- **Variačný princíp a Lagrangeove rovnice** Pár nových pojmov
  - Funkcionál - zobrazenie ktoré funkcii priradí číslo

    $$S[f(x)] : f(x) \to \boldsymbol{R}$$

    Príklad:

    $$S[f(x)] = \int_a^b k\{f(x)\}^2 dx$$

  - Variácia funkcionálu - zmena funkčnej hodnoty funkcionálu ak "trochu" zmeníme funkciu $f(x)$ v ktorej funkcionál tútohodnotu nadobúda o $\delta f(x)$. Píšeme

    $$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = \int_a^b v(x)\delta f(x) dx$$

    pričom funkciu

    $$v(x') = \frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')}$$

    voláme funkcionálna derivácia.
    Príklad:

    $$\frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')} = 2kf(x')$$

    Ako? Nech $\delta f(x)$ je malá zmena $f(x)$ potom

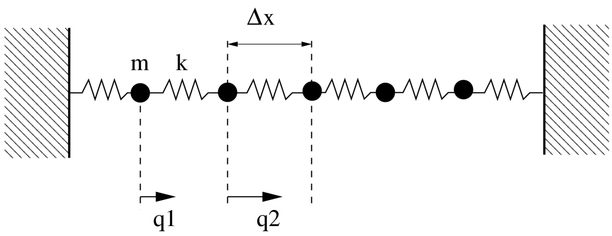
    $$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = ... = \int_a^b 2kf(x)\delta f(x) dx$$

Matematická forma variačného princípu: Lagrangeova funkcia integrovaná cez čas počas ktorého študujeme pohyb nadobúda pre reálnu fyzikálnu trajektóriu extrém, t.j. funkcionálna derivácia je nulová.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt = 0 \tag{120}$$

kde $L(q_1, q_2, ..., q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N)$ je Lagrangeova funkcia N zovšeobecnených súradníc q_i a k nim patriacim N zovšeobecnených rýchlostí $\dot{q}_i$ a výsledný tvar Lagrange-Eulerových rovníc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{121}$$



Obrázok 5: Jedno-rozmená retiazka harmonických oscilátorov predstavuje v limite $N \to \infty, N\Delta x = L$ model jednorozmerného elastického kontinua.

3 Dynamika kontinua

3.1 Úvod k pohybovým rovniciam kontinua

- **Kontinuum** - systém zo spojito veľa stupňov voľnosti, napr. deformovateľné tuhé látky (elastické, neelastické), kvapaliny a plyny (hydraulika), tepelné pole (chladiče), elektromagnetické pole.

- Ako budú vyzerať pohybové (dynamické) rovnice?

$$\frac{d}{dt}q_i(t) = f(q_1(t),...,q_N(t)) \Rightarrow \frac{d}{dt}q(i,t) = f(q(i,t)) \tag{122}$$

  ďalej miesto nekonečne veľa diskrétnych indexov i zavedieme spojitú premennú $x = i\Delta x$ kde napr. $\Delta x = L/N$ pri L - dĺžka systému pri 1D kontinuu. Uvedomme si $\Delta x \to 0$ pri $N \to \infty$. Takto prichádzame k pojmu *poľa* $q(x,t)$. Časová derivácia v (122) je pri nemennom i a preto pri zavedení premennej x musíme písať časovú deriváciu ako *parciálnu deriváciu*

$$\frac{\partial}{\partial t}q(x,t) = f[q(x',t)], \tag{123}$$

  Vo všeobecnosti, pravá strana závisí od neznámeho poľa $q(x',t)$ aj vo všetkých prípustných hodnotách x', nie len v x. V prípade riešenia viacerých polí máme vo všeobecnosti niekoľko zložiek neznámych polí $q_\alpha(\vec{r},t), \alpha = 1,...,M$, závisiacich od polohového vektoru $\vec{r}$

$$\frac{\partial}{\partial t}q_\alpha(\vec{r},t) = f_\alpha(q_1(\vec{r},t),...,q_M(\vec{r},t)). \tag{124}$$

  Voláme ich *parciálne diferenciálne rovnice*. (Nemôžeme povedať 1. rádu nakoľko pravá strana veľmi často obsahuje aj druhé derivácie vzhľadom na priestorové premenné. Pre naše účely by sme ich mohli volať parciálne direfenciálne rovnice 1. rádu vzhľadom na čas ale toto nie je používané bežne.)

- Demonštračný príkad:
  Model elastického kontinua v 1D možno získať limitným prechodom $N \to \infty, N\Delta x = L$ z retiazky spojených harmonických oscilátorov (Obrázok 5).

  Vlnová rovnica: Pre odvodenie pohybových rovníc pre hmotnosti $i = 2,...,N-1$ vyjdeme z Newtonovej pohybovej rovnice pre každú hmotnosť a výzaru pre silu pôsobiacu na hmotnosť od pružiny $F = -ky$ kde y je výchylka konca pružiny od jej rovnovážneho stavu:

$$m\frac{d^2q_i}{dt^2} = -k(q_i - q_{i-1}) - k(q_i - q_{i+1}) \tag{125}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2q_i}{dt^2} &= \frac{k}{m}(q_{i+i} - 2q_i + q_{i-1}) && (126)\\
\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{k}{m}(q(x+\Delta x,t) - 2q(x,t) + q(x-\Delta x,t)) && (127)
\end{aligned}$$

Pre $\Delta x \to 0$ môžeme použiť Taylorov rozvoj pre susedné výchylky

$$\begin{aligned}
q(x+\Delta x) &\approx q(x) + \frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots && (128)\\
q(x-\Delta x) &\approx q(x) - \frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \ldots && (129)\\
& && (130)
\end{aligned}$$

ktorých dosadením do rovnice (127) dostaneme “vlnovú rovnicu”

$$\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} = \frac{k(\Delta x)^2}{2m}\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \tag{131}$$

Okrajové podmienky: Pohybové rovnice koncových bodov: ak ukotvené na stene

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2q_1}{dt^2} &= -kq_1 - k(q_1 - q_2) && (132)\\
m\frac{d^2q_N}{dt^2} &= -k(q_N - q_{N-1}) - kq_N && (133)
\end{aligned}$$

čo sa dá napísať ako pohybové rovnice pre vnútorné body ak pridáme podmienky

$$q_0 = 0, \quad q_{N+1} = 0, \tag{134}$$

ktoré v limite prejdú na nulové *Dirichletove okrajové podmienky*

$$q(x=0) = 0, \quad q(x=L) = 0. \tag{135}$$

Ak by sme mali voľné konce bude platiť

$$\begin{aligned}
m\frac{d^2q_1}{dt^2} &= -k(q_1 - q_2) && (136)\\
m\frac{d^2q_N}{dt^2} &= -k(q_N - q_{N-1}) && (137)
\end{aligned}$$

čo sa dá napísať ako pohybové rovnice pre vnútorné body ak pridáme podmienky,

$$q_1 - q_0 = 0, \quad q_N - q_{N+1} = 0, \tag{138}$$

ktoré v limite prejdú na nulové *von Neumannove okrajové podmienky*

$$\left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{x=L} = 0. \tag{139}$$

Okrajové podmienky, či už Dirichletove, von Neumanove alebo iné, sú neoddeliteľnou súčasťou samotnej parciálnej diferenciálnej rovnice; tu nám vznikli ako dôsledok limitného prechodu spolu s objavením sa druhej parciálnej derivácie podľa x na pravej strane diferenciálnej rovnice. Bez ich uvedenia nemejú rovnice jednoznačné riešenie.

Riešenia: Ak si označíme konštanty $\frac{k(\Delta x)^2}{2m} = c^2$, potom c má zmysel rýchlosti šírenia vzruchov (zvuku) v retiazke, t.j. ľubovoľná výchylka daná počiatočnou podmienkou v čase $t = 0$ ako $q(x, t = 0) = q_0(x)$ vedie pre $t > 0$ na riešenie vlnovej rovnice

$$q(x,t) = q_0(x \pm ct). \tag{140}$$

Prepis do štandartného tvaru (len s prvými deriváciami časovými) možno previesť zavedením *rýchlostného poľa*

$$v(x,t) = \frac{\partial q(x,t)}{\partial t} \tag{141}$$

a potom získame systém dynamických rovníc

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} \tag{142}$$

$$\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = v(x,t) \tag{143}$$

Poznámka: pozor, aj c aj $v(x,t)$ sú rýchlosti, ale celkom odlišných objektor. c je konštantná rýchlosť ktorou sa šíri akýkoľvek vzruch cez retiazku a $v(x,t)$ je premenlivá (oscilujúca) rýchlosť malých hmotných elementov m nachádzajúcich sa v blízkosti polohy x v čase t.

- **Predstava numerického riešenia časovo-závislých PDR** Použijeme spätné zobrazenie na diskrétny model, diskretizáciou priestorovej premennej

$$\frac{\partial v(x_i,t)}{\partial t} = c^2 \frac{q(x_i + \Delta x, t) - 2q(x_i,t) + q(x_i - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{144}$$

$$\frac{\partial q(x_i,t)}{\partial t} = v(x_i,t) \tag{145}$$

v bodoch $x_i = x_0 + i\Delta x$, pre $i = 2, ..., N-1$ + okrajové podmienky pre x_1 a x_N.

- **Maxwellove rovnice** Predstavujú systém parciálnych diferenciálnych rovníc pre vektorové polia $\vec{E}$ a $\vec{B}$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \tag{146}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\mu_o \vec{j} + \nabla \times \vec{B} \tag{147}$$

s tým že počiatočné podmienky, t.j. polia v $t = 0$, musia spĺňať

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{148}$$

Úloha: Presvedčte sa, že ak elektrické a magnetické polia spĺňajú podmienky (148) potom sú tieto podmienky splnené a pre každý nasledujúci čas.

Naviac, polia musia spĺňať a okrajové podmienky; vo voľnom pristore $\vec{B} \to 0$ a $\vec{E} \to 0$ pre $\vec{r} \to \infty$. V obmedzenom prostredí závisia okrajové podmienky od charakteru materiálu a môžu byť zdanlivo dosť odlišné od Dirichlevových alebo von Neumannových, napr. $\vec{E} \times d\vec{S} = 0$ na kovoch kde $d\vec{S}$ je normálový vektor povrchu kovu a $\int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r} = U$ kde body 1 a 2 ležia na dvoch kovoch medzi ktorými je napätie U.