2 Pohybové rovnice diskrétnych sústav I.

1. **Ideálne tuhé teleso** (i.t.t.) predstavuje hmotné teleso, rozložité v priestore, ktorého jednotlivé body a ich spájajúce úsečky nemôžu meniť svoje vzdialenosti ani vzájomné uhlové vzťahy. I.t.t. má **6 geometrických stupňov voľnosti** - tri súradnice vektora ukazujúceho na polohu jedného, nami vybraného bodu pevne fixovaného na telese a tri uhly natočenia tohto telesa v priestore. Tieto tri uhly môžu byť napríklad tzv. uhly "roll", "pitchä "yaw", ktoré sa často používajú v inžinierskych aplikáciach. Ako príklad si zoberme kabínku letca v lietadle. Nech počiatočná orientácia je taká, že kabínka je vodorovne, svojou osou (špicom lietadla) orientovanou v smere osi x. Do všeobecnej orientácie v priestore je môžeme dostať nasledovnými tromi rotáciami realizovanými vždy vzhľadom na sústavu pevne fixovanú s lietadlom podľa Obrázku 2:

   (a) **Roll** - pootočenie okolo osi x tak, že pilot už nededí vodorovne ale je naklonený aj s celým lietadlom do strany, aj keď os lietadla je stále vo vodorovnej rovine (xy).

   (b) **Pitch** - pootočenie okolo osi y tak, že os lietadla mieri niekam do výšky, a teda už nie je vo vodorovnej rovine.

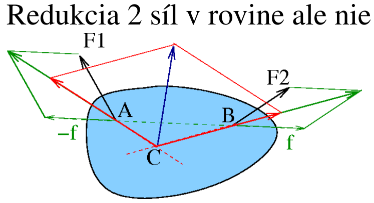
   (c) **Yaw** - pootočenie okolo osi z tak, že lietadlo už neleží v rovine xz.

   Problematike orientácie i.t.t. sa budeme neskôr veľa venovať.

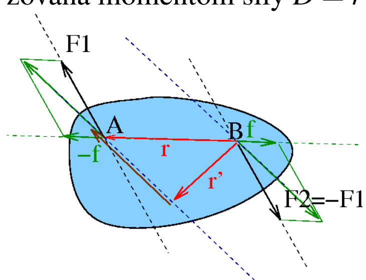
Pri konštrukcii dynamických rovníc tuhého telesa prídeme na to, že okrem súradníc polohy zvoleného bodu telesa a uhlov jeho orientácie sú stupňami voľnosti aj ich prvé časové derivácie. Celkový počet stupňov voľnosti i.t.t. potom bude $2 \times 6 = 12$.

2. Uvažujme i.t.t. na ktoré v rôznych bodoch pôsobia rôzne orientované sily. Pôsobí každá z nich na dynamiku telesa nezávislým spôsobom alebo ich možno redukovať na menší počet. Inými slovami, musíme pri rôznych počtoch síl a ich orientáciách riešiť nanovo diferenciálne pohybové rovnice, alebo existujú skupiny problémov ktoré predstavujú jednu a tú istú úlohu? Ukážeme si, že postupom nazývaným **redukcia síl** dokážeme jediné čo ovplyvňuje pohyb telesa je celkový vektorový súčet všetkých pôsobiacich síl nezávisle od bodu ich pôsobenia a jedna výsledná **dvojica síl**, vedúca na celkový moment všetých síl.

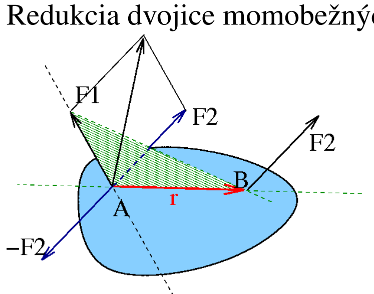
   - Redukcia dvoch síl pôsobiacich v dvoch bodoch, A a B, ležiacich na priamke, v smere tejto priamky je najjednoduchšia. Keďže teleso je tuhé, môžeme každú silu presúvať v jej smere t.j. napr. silu z bodu A do bodu B.
   - Redukcia 2 síl v rovine ale nie paralelných s opačnou orientáciou:



   - Dve paralelné sily s opačnou orientáciou a rovnakou veľkosťou redukovať na jednu silu v jednom bode nemôžeme, preto zavádzame pojem dvojice síl. Táto je jednoznačne charakterizovaná momentom sily $\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$.



   - Redukcia dvojice momobežných síl na výslednú silu v jednom bode a jednu dvojicu síl:



   - Redukcia ľub. 3 síl v 3 bodoch na 2 sily v dvoch bodoch