Cvičenia z Fyziky dynamických procesov
Peter Bokes, zima 2008.

30/09/2008

1. Skalárny súčin, skalárny súčin jednotkových vektorov a priemet vektora do smeru.

2. Najdite (cez skalárny súčin) veľkosť tangenciálnej zložky gravitačnej sily pôsobiacej na gorálku upevnenú na vertikálnu kružnicu. (najprv nájdite tvar dotykového vektora, parameticky vyjadreného od uhla dávajúceho polohu gorálky na kružnici.

3. Vektorový súčin, vektorový súčin jednotkových vektorov a veľkosť plochy danej 2 vektormi.

4. Zmiešaný súčin a objem

5. Nech $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ sú lineárne nezávislé vektory. Dokážte, že
   - $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
   - $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

6. Presvedčte sa, že ľubovoľný vektor $\vec{r}$ môžeme rozložiť na vektory v smere $\vec{e}$ a v smere kolmom na $\vec{e}$ pomocou vzťahu
$$\vec{r} = (\vec{e} \cdot \vec{r})\vec{e} + \vec{e} \times (\vec{r} \times \vec{e}).$$

07/10/2008

1. Vyjadrite časovú deriváciu vektora s konštantnou dĺžkou pomocou vektora okamžitej uhlovej rýchlosti.
   Re: $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ + geometrické odvodenie.

2. Nájdite riešenie rovníc
$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$$
   pre počiatočnú podmienku $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$ ak $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$.
   Re:
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

3. Ako bude vyzerať matica rotácie okolo osi x o uhol θ?

14/10/2008

1. Presvečte sa, že tenzorovo-vektorový zápis je ekvivalentný maticovo-stĺpcovému, t.j. že
$$\overleftrightarrow{I} \cdot \vec{\omega} = \vec{L},$$
kde $\overleftrightarrow{I} = I_{xx}\boldsymbol{ii} + I_{xy}\boldsymbol{ij} + \ldots$, je ekvivalentné rovnici
$$\begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix}.$$

2. (Čiastočne zo skrípt str.14/pr. 5) Dokážte Steinerovu vetu, t.j. že pre tenzor zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom a osi prechádzajúce bodom s polohovým vektorom $\overrightarrow{-}r^*$ vzhľadom na ťažisko platí
$$\overset{\rightrightarrows}{I}' = \overset{\rightrightarrows}{I} + M\left(\vec{r}^* \cdot \vec{r}^* \overset{\rightrightarrows}{1} - \vec{r}^* \vec{r}^*\right) \tag{1}$$

3. (Čiastočne zo skrípt, str.15/pr.6) Vypočítajte tenzor zotrvačnosti valca okolo jeho osí symetrie. Pre os paralelnú s podstavou použite Steinerovu vetu (Moment zotrvačnosti tenkého disku okolo osi ležiacej v ňom je $J' = (1/4)mR^2$.)

   Re: $J_z = \frac{1}{2}MR^2, J_x = J_y = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2)$

   Extra: Diskusia valenia sa nespenenej a spenenej pivovej plechovky, viď tiež
`http://kf-lin.elf.stuba.sk/~valko/Skola_a_studenti/Studium/Priklady/priklady.html`

4. Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénnej gule.
Re:
$$J = \frac{2}{5}MR^2$$
Prácu si zjednodušíme, si uvedomíme že $J = \frac{1}{3}(J_x + J_y + J_z)$ pričom vzťahy pre jednotlivé J_i napíšeme v tom istom kartézskom súradnicovom systéme.

5. Majme rotáciu súradnicovej sústavy
$$\vec{f}_i = \mathscr{O}^{\phi,k}[\vec{e}_i].$$
Z identity nájdenej na prednáške,
$$R^{\phi,k}_{ji} = \mathscr{O}^{\phi,k}[\vec{e}_i] \cdot \vec{e}_j,$$
ukážte že platí
$$\vec{f}_i = \vec{e}_j R^{\phi,k}_{ji}.$$

6. (Nestihli sme, bude na budúce.) Majme tenzor zotrvačnosti daný v sústave $\vec{e}_i$ daný zložkami
$$\overset{\rightrightarrows}{I} = I_{11}\vec{e}_1\vec{e}_1 + I_{12}\vec{e}_1\vec{e}_2 \ldots$$
pričom
$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{bmatrix}$$
Nájdite rotačnú maticu do bázy $\vec{f}_i$ v ktorej je tento tenzor diagonálny. Uvažujte rotáciu okolo osi z takú že
$$\vec{e}_i = \sum_j \vec{f}_j R_{ji}.$$
Akej algebraickej úlohe zodpovedá nájdenie matice R_{ij}?

21/10/2008

1. Posledný príklad z predchádzajúceho týždňa.
2. Nájdite moment gravitačnej sily pôsobiacej na gyroskop v sústave pevne spojenej s gyroskopom.
3. Akou silou T je napínané lanko a aká je sila reakcie podložky R ak je homogénny hranol s tiažou G nehybný v uvedenej situácii na obrázku?
   Re:

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{Gl}{4h}\cos(\alpha)\sin(2\alpha) \\
R &= G - \frac{Gl}{4h}\sin(2\alpha)\sin(\alpha)
\end{aligned}
$$