- Pôsobme silou $\vec{F}_e$ a momentom síl $\vec{D}_e$ na tuhé teleso, pohybové rovnice budú

$$M\frac{d}{dt}\vec{V}^* - \vec{F} = \vec{F}_e \tag{49}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega}\right) - \underbrace{(\vec{D} - \vec{R}^* \times \vec{F})}_{\vec{D}^*} = \underbrace{\vec{D}_e - \vec{R}^* \times \vec{F}_e}_{\vec{D}_e^*}, \tag{50}$$

pričom $\vec{D}$ a $\vec{F}$ predstavujú iné sily ako tie, ktorými pôsobíme my, t.j. gravitačné, trecie....

Uvedomme si, že hviezdičkovanie momentu síl, t.j. $\vec{D}^*$, zodpovedá výpočtu výsledného momentu síl vzhľadom na ťažisko.

- Gravitačná, ale aj iné (elektrostatické, elastické sily a momenty) sú tzv. potenciálové, t.j. dajú sa zapísať v tvare

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r}) \tag{51}$$

$$\vec{D}_{pot}(\vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{\phi}} U'(\vec{\phi}) \tag{52}$$

Príklad: gravitačná potenciálna energia $U_g(\vec{r}) = Mgz$ alebo elastická energia v natočenej pružine $U_p(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}k\omega_1^2$ pre malé otočenia. Ak konáme prácu prenášaním i.t.t. proti takýmto silám, veľkosť tejto práce závisí len od rozdielu potenciálnej energie medzi koncovou a začiatočnou polohou.

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{s}\cdot\nabla U(\vec{r}) = U(\vec{r}_2) - U(\vec{r}_1)$$

Prípomienka: smer gradientu dá smer najväčšieho nárastu potenciálnej energie, jeho veľkosť dá veľkosť tohto nárastu. Derivácia v smere jednotkového vektora $\vec{n}$ je daná ako $\vec{n}\cdot\nabla U(\vec{r})$.

Všetky takéto potenciály sa dajú sčítať do spoločnej *potenciálnej energie telesa*

$$U(\vec{r},\vec{\phi}) = U(\vec{r}) + U'(\vec{\phi}) \tag{53}$$

pričom potom sila aj moment sily budú jednoducho

$$\vec{F}_{pot}(\vec{r},\vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{r}} U(\vec{r},\vec{\phi}), \quad \vec{D}_{pot}(\vec{r},\vec{\phi}) = -\nabla_{\vec{\phi}} U(\vec{r},\vec{\phi}) \tag{54}$$

Zavedením rozdelenia síl na potenciálové a nepotenciálové $\vec{F} = \vec{F}_{pot} + \vec{F}_n$, a podobne pre momenty, dostaneme pre celkovú prácu

$$W = [K+U]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n \cdot d\vec{s} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^* \cdot d\vec{\omega} \tag{55}$$

kde $K+U$ je súčet *kinetickej a potenciálnej energie* i.t.t.

$$K+U = \frac{1}{2}M|\vec{V}^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\vec{I}}\cdot\vec{\omega} + U(\vec{r},\vec{\phi}) \tag{56}$$

- Rozšírenie na N telies: zavedieme index $\alpha = 1,\ldots,N$ a všetko je len súčtom cez všetky telesá, t.j. práca

$$W = \sum_{\alpha} = [K_\alpha + U_\alpha]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_n^{\alpha} \cdot d\vec{s}_\alpha + \int_{t_1}^{t_2} \vec{D}_n^{*,\alpha} \cdot d\vec{\omega}_\alpha \tag{57}$$

alebo *celková kinetická a potenciálna energia*

$$K+U = \sum_{\alpha} \frac{1}{2}M_\alpha|\vec{V}_\alpha^*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}_\alpha\cdot\vec{\vec{I}}_\alpha\cdot\vec{\omega}_\alpha + U_\alpha(\vec{r}_\alpha,\vec{\omega}_\alpha) \tag{58}$$

2.5 Geometrické väzby, virtuálne posunutie a D'Alembertov princíp

Uvažujme systém N hmotných bodov, analogické vzt'ahy platia aj pre systém N i.t.t. no treba paralelne viest' aj súradnice a rovnice pre otáčanie.

- Sily reakcie - splnenie geometrickej reštrikcie pohybu, tzv. *väzby*:

  1. Holonómne väzby: $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) = 0, i = 1, ..., N_v$, jednoducho redukujú stupne vol'nosti.
  2. Neholonómne väzby: dané nerovnost'ami $f_i(\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, t) \geq 0, i = 1, ..., N_v$(napr. gulička na povrchu gule v homog. gravitačnom poli), alebo obsahujúce rýchlosti (napr. kotúlanie kolesa v 2D rovine)

- Holonómne - vel'mi časté pri manipulátoroch, možno obíst' zavedením vhodných súradníc $\{q_i\}_{i=1}^{M}$, $M = 3N - N_v$, ktoré nazývame *zovšeobecnené súradnice*, a úlohu formulovat' pomocou tzv. Lagrangeových rovníc, diferenciálnych rovníc pre týchto M geometrických stupňov vol'nosti. Pôvodné a zovšeobecnené súradnice spolu súvisia transformáciou

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t), \quad i = 1, ..., N \tag{59}$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t) \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \vec{r}_i(q_1, q_2, ..., q_M; t), \quad i = 1, ..., N \tag{60}$$

  t.j. kým $\vec{r}_i$ sú len funkciami q_i a času, $\vec{v}_i$ sú funkciami $q_i, \dot{q}_i$ a času.

- *Virtuálne posunutie* je malé l'ubovolné posunutie systému bodov $\delta\vec{r}_i$ také, že pritom geometrické obmedzenie (holonómne väzby) na tieto posunutia sa berie fixované pre vybraný okamžik času t. Takáto zmena zodpovedá zmene zovšeobecnených súradníc δq_j

$$\delta\vec{r}_i = \sum_j \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \tag{61}$$

- *D'Alembertov princíp* Práca vykonaná silami reakcií geometrických obmedzení pri virtuálnom posunutí je nulová - triviálne nakol'ko reakcie sú kolmé na posunutia. Ak pohybové rovnice sú

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i = \vec{F}_i + \vec{f}_i, \quad i = 1, ..., N, \tag{62}$$

  kde $\vec{f}_i$ je súčet všetkých síl geometrických obmedzení (reakcie) pôsobiacich na i-ty bod a $\vec{F}_i$ súčet všetkých ostatných síl (gravitačné,elektrické) pôsobiacich na tento bod, potom D'Alembertov princíp vraví

$$0 = \sum_i \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_i \left(m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i \right) \cdot \delta\vec{r}_i \tag{63}$$

  Ak by boli $\delta\vec{r}_i$ nezávislé stupne vol'nosti, potom z poslednej rovnice dostaneme naspät'

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \vec{F}_i = 0$$

  Oni ale nie sú...