pokračovanie z predchádzajúceho týždňa
Tenzor zotrvačnosti

1. začneme s
$$\sum_i \vec{a}_i \times dm_i(\vec{\omega} \times \vec{a}_i) = \sum_i dm_i\,(\vec{\omega}(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i) - \vec{a}_i(\vec{\omega} \cdot \vec{a}_i)) = \sum_i dm_i((\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i)\vec{\vec{1}} - \vec{a}_i\vec{a}_i) \cdot \vec{\omega}$$
kde máme
$$\vec{\vec{1}} = \vec{i}\vec{i} + \vec{j}\vec{j} + \vec{k}\vec{k} \tag{8}$$
Ak všetky vektory vyjadríme v báze $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ dostaneme komponenty
$$\begin{pmatrix} \sum_i dm_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i dm_i x_i y_i & -\sum_i dm_i x_i z_i \\ -\sum_i dm_i y_i x_i & \sum_i dm_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i dm_i y_i z_i \\ -\sum_i dm_i z_i x_i & -\sum_i dm_i z_i y_i & \sum_i dm_i(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{9}$$
Dôležité: existuje taká sústava v ktorej je tenzor zotrvačnosti diagonálny (diagonalizácia, vlastné hodnoty, vlastné vektory), jej bázové vektory budeme označovať $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. V nej chceme písať 2. vetu impulzovú...

2. Špeciálny prípad 1 - pevná os rotácie

3. Špeciálny prípad 2 - pevný bod, gyroskop (urobený neskôr detailne)

4. Vzťah $\vec{\omega}$ s natočením sústavy - chceme parametrizovať cez premenné - stupňe voľnosti, ktorými vieme zistiť v akej orientácii je teleso - Eulerove uhly.

2.3 Prechod medzi súradnicovými sústavami

Konvencie

Budeme používať značenia:

- rotácia okolo 3. bázového vektora ($\vec{k}$) o uhol ϕ bude
$$\mathscr{O}^{\phi,3}[\,]$$

- Tri ortogonálne jednotkové vektory budú všeobecne $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ a špeciálne, v sústave natočenej spolu s študovaným tuhým telesom ako $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$. Aby sme nemuseli písať tri vektory, tak jednoducho budeme písať $\vec{f}_i$ alebo $\vec{e}_j$ a pod.

- Einsteinovo sumačné pravidlo: cez dva súčinitele majúce ten istý index sumujeme, t.j.
$$\sum_i a_i b_i \text{ budeme písať ako } a_i b_i$$
zložky vektora $c_i, i = 1,2,3$ ktoré vzniknú násobením matice
$$M_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$
s zložkami iného vektora $a_i, i = 1,2,3$ budeme písať
$$c_i = M_{ij} a_j$$
kde vlastne máme 3 rovnice (pre $i = 1,2,3$) a cez j je myslené sumovanie.

Zavedenie rotácie a základné princípy

Geometricky, otočenie vektora $\boldsymbol{p}$ chápeme ako lineárne zobrazenie, v ktorom vektoru $\boldsymbol{p}$ priradíme iný vektor $\boldsymbol{q}$ pomocou predpisu

$$\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}' : \boldsymbol{p}' = \mathscr{O}[\boldsymbol{p}]. \tag{10}$$

pričom veľkosť vektora ostane nezmenená, $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{p}'|$.

Rotácia je lineárna operácia, t.j.

$$\mathscr{O}[\vec{p}+\vec{q}] = \mathscr{O}[\vec{p}] + \mathscr{O}[\vec{q}] \tag{11}$$

Ak chceme nájsť zložky zrotovaného vektora v báze $\vec{e}_i$ potom premietaním do týchto smerov máme

$$p'_i = \vec{p}' \cdot \vec{e}_i = \mathscr{O}[\sum_j p_j \vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i = \sum_j p_j \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{12}$$

Na cvičení sme ale našli maticu, ktorá transformuje súradnice rotovaného vektora, t.j.

$$p'_i = \sum_j R_{ij} p_j \tag{13}$$

t.j. vidíme že

$$R_{ij} = \mathscr{O}[\vec{e}_j] \cdot \vec{e}_i \tag{14}$$

a pretože

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

platí tiež

$$\mathscr{O}[\vec{e}_j] = \sum_n R_{nj} \vec{e}_n = R_{nj} \vec{e}_n$$

(sumačná konvencia!!!), čo budeme veľmi veľa krát využívať!

Ak je rotácia otáčanie okolo $\vec{e}_3$ o uhol ϕ, t.j. $\mathscr{O}^{\phi,3}$ potom podľa cvičení

$$R_{ij} = R_{ij}^{\phi,3} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

V prípade otáčania okolo $\vec{e}_1$ alebo $\vec{e}_2$ budú prirodzene platiť podobné transformačné matice, len s permutovanými riadkami a stĺpcami:

$$R_{ij}^{\phi,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$R_{ij}^{\phi,2} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & \sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \tag{17}$$