- **Predstava numerického riešenia časovo-závislých PDR** Použijeme spätné zobrazenie na diskrétny model, diskretizáciou priestorovej premennej:

$$\frac{\partial v(x_i,t)}{\partial t} = c^2\frac{q(x_i+\Delta x,t)-2q(x_i,t)+q(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{147}$$

$$\frac{\partial q(x_i,t)}{\partial t} = v(x_i,t) \tag{148}$$

v bodoch $x_i = x_0 + i\Delta x$, pre $i = 2,...,N-1$ + okrajové podmienky pre x_1 a x_N.

Použijeme Eulerovu metódu riešenia výsledných obyčajných diferenciálnych rovníc tak že diskretizujeme aj čas, $t \in (0,T) \to t_i = i\delta, i = 0,1,2,...,M$:

$$v(x_i,t+\delta) = v_(x_i,t) + c^2\frac{q(x_i+\Delta x,t)-2q(x_i,t)+q(x_i-\Delta x)}{(\Delta x)^2}\delta \tag{149}$$

$$q(x_i,t+\delta) = q(x_i,t) + v(x_i,t)\delta \tag{150}$$

Na prednáške boli aj obrázky ako propagujeme o krok δ a 2δ.

V praxi sa používajú podstatne efektívnejšie metódy napr. na diskretizáciu priestorových premenných - rozvoj do konečnej bázy a na časové propagovanie Lanczosova diagonalizácia v Krylovovom podpriestore priestoru generovanom vyššie spomenutou konečnou bázou.

3.2 Pojmy a veličiny v dynamike kontinua v 3D

1. Predpoklad popisu kontinua - hmotné elementy sa hýbu po dráhach a navzájom sa nepretínajú. $\vec{r}(\vec{r}_0,t)$ - **Lagrangeov pohľad** na vec, $\vec{v}(\vec{r},t)$ - rýchlostné vektorové pole - **Eulerov pohľad**. **Hydrodynamická derivácia** - zavedenie a pripomenutie zmyslu gradientu a parciálnych derivácií.

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r},t) = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}(r_0,t),t)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\cdot\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) \tag{151}$$

Pozor, $\nabla\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ je tenzor, čo vidíme rozpísom do zložiek. Tento člen je dôvodom komplikácií hydrodynamiky, je inherentne nelineárny vzhľadom na rýchlostné pole.

Hydrodynamická derivácia sa používa nie len na rýchlostné ale na akékoľvek iné polia keď nás zaujíma rýchlosť zmeny veličiny súvisiacej s materiálnou podstatou kontinua.

2. **Pojem hustoty hmotnosti**

$$\rho(\boldsymbol{r},t) : M_\Omega(t) = \int_\Omega d^3r\rho(\boldsymbol{r},t) \tag{152}$$

Príklady iných polí:

(a) Hustota elektrického náboja, $\rho^e(\vec{r},t) = \frac{e}{m_e}\rho(\vec{r},t)$ kde $\rho(\vec{r},t)$ je hustota hmotnosti elektrónov, e je náboj jedného elektrónu a m_e jeho hmotnosť.

(b) Hustota častíc i-teho druhu (potrebné pri chemických reakciách)

$$n^i(\boldsymbol{r},t) \quad : \quad N^i_\Omega(t) = \int_\Omega d^3rn^i(\boldsymbol{r},t) \tag{153}$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_i M^i_o n^i(\boldsymbol{r},t) \tag{154}$$

(c) Špecifická vnútorná energia (potrebné pri vedení tepla)

$$u(\boldsymbol{r},t) \quad : \quad U_{\Omega(t)}(t) = \int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\boldsymbol{r},t)u(\boldsymbol{r},t) \tag{155}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \tag{156}$$

kde posledná rovnica predstavuje 1. vetu termodynamickú.

3. Pojem vektorového pol'a hustoty **toku hmotnosti** $\vec{j}_\rho(\vec{r},t)$:

$\vec{j}_\rho \cdot d\vec{S}dt =$ "hmotnosť ktorá preide plôškou $d\vec{S}$ za krátky čas dt"

$$\frac{\Delta M}{dt} = \frac{\Delta l dS}{dt}\rho = \frac{\vec{v}dt \cdot d\vec{S}}{dt}\rho \tag{157}$$

$$\vec{j}_\rho(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t) \tag{158}$$

4. **Rovnica kontinuity** - odvodenie pomocou *l'ubovol'nej no nehybnej* oblasti Ω.

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3r\rho(\boldsymbol{r},t) = -\int_\Sigma d\boldsymbol{S}\cdot \boldsymbol{j}_\rho(\boldsymbol{r},t) \Rightarrow \frac{\partial\rho(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)) = 0 \tag{159}$$

Rovnica kontinuity použitím hydrodynamickej derivácie,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \tag{160}$$

Poznámka: pre nestlačitel'nú kvapalonu máme $\frac{d\rho}{dt} = 0$ t.j. $\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0$ čo vytvára analógiu medzi stacionárnym elektrickým pol'om vo vákuu a rýchlostným pol'om nestlačitel'nej kvapaliny.

Poznámka 2: Rovnica kontinuity sa dá získať aj z l'ubovolného objemu $\Omega(t)$, ale takého že objem $\Omega(t)$ sa hýbe s kontinuom (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua), t.j.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\vec{r},t) = 0.$$