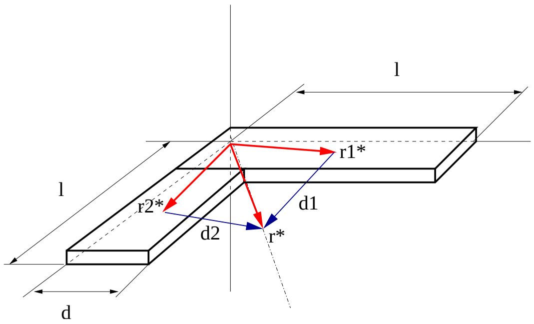
Neriešené príklady na overenie porozumenia látky

(**A**) Nájdite polohový vektor hmotného stredu bumerangu $\vec{r}^*$ (viď Obr.) vzhľadom na jeho rohový bod. Predpokladajte že hrúbku bumerangu h môžeme vzhľadom na jeho šírku zanedbať, dĺžka oboch ramien je l a šírka oboch je d.



Re: $\vec{r}_1^* = (d/2)\vec{i} + (l/2)\vec{j}; \vec{r}_2^* = ((l+d)/2)\vec{i} + (d/2)\vec{j}; \vec{r}^* = a(\vec{i}+\vec{j}), a = \frac{1}{2}\frac{l^2-d^2+ld}{2l-d}$

Pomôcka: Použite všeobecný vzťah pre ťažisko

$$\vec{r}^* = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

pričom sumu urobte prv pre každý naznačený kváder samostatne a nájdite ťažiská jednotlivých kvádrov (vieme výsledok okamžite). Potom spočítajte posledné dva, ováhovaním podľa ich hmotností

$$\vec{r}^* = \frac{1}{m_1+m_2}\left(m_1\vec{r}_1^* + m_2\vec{r}_2^*\right).$$

(**B**) Nájdite tenzor zotrvačnosti bumerangu vzhľadom na ťažisko, pozdĺž osí x, y, z podľa obrázku, ak tenzor zotrvačnosti kvádra vzhľadom na osi prechádzajúce jeho ťažiskom je

$$I^0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12}md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\{l^2+d^2\} \end{bmatrix}$$

a Steinerova veta tvrdí

$$\vec{\vec{I}}'' = \vec{\vec{I}} + M\left\{\left(\vec{d}\cdot\vec{d}\right)\vec{\vec{1}} - \vec{d}\vec{d}\right\}$$

h zanedbajte (typický bumerang), tak že ρh, kde ρ je hustota, je konečné číslo so zmyslom hmotnosti na jednotku plochy bumerangu. Vzhľadom na ktoré osi bude tento tenzor diagonálny?

Nevkladajte výsledky pre ťažiská, použite len formálny tvar vektorov $\vec{d}_i$ ako $\vec{d}_i = d_i^x\vec{i} + d_i^y\vec{j}$ pre $i = 1$ a 2.

Re: $\vec{d}_1 = \vec{r}^* - \vec{r}_1 = d_1^x\vec{i} + d_1^y\vec{j}$,
$\vec{d}_2 = \vec{r}^* - \vec{r}_2 = d_2^x\vec{i} + d_2^y\vec{j}$,
$m_1 = \rho h l d; \quad m_2 = \rho h(l-d)d$,

$$I^1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1d_1^yd_1^y & -m_1d_1^xd_1^y & 0 \\ -m_1d_1^xd_1^y & \frac{1}{12}m_1d^2 + m_1d_1^xd_1^x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\{l^2+d^2\} \end{bmatrix},$$

$$I^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m_2d^2 + m_2d_2^yd_2^y & -m_2d_2^xd_2^y & 0 \\ -m_2d_2^xd_2^y & \frac{1}{12}m_2(l-d)^2 + m_2d_2^xd_2^x & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}m\{(l-d)^2+d^2\} \end{bmatrix},$$

$I = I^1 + I^2$. Diagonálny bude vzhľadom na osi symetrie, t.j. os paralelnú s $\vec{r}^*$, osi z a posledná os na tieto dve kolmá.