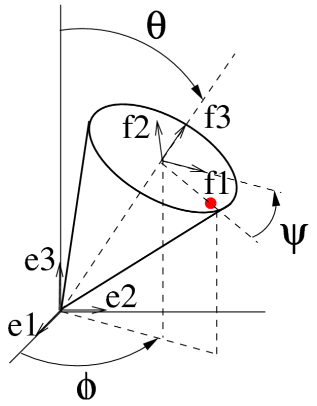


Obrázok 3: Zotrvačník a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

(*pokračovanie z minulej prednášky...*)

4. Kinetická energia oboch i.t.t.

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}m_1(r_1^*)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2, \quad I_1 = \vec{e}_3' \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{e}_3' && (110) \\ K_2 &= \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2^*|^2 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\cdot \vec{\vec{I}}_2 \cdot (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) && (111) \\ &= \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}^2(d^2\sin^2(\theta) + l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta} l d\cos(\theta)\right) && (112) \\ & \quad + \frac{1}{2}I_{11}''\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{22}''\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_{33}''\cos^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad I_{ii}'' = \vec{e}_i'' \cdot \vec{\vec{I}}_2 \cdot \vec{e}_i'' && (113) \end{aligned}$$

za predpokladu že tenzor zotrvačnosti ramena je diagonálny (rozumný predpoklad). Celková kinetická energia má potom tvar

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 && (114) \\ &= \frac{1}{2}\left(\tilde{I}_1 + A\sin^2(\theta) + B\cos^2(\theta)\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\dot{\theta}^2 - M\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} && (115) \\ \tilde{I}_1 &= m_1(r_1^*)^2 + I_1 + m_2 l^2 && (116) \\ A &= m_2 d^2 + I_{22}'', \quad B = I_{33}'' && (117) \\ \tilde{I}_2 &= m_2 d^2 + I_{11}'' && (118) \\ M &= m_2 l d && (119) \end{aligned}$$

5. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = -dm_2 g\cos(\theta)$$

6. Odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice, t.j. parciálne derivácie...

- **Lagrangeova funckia pre gyroskop (zotrvačník)**(Nie je v skriptách)
 S gyroskopom sme sa stretli pri zavedení formalizmu rotácii a pri odvodení Eulerovej pohybovej rovnice z 2. Newtonovej pohybovej rovnice i.t.t. Tam sme si aj zaviedli Eulerove uhly ϕ, θ, ψ pre popis polohy gyroskopu. Teraz si skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) = E_K - U$ pomocou ktorej je odvodenie pohybových rovníc gyroskopu o niečo jednoduchšie. Kinetická energia je daná súčtom translačnej a rotačnej kinetickej energie. Rýchlosť ťažiska je

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2$$

Vektor uhlovej rýchlsti $\vec{\omega}$ má zložky (odvodili sme pri Eulerových rovniciach a zavedení rotácií a Eulerových uhloch na 3. prednáške.)

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \vec{f}_i = (-c\psi s\theta\dot{\phi} + s\psi\dot{\theta})\vec{f}_1 + (s\psi s\theta\dot{\phi} + c\psi\dot{\theta})\vec{f}_2 + (c\theta\dot{\phi} + \dot{\psi})\vec{f}_3$$

kde $\vec{f}_i$ sú jednotkové vektory v sústave pevne spojenej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega^i\omega^j + mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde tenzor zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom a orientované pozdĺž $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgr\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2}J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgl\cos(\theta)$$

kde $\tilde{I} = I + mr^2$.

- **Nepotenciálové sily na pravých stranách LPR.**
  - V odvodzovaní LPR sme zaviedli zovšeobecnené sily

    $$Q_i^n = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

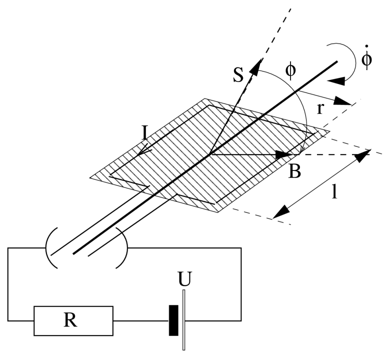
  - Práca vykonaná nepotenciálovými silami pri zmene iba jednej zovšeobecnenej súradnice q_i , všetky ostatné $q_l, l \neq i$ nech sú konštantné, bude

    $$W_i = \int_1^2 \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j = \int_{q_i(t_1)}^{q_i(t_2)} \vec{Q}_i dq_i$$

    (nie sumácia cez i!!!). Potom ak poznáme prácu vykonanú pri zmene jednej zo zovšeobecnených súradníc ako funkciu konečnej hodnoty tejto súranice ($q_{i,f} = q_i(t_2)$) potom zovšeobecnenú silu nájdeme ako

    $$Q_i^n = \frac{\partial}{\partial q_{i,f}} W_i.$$

  - *Trecie sily*
    V lineárnom priblížení (ak sú zovšeobecnené rýchlosti malé) sa typicky stretneme s dvomi situáciami:
    1. Pri otáčaní okolo uhla ϕ: $Q^n = -k_1\dot{\phi}$
    2. Pri posuvnom pohybe o dĺžku x: $Q^n = -k_2\dot{x}$



Obrázok 4: Elektromechanický systém jednoduchého elektromotora.

Vo všeobecnosti pôsobia *proti* pohybu, no môžu byť aj nelineárnymi funkciami rýchlosti (napr. Stokesovo brzdenie vo viskóznej kvapaline, s ktorým sa oboznámime v hydrodynamike).

– *Moment sily od jednosmerného elektromotora*

$$Q^n = K_T I(t),$$

kde $I(t)$ je prúd prechádzajúci elektromotorom a K_T a K_L sú pre elektromotor charakteristické funckie uhla natočenia. V úlohách tohto typu treba riešiť dynamiku manipulátora spolu s dynamikou elektrických obvodov (mechatronika), s pohybovou rovnicou pre prúd

$$U_Z = RI(t) + \frac{d\Phi}{dt}; \quad \frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt} + K_E\frac{d\phi}{dt}.$$

kde U_Z je napätie na zdroji, R je celkový odpor obvodu, Φ je časovo premenný magnetický tok $\Phi = L(t)I(t)$, L indukčnosť motora a K_E konštanta charakterizujúca elektromotor. $L(t)$ sa pri pohybe motora mení s časom, čo úzko súvisí so silovým účinkom.

Napr. jednoduchý elektromotor s jedným závitom v homog. magnetickom poli pernamentného magnetu so zberačmi:

Práca, ktorú vykoná baréria je

$$W = \int_{t_1}^{t_2} U_Z I(t)dt = \int dt RI^2(t) + \frac{1}{2}LI^2(t)\Big|_{t_1}^{t_2} + \int dt\frac{d\Phi}{dt}I(t)$$

Posledný člen môžeme napísať ako (pre $\phi \in (-\pi, 0)$; podľa obrázku)

$$W' = -\int_{t_1}^{t_2} dt BS\sin(\phi)\dot{\phi}I(t) = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} BS\sin(\phi)I(t)d\phi$$

Tento má evidentne zmysel práce ktorú batéria vykoná na otáčaní (celkový príkon mínus Joulove straty na odpore a energia magnetického poľa vinutia na motore) a teda moment sily musí byť

$$D = -BS\sin(\phi)I(t).$$

toto platí len kým sa vodiče vinutia na motore neprekomutujú. Typicky sa používa toľko závitov aby zapojený bol na bateriu vždy ten závit na ktorý je vyvinutý maximálny moment sily D, t.j. pre $\phi \approx \pi/2$.

Pre jeden závit pohybová rovnica bude

$$J\ddot{\phi} = |K_T|I(t), K_T = 2lrB\sin(\phi)$$

A k tomu pohybová rovnica pre prúd:

$$RI(t) + |\frac{d\Phi}{dt}| = U_Z, \Phi = BS\cos(\phi).$$

A vidíme že ak zanedbáme vlastnú indukčnosť $K_E = K_T$.

- *Hydraulika* k tomuto sa možno dostaneme koncom semestra, potrebujeme najprv niečo vedieť z hydrodynamiky.