

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Elektrický prúd

Ivan Červeň, Peter Bokes

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2023

Druhé, upravené a doplnené vydanie publikácie bolo realizované
s podporou KEGA v rámci projektu 006STU-4/2022
„Digitálna podpora predmetov fyzikálneho inžinierstva“

© Ivan Červeň, Peter Bokes

Recenzenti:

prof. Ing. Július Cirák, CSc.

doc. Ing. Ján Vajda, CSc.

ISBN 978-80-227-5352-4

ELEKTRICKÝ PRÚD

Prvá časť kapitoly sa zaoberá základnými pojmami súvisiacimi s elektrickým prúdom. Opiera sa o zákon zachovania elektrického náboja, z ktorého je odvodený prvý Kirchhoffov zákon. Nevšima si silové pôsobenie na pohybujúce sa náboje, dalo by sa povedať, že má kinematický charakter. Druhá časť kapitoly sa zaoberá silovým pôsobením na nabité častice vo vodičoch prúdu, pričom sa odvíja od Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare, zaoberá sa matematickým opisom zdrojov energie zaradených do elektrického obvodu a stratami tejto energie vo vodičoch. V závere kapitoly sa poukazuje na súvislosť Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare s druhým Kirchhoffovým zákonom. Kapitola sa nezaoberá špecifikami striedavého elektrického prúdu, ani zvláštnosťami elektrického prúdu v kovoch, plynch alebo elektrolytoch. V dodatku je kapitola doplnená opisom tenzora elektrickej vodivosti.

Potrebné vedomosti

Treba poznať pojmy zavedené už v mechanike, ako zrýchlenie, sila, práca, energia. Rovnako sú nevyhnutné základné poznatky z elektrostatiky o potenciáli, intenzite, ich jednotkách a ich vzájomnej súvislosti. V kapitole sa používa aj vektorový počet, vrátane operátora nabla, opísaného v kapitole o vektoroch (gradient, divergencia, rotácia). Znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu je rovnako nevyhnutná, vrátane jeho aplikácií na vektorové funkcie, ako derivácia a integrácia skalárnej i vektorovej funkcie viacerých premenných, vrátane Gaussovej integrálnej vety.

OBSAH

TEXTY

9.1	Kinematika elektrického prúdu	
9.1.1	Definícia elektrického prúdu, hustota prúdu	5
9.1.2	Rovnica kontinuity elektrického prúdu	9
9.1.3	Prvý Kirchhoffov zákon	11
9.2	Dynamika elektrického prúdu	
9.2.1	Ohmov zákon v diferenciálnom tvare	14
9.2.2	Ohmov zákon v integrálnom tvare	17
9.2.3	Tepelné účinky elektrického prúdu	20
9.2.4	Elektromotorické napätie	23
9.2.5	Druhý Kirchhoffov zákon	28

DODATOK

D1	Tenzor konduktivity	31
----	---------------------	----

SÚHRN VZŤAHOV	36
---------------	----

SLOVNÍK	37
---------	----

ÚLOHY	39
-------	----

9.1 Kinematika elektrického prúdu

Kľúčové slová

Elektrický prúd, hustota elektrického prúdu, ampér, transportná rýchlosť, rovnica kontinuity, prvý Kirchhoffov zákon

9.1.1 Definícia elektrického prúdu, hustota prúdu

Elektrický prúd ako **jav**, predstavuje usmernený pohyb elektricky nabitých častíc (elektrónov, iónov), napríklad v kovovom vodiči, ionizovanom plyne alebo elektrolyte.

Ako **veľičina**¹ je elektrický prúd I definovaný podielom elektrického náboja ΔQ ktorý prejde prierezom vodiča a príslušného časového intervalu Δt ; okamžitá hodnota elektrického prúdu je limitou tohto podielu pre $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} . \quad (9.1.1.1)$$

Elektrický **prúd** I je **skalárna veličina**, lebo v jeho definícii vystupujú len skalárne veličiny. Jednotkou elektrického prúdu v SI je **ampér** , čo je prúd, pri ktorom prierezom vodiča prejde za jednu sekundu elektrický náboj veľkosti jeden coulomb. To znamená, že medzi jednotkami ampér a coulomb platí vzťah $1\text{ A} = 1\text{ C/s}$, ako aj opačný vzťah $1\text{ C} = 1\text{ A} \cdot \text{s}$ (ampérsekunda). V praxi sa používajú násobky aj diely tejto jednotky. Pre názornejšiu predstavu o veľkosti ampéra je vhodné uviesť, že cez 100 W žiarovku pripojenú na sieť s napätím 230 V prechádza prúd takmer 0,5 A, cez vodiče diaľkového vedenia veľmi vysokého napätia rádovo 10^3 A. V klasickom modeli atómu vodíka elektrón obiehajúci okolo jadra vytvára prúd na úrovni 10^{-3} A.

Donedávna bol ampér v sústave SI definovaný na základe vzájomného silového pôsobenia dvoch rovnobežných vodičov, ale od mája 2019 je definovaný prostredníctvom veľkosti elementárneho elektrického náboja a sekundy, ktorá je definovaná na základe frekvencie žiarenia vysielaného izotopom atómu Cs-133. (Pozri aj časť 10.2.6)

Z praktického hľadiska je významnou veličinou **hustota elektrického prúdu**, (aj **plošný elektrický prúd**), definovaná vzťahom

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS} . \quad (9.1.1.2)$$

Hustota elektrického prúdu predstavuje prúd pripadajúci na jednotkový plošný obsah prierezu vodiča, preto jednotkou tejto veličiny je A/m^2 . Z praktického hľadiska je to nevhodná jednotka, preto sa hustota elektrického prúdu často vyjadruje pomocou

¹ V medzinárodnej terminológii, v normách ISO, sa používa termín *prúd* ako názov pre jav aj pre veličinu. V minulosti sa u nás pre veličinu používal termín *intenzita prúdu*, čo je z terminologického hľadiska korektné, lebo v takom prípade jeden termín nemá dva významy.

jednotky A/mm^2 . Hustota elektrického prúdu nebýva v celom priereze vodiča rovnaká.

Hustotu elektrického prúdu možno vyjadriť pomocou tzv. **transportnej (unášavej alebo aj driftovej) rýchlosti** v , ktorou sa súbor voľných elektrónov vo vodiči posúva. Táto rýchlosť rádovo dosahuje veľkosť iba niekoľko milimetrov za sekundu a je neobyčajne malá v porovnaní s rýchlosťou chaotického tepelného pohybu voľných elektrónov v kove, ktorá pri izbových teplotách dosahuje rádovo 10^2 km/s .

Vzťah medzi hustotou elektrického prúdu a transportnou rýchlosťou možno získať nasledujúcou úvahou. Predpokladajme, že v objemovej jednotke kovového vodiča je n voľných elektrónov. Tomu zodpovedá objemová hustota voľného elektrického náboja $\rho = ne$, kde e je náboj elektrónu. Na základe toho upravíme vzťah (9.1.1.1) tak, že namiesto náboja ΔQ dosadíme výraz $\rho \Delta \tau$, kde $\Delta \tau$ predstavuje objem s elektrónmi, ktorý za časový interval Δt prešiel prierezom vodiča:

$$I = \frac{\rho \Delta \tau}{\Delta t}. \quad (9.1.1.3)$$

Predpokladáme, že elektróny sa vplyvom vonkajšieho elektrického poľa posúvajú vodičom transportnou rýchlosťou v , preto za časový interval Δt sa posunú o dĺžku $v \Delta t$. Objem $\Delta \tau$ zaplnený elektrónmi, ktorý prejde prierezom S , je $\Delta \tau = S v \Delta t$. Po dosadení do rovnice (9.1.1.3) dostaneme pre prúd výraz

$$I = \frac{\rho \Delta \tau}{\Delta t} = \frac{\rho S v \Delta t}{\Delta t} = \rho S v. \quad (9.1.1.4)$$

Po vydelení rovnice plošným obsahom S prierezu, dostaneme pre hustotu elektrického prúdu vzťah

$$J = \frac{I}{S} = \rho v = nev. \quad (9.1.1.5)$$

Transportná rýchlosť $\mathbf{v}$ je vektorová veličina, má veľkosť aj smer. Preto aj hustota elektrického prúdu je vektorová veličina, ktorú vyjadrujeme ako skalárny násobok vektora transportnej rýchlosti

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} = nev. \quad (9.1.1.6)$$

V ionizovaných plynch a v elektrolytoch je elektrický prúd podmienený pohybom kladne aj záporne nabitých častíc (**iónov**), s objemovými hustotami nábojov ρ_+ resp. ρ_- . Kladné ióny sa pohybujú v smere intenzity elektrického poľa transportnou rýchlosťou v_+ , záporne nabitý opačným smerom rýchlosťou v_- . Tomu zodpovedajú hustoty elektrického prúdu

$$\mathbf{J}_+ = \rho_+ \mathbf{v}_+ \quad \text{a} \quad \mathbf{J}_- = \rho_- \mathbf{v}_-. \quad (9.1.1.7)$$

Napriek tomu, že transportné rýchlosti kladných a záporných iónov majú opačný smer, vektory hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}_+$ a $\mathbf{J}_-$ majú smer súhlasný, lebo objemová hustota náboja ρ_- je záporná. Smer obidvoch vektorov sa zhoduje so smerom pohybu kladného náboja (so smerom jeho vektora transportnej rýchlosti).

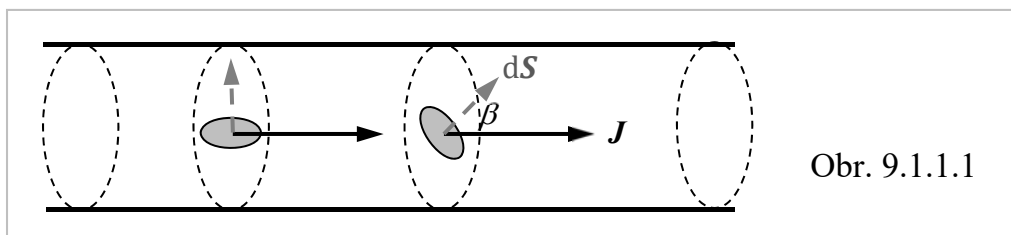
Skutočnosť, že hustota elektrického prúdu je vektorová veličina, sa prejaví aj pri úprave vzťahu (9.1.1.2), ktorý prepíšeme do tvaru $dI = J dS$. Takýto vzťah je však správny iba vtedy, keď ploška dS je na smer vektora transportnej rýchlosti kolmá. V opačnom prípade treba vzťah upraviť na tvar (Obr. 9.1.1.1)

$$dI = J dS \cos \beta, \quad (9.1.1.8)$$

kde β je uhol medzi vektorom transportnej rýchlosti a normálou na plošku dS . Ploške dS možno priradiť vektor $d\mathbf{S}$, ktorý má smer jej normály, takže rovnicu (9.1.1.8) možno upraviť na tvar

$$dI = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.1.1.9)$$

To znamená, že ak sú vektory $\mathbf{J}$ a $d\mathbf{S}$ na seba kolmé, cez plošku prúd neprechádza.



Obr. 9.1.1.1

Integráciou vzťahu (9.1.1.9) získame významný výsledok, vyjadrujúci prúd prechádzajúci prierezom S vodiča:

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}. \quad (9.1.1.10)$$

Z vlastnosti skalárneho súčinu vyplýva, že prúd I cez konkrétnu plochu S môže byť záporný, ak sú vektory $\mathbf{J}$ a $d\mathbf{S}$ orientované proti sebe (všeobecnejšie ak zvierajú tupý uhol). Táto okolnosť sa uplatňuje v Kirchhoffových zákonoch. Je vhodné na tomto mieste zopakovať, že na ľavej strane rovnice vystupuje elektrický prúd, teda náboj, ktorý za sekundu prejde plochou S .

Poznámka: Elektrický prúd je skalárna veličina, preto jej nemôžeme pripísať smer, iba znamienko. Napriek tomu sa často hovorí o smere elektrického prúdu, lebo to zjednodušuje, resp. skracuje vysvetľovanie niektorých javov, najmä v magnetizme. Vtedy sa pod pojmom smer prúdu rozumie smer pohybu kladne nabitých častíc, teda smer vektora hustoty elektrického prúdu.

Príklad 9.1.1.1 Aká je hustota elektrického prúdu v hliníkovom vodiči s priemerom $d = 2$ mm, ak ním tečie prúd $I = 4$ A?

Riešenie: Hustota prúdu sa rovná $J = I / (\pi d^2) \cong 4 / (10 \times 4) \text{ A/mm}^2 = 0,1 \text{ A/mm}^2$.

Príklad 9.1.1.2 Aká je transportná rýchlosť elektrónov v medenom vodiči pri hustote prúdu $J = 10 \text{ A/mm}^2$, keď počet elektrónov v 1 cm^3 je približne $n = 1 \times 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ a jeden elektrón nesie náboj $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$?

Riešenie: Použijeme vzťah $J = \rho v = nev$, odkiaľ $v = J/(ne) \cong 0,63 \text{ mm/s}$.

Príklad 9.1.1.3 Veľkosť elektrického prúdu vo vodiči rastie lineárne s časom. V čase $t_0 = 0$ bol prúd nulový, v čase t_1 mal hodnotu I_1 . Koľko elektrického náboja Q_1 prešlo celým prierezom vodiča v časovom intervale $(0, t_1)$?

Riešenie: Lineárna závislosť prúdu od času sa vyjadrí vzťahom $I = kt + I_0$. Z podmienky, že v čase $t_0 = 0$ bol prúd nulový vyplýva, $I_0 = 0$. Zo známej veľkosti prúdu v čase t_1 získame konštantu k : $I_1 = kt_1 \Rightarrow k = (I_1/t_1)$, ktorú dosadíme do všeobecnej závislosti prúdu od času: $I = (I_1/t_1)t$. Z definičného vzťahu elektrického prúdu (9.1.1.1) získame vzťah vyjadrujúci náboj: $dQ = I dt \Rightarrow$

$$Q_1 = \int dQ = \int_0^{t_1} I dt = \int_0^{t_1} \left(\frac{I_1}{t_1}\right)t dt = \frac{1}{2} \frac{I_1}{t_1} t_1^2 = \frac{1}{2} I_1 t_1.$$

Výsledok príkladu 9.1.1.3 ukazuje, že rovnako veľký náboj by prešiel vodičom aj vtedy, ak by vodičom prechádzal po celý časový interval $(0, t_1)$ prúd s veľkosťou $I_{\text{str}} = (I_1/2)$. Prúd I_{str} s uvedenou vlastnosťou sa nazýva **stredná hodnota elektrického prúdu** a definuje sa vzťahom

$$I_{\text{str}} = \frac{1}{T} \int_0^T I(t) dt, \quad (9.1.1.11)$$

kde T je časový interval sledovania veľkosti prúdu. Využíva sa napríklad pri výpočte strednej hodnoty jednosmerného pulzujúceho prúdu. Pri striedavom sínusovom prúde je stredná hodnota nulová.

Kontrolné otázky

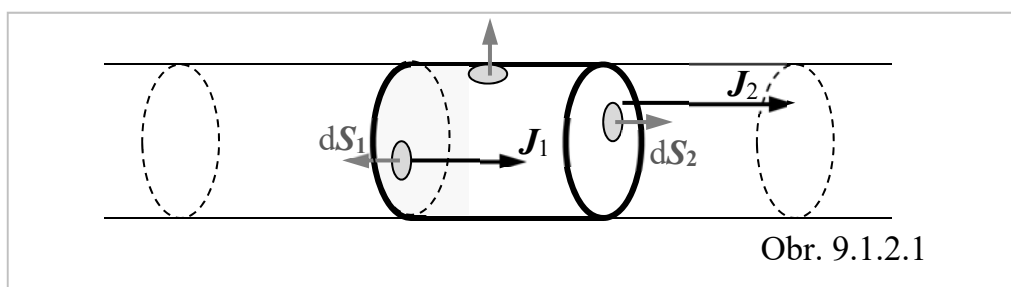
1. Ako je definovaná veličina elektrický prúd?
2. Aký je názov jednotky elektrického prúdu?
3. Ako súvisí jednotka coulomb s jednotkou ampér?
4. Ako je definovaná hustota elektrického prúdu?
5. Čo je jednotkou hustoty elektrického prúdu?
6. Čo je transportná rýchlosť elektrónov a akú má rádovo veľkosť?
7. Ako súvisí hustota elektrického prúdu s transportnou rýchlosťou?

9.1.2 Rovnica kontinuity elektrického prúdu

Rovnica kontinuity pre elektrický prúd (nazývaná aj *rovnica spojitosti*) je matematickým vyjadrením zákona zachovania elektrického náboja. Ak do objemu ohraničeného uzavretou plochou (napríklad v tvare valca, na obrázku vyznačeného hrubými čiarami) prichádza za sekundu viac náboja ako vychádza, potom v uzavretej ploche náboja pribúda. Uvedená veta je kvalitatívnym slovným vyjadrením rovnice kontinuity.

Pri odvodení rovnice kontinuity budeme používať vzťah (9.1.1.10):

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$



Predpokladajme, že vektor $\mathbf{J}_1$ a podobne aj vektor $\mathbf{J}_2$ (podľa obrázku), je v každom bode základne valca čo do veľkosti rovnaký a kolmý na rovinu základne. Podľa obrázku vektor $\mathbf{J}$ je rovnobežný s povrchovými priamkami valcovej plochy, preto cez plášť valca elektrický prúd neprechádza. Ak plošný obsah základne je S a vektory priradené základňam označíme $\mathbf{S}_1$ a $\mathbf{S}_2$, potom integrály na jednej a druhej základni možno ľahko vypočítať:

$$I_1 = \iint_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{S}_1, \quad I_2 = \iint_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{S}_2. \quad (9.1.2.1)$$

Prúd I_1 do valca vstupuje (podľa zvoleného smeru vektorov $\mathbf{J}_1$ a $\mathbf{S}_1$ je záporný), prúd I_2 z valca vychádza a je kladný. Ak sú obidva prúdy čo do veľkosti rovnaké, ich súčet sa rovná nule a vo valcovej ploche sa elektrický náboj nehromadí, ani ho neubúda. Ak však prúdy nie sú rovnako veľké, ich súčet sa rovná zmene náboja za jednotku času, čo sa vyjadruje ako derivácia náboja nachádzajúceho sa v uzavretej ploche podľa času:

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{S}_1 + \mathbf{J}_2 \cdot \mathbf{S}_2 = (?) \frac{dQ}{dt}. \quad (9.1.2.2)$$

Pred deriváciou na pravej strane je otáznik, ktorý má upozorniť na nevyhnutnosť úvahy o znamienku. Ak prvý člen na ľavej strane rovnice (je záporný!) je v absolútnej hodnote väčší než druhý člen, vtedy je celá ľavá strana rovnice záporná. Ale náboja vo valci vtedy pribúda, takže derivácia na pravej strane rovnice je kladná (pozri poznámku na konci odseku). Ak by na namieste otáznika bolo kladné znamienko, prišlo by k nesúladu znamienok medzi ľavou a pravou stranou rovnice. Preto otáznik treba nahradiť

záporným znamienkom. Rovnicu (9.1.2.2) upravíme v súlade s týmto výsledkom a prúdy vyjadríme tak ako v rovnici (9.1.2.1) integrálmi:

$$\iint_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (9.1.2.3)$$

Treba opätovne zdôrazniť, že náboj Q vystupujúci v tejto rovnici je celkový voľný náboj obsiahnutý v uzavretej ploche, nie náboj ktorý z plochy odišiel.

Poznámka:

Deriváciu náboja podľa času vyjadríme ako limitu:

$$\frac{dQ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q_2 - Q_1}{t_2 - t_1}.$$

Predpokladajme, že $t_2 > t_1$, takže menovateľ zlomku je kladný. Ak náboja s časom pribúda, potom aj $Q_2(t_2) - Q_1(t_1)$ je kladné číslo a celý zlomok je kladný.

Ľavú stranu rovnice (9.1.2.3) upravíme tak, že do integrácie zahrnieme aj plášť valca, takže budeme integrovať cez celý povrch uzavretej valcovej plochy. Tým pribudne na ľavú stranu tretí člen, ktorý síce v uvažovanom konkrétnom prípade sa rovná nule, ale rovnica tým nadobudne všeobecný charakter a bude vhodná aj pre prípady, keď do daného miesta prichádza prúd z viacerých smerov. Tak sa integrácia vykoná cez celú uzavretú plochu:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}. \quad (9.1.2.4)$$

Tým sme získali **rovniciu kontinuity v integrálnom tvare**.

Rovnica kontinuity je známejšia vo svojom diferenciálnom tvare. Na jeho získanie treba upraviť obidve strany rovnice (9.1.2.4). Náboj na pravej strane vyjadríme ako objemový integrál objemovej hustoty voľného elektrického náboja:

$$Q = \iiint_V \rho_v d\tau,$$

a pre jeho deriváciu podľa času dostaneme:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iiint_V \rho_v d\tau \right) = \iiint_V \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) d\tau. \quad (9.1.2.5)$$

Pri úprave ľavej strany využijeme Gaussovu integrálnu vetu, vyjadrujúcu zmenu plošného integrálu cez uzavretú plochu objemovým integrálom:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\tau. \quad (9.1.2.6)$$

Dosadením do rovnice kontinuity v integrálnom tvare dostaneme rovnicu, v ktorej na oboch stranách vystupujú objemové integrály so zhodnými integračnými medzami:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\tau = - \iiint_V \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \right) d\tau.$$

Rovnaké, ale inak ľubovoľné integračné medze znamenajú, že integrované funkcie na ľavej a pravej strane rovnice musia byť rovnaké. Z toho potom získame

rovniciu kontinuity v diferenciálnom tvare:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (9.1.2.7)$$

Obidve formulácie rovnice kontinuity majú významné uplatnenie v teórii elektromagnetického poľa, ako aj v teórii elektrických obvodov.

Kontrolné otázky

1. Aký je fyzikálny obsah rovnice kontinuity elektrického prúdu?
2. Kedy považujeme elektrický prúd prechádzajúci uzavretou plochou za záporný?
3. Ako je formulovaná rovnica kontinuity v integrálnom tvare?
4. Ako je formulovaná rovnica kontinuity v diferenciálnom tvare?
5. Vyjadruje rovnica kontinuity situáciu korektne aj vtedy, keď do uzavretej plochy prichádza záporný elektrický náboj?
6. Opíšte nabíjanie kondenzátora pomocou rovnice kontinuity v integrálnom tvare.

9.1.3 Prvý Kirchhoffov zákon

Je dôsledkom zákona zachovania elektrického náboja, preto sa dá odvodiť z rovnice kontinuity elektrického prúdu. Platí však len v ustálenom stave, čo znamená, že objemová hustota elektrického náboja sa vo vodiči nemení, čiže na žiadnom mieste vodiča sa náboj nehromadí, ani ho tam neubúda.

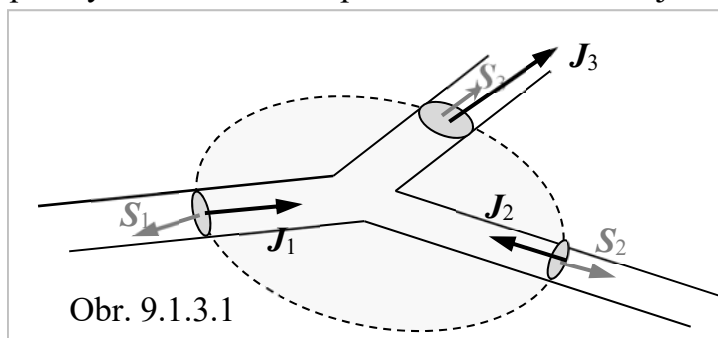
Pri odvodení prvého Kirchhoffovho zákona je vhodné vychádzať z integrálnej formy rovnice kontinuity:

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dQ}{dt}. \quad (9.1.3.1)$$

Vektor $d\mathbf{S}$ je podľa dohody orientovaný vždy z uzavretej plochy von, takže integrál je kladný vtedy, keď aj vektor hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}$ smeruje z plochy von. Vtedy z náboja nachádzajúceho sa v objeme ohraničenom uzavretou plochou ubúda. V ustálenom stave sa však veľkosť tohto náboja s časom nemení, takže $dQ/dt = 0$. Preto sa aj ľavá strana rovnice rovná nule:

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (9.1.3.2)$$

Táto rovnosť sa splní v triviálnom prípade, keď vektor $\mathbf{J}$ sa v každom bode uzavretej plochy rovná nule. Z praktického hľadiska je však zaujímavé, keď na niektorých



miestach plochy nulový nie je. Vtedy týmto miestom vchádza prúd, ale aby sa v uzavretej ploche náboj nehromadil, iným miestom musí prúd odchádzať. Na obrázku je naznačená uzavretá plocha (čiarkovane) a do nej tri prívody prúdu. Integrál (9.1.3.2) rozpíšeme

na toľko častí, koľko prívodov prichádza do uzavretej plochy (integrály cez časti uzavretej plochy, cez ktoré prúd neprechádza, sú samozrejme nulové):

$$\oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{J}_1 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{J}_2 \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_3} \mathbf{J}_3 \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (9.1.3.3)$$

pričom v súlade s rovnicami (9.1.2.1) môžeme napísať aj vzťah

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (9.1.3.4)$$

Podľa obrázku prúdy I_1 a I_2 sú záporné, prúd I_3 kladný, ale ich súčet sa musí rovnať nule.

Prvý Kirchhoffov zákon sa týka ľubovoľného počtu prívodov. Hovorí, že *v ustálenom stave súčet prúdov vstupujúcich do uzla sa rovná súčtu prúdov z uzla vystupujúcich.*

Vystupujúce prúdy možno považovať za záporné vstupujúce prúdy, a vtedy sa prvý Kirchhoffov zákon formuluje stručnejšie: *v ustálenom stave súčet prúdov vstupujúcich do ľubovoľného uzla elektrického obvodu sa rovná nule.*

Pri odvodení prvého Kirchhoffovho zákona možno vychádzať aj z diferenciálneho tvaru rovnice kontinuity:

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0.$$

V ustálenom stave sa objemová hustota voľného náboja v žiadnej časti vodiča nemení, takže $(\partial \rho_v)/\partial t = 0$, z čoho vyplýva, že aj $\operatorname{div} \mathbf{J} = 0$ v každom bode vodiča. Preto sa nule rovná aj objemový integrál

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\tau = 0,$$

ktorý pomocou Gaussovej integrálnej vety premeníme na plošný integrál cez uzavretú plochu:

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{J} \, d\tau = \oiint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0.$$

Potom sa už postupuje rovnako ako v predchádzajúcom prípade.

Kontrolné otázky

1. Aká podmienka sa musí splniť, aby platil prvý Kirchhoffov zákon?
2. Ako je sformulovaný prvý Kirchhoffov zákon?
3. Platí prvý Kirchhoffov zákon iba pre jednosmerný elektrický prúd?
4. Akým matematickým vzťahom sa dá vyjadriť ustálený stav vo vodiči prúdu?

9.2 Dynamika elektrického prúdu

Kľúčové slová

Ohmov zákon, konduktivita, rezistivita, pohyblivosť, Joulovo teplo, druhý Kirchhoffov zákon, elektromotorické napätie

9.2.1 Ohmov zákon v diferenciálnom tvare

Ohmov zákon má dve významné formy, pre ktoré sú zaužívané názvy **Ohmov zákon v diferenciálnom tvare** a **Ohmov zákon v integrálnom tvare** (aj **Ohmov zákon pre úsek vodiča**). Prvý z nich vyjadruje lokálny vzťah medzi intenzitou elektrického poľa a hustotou elektrického prúdu, pričom platí v každom bode vodiča. Pri Ohmovom zákone v integrálnom tvare ide o integráciu Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare cez objem úseku vodiča (odtiaľ alternatívny názov).

K Ohmovmu zákonu v diferenciálnom tvare možno dospieť pomocou úvah o pôsobení elektrickej sily na elektróny nachádzajúce sa vo vodiči, ktoré sú touto silou urýchľované. Elektrické pole vo vodiči je vytvárané vonkajším zdrojom, ktorý stály elektrický prúd udržiava (pozri článok o elektromotorickom napätí). Rýchlosť, ktorú elektrón nadobudne pôsobením elektrického poľa, prakticky ihneď stratí zrážkou s niektorým z atómov vodiča, ale poľom je zase urýchľovaný a procedúra sa neustále opakuje. Napriek obrovskému zrýchleniu, ktoré elektróny dosahujú v elektrickom poli (pozri príklad 8.1.3.3 v elektrostatike), pre svoje časté zrážky sa vodičom pohybujú veľmi malou priemernou rýchlosťou, nazývanou **transportná (driftová) rýchlosť**.

Elektrický prúd v kovoch je sprostredkovaný elektrónmi, ktoré nesú záporný elementárny elektrický náboj $-e$ a majú hmotnosť m_e . Ak elektrické pole vo vodiči má intenzitu veľkosti E , na elektrón pôsobí elektrická sila, ktorej veľkosť (absolútna hodnota) je vyjadrená vzťahom

$$F = eE .$$

Táto sila udeľuje elektrónu zrýchlenie

$$a = F/m_e = eE/m_e .$$

Ak sa elektrón pohybuje konštantným zrýchlením, jeho rýchlosť rastie lineárne s časom, a to až po okamih zrážky. V zjednodušenom modeli sa predpokladá (v roku 1900 ho publikoval nemecký fyzik P. Drude), že pri zrážke úplne stratí rýchlosť a procedúra sa pravidelne opakuje, pričom strednú dobu medzi zrážkami označíme symbolom τ . Maximálna rýchlosť, ktorú tesne pred zrážkou dosiahne, potom má hodnotu

$$v_{\max} = a\tau = eE\tau/m_e . \quad (9.2.1.1)$$

Transportná rýchlosť je priemernou rýchlosťou, to znamená, že v súlade s jednoduchým modelom predstavuje iba polovicu maximálnej rýchlosti:

$$v_d = eE\tau/(2m_e) . \quad (9.2.1.2)$$

Pre hustotu elektrického prúdu bol odvodený vzťah (9.1.1.5), podľa ktorého

$$J = \rho v = nev_d , \quad (9.2.1.3)$$

kde n je počet elektrónov v objemovej jednotke (koncentrácia), e elementárny náboj a v_d transportná (driftová) rýchlosť. Po dosadení transportnej rýchlosti zo vzťahu (9.2.1.2) dostaneme pre hustotu prúdu výraz

$$J = \frac{ne^2\tau}{2m_e} E = \gamma E , \quad (9.2.1.4)$$

čo je skalárna forma Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare. Intenzita elektrického poľa, ako aj hustota prúdu sú vektorové veličiny, preto sa Ohmov zákon zapisuje vo vektorovom tvare

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E} , \quad (9.2.1.5)$$

kde koeficient $\gamma = (ne^2\tau)/(2m_e)$ je **konduktivita** prostredia, ktorej starší, dnes už neplatný názov bol *merná elektrická vodivosť*. Jednotkou konduktivity v SI je $A/(V \cdot m) = \Omega^{-1}m^{-1}$. Prevrátená hodnota konduktivity je **rezistivita**, ktorej jednotka je $\Omega \cdot m$ a jej starý názov *merný elektrický odpor*. Ak sa v Ohmovom zákone v diferenciálnom tvare použije rezistivita namiesto konduktivity, zapisuje sa v tvare

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} . \quad (9.2.1.6)$$

Podľa vzťahu (9.2.1.4) konduktivita závisí od koncentrácie voľných elektrónov n a od strednej doby medzi zrážkami τ . Doba τ sa s rastúcou teplotou vodiča znižuje, lebo atómy intenzívnejšie kmitajú a tak väčšími prekážajú pohybu elektrónov. Preto konduktivita s rastúcou teplotou vodiča klesá, ale jej prevrátená hodnota – rezistivita – rastie. V polovodičoch sa s rastúcou teplotou zväčšuje koncentrácia voľných elektrónov (alebo dier), čo prispieva k zväčšeniu konduktivity polovodičov. Tento nárast býva kvantitatívne väčší ako pokles konduktivity v dôsledku skracovania strednej doby medzi zrážkami, a tak sa konduktivita polovodičov s teplotou zvyšuje.

Podľa vzťahu (9.2.1.2) transportná (driftová) rýchlosť je vyjadrená vzťahom

$$v_d = \frac{e\tau}{2m_e} E = bE , \quad (9.2.1.7)$$

v ktorom vystupuje koeficient b , ktorý sa nazýva **pohyblivosť** (elektrónov alebo dier) a vyjadruje veľkosť transportnej rýchlosti v elektrickom poli s jednotkovou intenzitou. Pohyblivosť elektrónov v polovodičoch dosahuje vysoké hodnoty, napr. v kremíku $b_{Si} = 1350 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$, v germániu $b_{Ge} = 3600 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$, čo je podstatne viac ako v bežných

kovových vodičoch. Príčinou je dokonalá kryštalická štruktúra týchto látok, lebo v technickej praxi sa používajú vo forme monokryštálov.

Poznámka: Jednoduchý model elektrickej vodivosti poskytuje pre konduktivitu vzťah $\gamma = (ne^2\tau)/(2m_e)$, s dvojkou v menovateli. Dvojka je dôsledkom zjednodušeného predpokladu o strednej dobe τ medzi zrážkami. Súčasná teória ju dokáže presnejšie vyjadriť na základe štatistickej fyziky, a tak dvojku vynecháva a vo vzťahu uvádza len dobu τ . To má potom dopad aj na vyjadrenie rezistivity vo vzťahu (9.2.2.4).

Príklad 9.2.1.1 Vypočítajte pohyblivosť b elektrónov v medenom vodiči, keď poznáte jeho rezistivitu $\rho = 1,7 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$, koncentráciu voľných elektrónov $n = 8,45 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ a elementárny náboj $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ As}$.

Riešenie: Pre konduktivitu platí vzťah $\gamma = ne^2\tau/(2m_e) = ne \cdot (e\tau/2m_e) = neb$, pričom rezistivita je prevrátená hodnota konduktivity, takže $b = 1/(ne\rho) = 1/(8,45 \times 10^{22} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 1,7 \times 10^{-6}) \cong 43 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$

Príklad 9.2.1.2 Vypočítajte strednú dobu medzi zrážkami elektrónu v medenom vodiči, keď pri izbovej teplote sú známe nasledujúce hodnoty: rezistivita $\rho = 1,7 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$, náboj elektrónu $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ As}$, hmotnosť elektrónu $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ a koncentrácia voľných elektrónov $n = 8,45 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$.

Riešenie: $1/\rho = \gamma = ne^2\tau/(2m_e) \Rightarrow \tau = (2m_e)/(\rho ne^2) = (2 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}) / (1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \times 8,45 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \times 2,56 \times 10^{-38} \text{ A}^2 \text{ s}^2) \cong 5 \times 10^{-14} \text{ s}$.

Príklad 9.2.1.3 Akú veľkú dráhu preletí elektrón medzi dvomi po sebe nasledujúcimi zrážkami v medenom vodiči pri izbovej teplote, keď vezmeme do úvahy a) jeho termodynamicky rovnovážnu rýchlosť $v_T \cong 100 \text{ km/s}$ b) jeho transportnú rýchlosť $v_d \cong 1 \text{ mm/s}$? Za strednú dobu medzi zrážkami použite hodnotu výsledku predchádzajúceho príkladu.

Riešenie: Elektrón letí konštantnou rýchlosťou, preto sa dráha počíta vzťahom $s = v \Delta t$:

a) $s = 10^5 \text{ m/s} \times 5 \times 10^{-14} \text{ s} = 5 \times 10^{-9} \text{ m} = 5 \text{ nm}$,

b) $s = 10^{-3} \text{ m/s} \times 5 \times 10^{-14} \text{ s} = 5 \times 10^{-17} \text{ m} = 5 \times 10^{-8} \text{ nm}$.

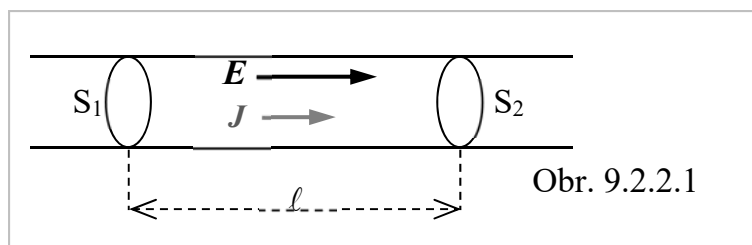
Vzdialenosť medzi najbližšími atómami v medi je 0,256 nm.

Kontrolné otázky

1. Napište Ohmov zákon v diferenciálnom tvare.
2. Ako sa nazýva veličina sprostredkujúca vzťah medzi hustotou prúdu a intenzitou elektrického poľa?
3. Aký rozmer má konduktivita v SI?
4. Ako je konduktivita ovplyvnená strednou dobou medzi zrážkami elektrónu?
5. Ako je konduktivita ovplyvnená koncentráciou elektrónov?
6. V akom vzájomnom vzťahu sú konduktivita a rezistivita?
7. Aký bol starý názov konduktivity?
8. Aký bol starý názov rezistivity?
9. Čo sa rozumie pod pohyblivosťou elektrónov v kove?

9.2.2 Ohmov zákon v integrálnom tvare, elektrický odpor

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare je vhodný viac pri teoretických úvahách, v technickej praxi sa uplatňuje Ohmov zákon vyjadrujúci vzťah medzi elektrickým napätím na časti (úseku) vodiča, elektrickým odporom tejto časti a elektrickým prúdom, ktorý ním prechádza, t. j. vzťah $U = IR$. Tento vzťah možno získať z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare integráciou cez objem úseku vodiča, preto sa preň používa názov Ohmov zákon v integrálnom tvare.



Zvolíme úsek vodiča s dĺžkou l medzi prierezmi S_1 a S_2 . Ohmov zákon v diferenciálnom tvare zapíšeme tak, aby v ňom vystupovala rezistivita (vzťah 9.2.1.6), pričom ho napíšeme v skalárnej forme:

$$E = \rho J.$$

Integrovať budeme cez objem medzi prierezmi S_1 a S_2 pozdĺž osi vodiča (os x):

$$\iiint E \, d\tau = \iiint \rho J \, d\tau.$$

Elementárny objem $d\tau$ vyjadríme ako súčin prierezu S vodiča a dĺžkového elementu dx :

$$d\tau = S \, dx,$$

pričom v snahe zjednodušiť výpočet, prierez S vodiča budeme na celom úseku integrácie považovať za rovnaký. Rovnako aj veličiny vystupujúce pod integrálmi, t. j. intenzitu E , hustotu prúdu J a rezistivitu ρ budeme považovať za konštantné v celom objeme úseku vodiča. Tak sa objemový integrál zjednoduší:

$$S \int_0^l E \, dx = S \int_0^l \rho J \, dx \Rightarrow SEl = (SJ)(\rho l) \Rightarrow El = (JS) \left(\rho \frac{l}{S} \right). \quad (9.2.2.1)$$

Súčin El sa rovná elektrickému napätiu U medzi vyznačenými prierezmi vodiča, na pravej strane rovnice súčin JS sa rovná prúdu I tečúcemu vodičom a výraz

$$\rho \frac{l}{S} = R \quad (9.2.2.2)$$

predstavuje **elektrický odpor** R vodiča.

Po dosadení do poslednej rovnice v riadku (9.2.2.1), dostaneme všeobecne známy tvar Ohmovho zákona:

$$U = IR. \quad (9.2.2.3)$$

Ako vidno zo vzťahu (9.2.2.2), elektrický odpor R úseku vodiča je úmerný jeho dĺžke a nepriamo úmerný prierezu vodiča. Rezistivitou ρ je zohľadnená kvalita materiálu. Jednotkou elektrického odporu v SI je **ohm** (značka Ω); je pomenovaná po nemeckom vedcovi *G. S. Ohmovi*. Z Ohmovho zákona vyplýva, že platí vzťah

$$1\Omega = 1\text{V/A}.$$

Prevrátená hodnota elektrického odporu sa nazýva **elektrická vodivosť** (značka G),

$$G = 1/R.$$

Jednotka elektrickej vodivosti má názov **siemens** (značka S), pričom $1\text{ S} = 1\Omega^{-1}$.

Súčiastka vyrobená tak, aby sa v elektrickom obvode využíval len jej elektrický odpor, sa volá **rezistor**.

Zo vzťahu (9.2.2.2) si možno urobiť lepší obraz o význame rezistivity ρ . Vyplýva z neho, že rezistivita sa čo do veľkosti rovná elektrickému odporu vodiča, ktorý má jednotkovú dĺžku a prierez s jednotkovým plošným obsahom. V SI sústave to predstavuje vodič s prierezom 1 m^2 a dĺžkou 1 m . To je však veľmi nepraktický rozmer vodiča, preto sa v tabuľkách rezistivity materiálov neudáva v jednotkách $\Omega\cdot\text{m}$, ale v jednotkách $\Omega\cdot\text{cm}$, prípadne $\Omega\cdot\text{mm}^2\cdot\text{m}^{-1}$ ($=10^{-6}\Omega\cdot\text{m}$).

Rezistivita, ako prevrátená hodnota konduktivity, sa v súlade s rovnicou (9.2.1.4) vyjadruje vzťahom

$$\rho = \frac{2m_e}{ne^2\tau}. \quad (9.2.2.4)$$

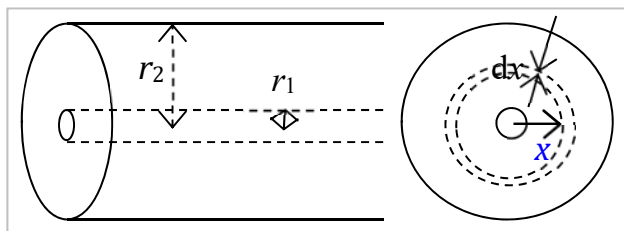
Vyplyva z neho, že v kovových vodičoch, kde sa stredná doba medzi dvomi zrážkami elektrónu s teplotou skracuje, rezistivita sa zväčšuje. V obmedzenom intervale teplôt možno túto závislosť považovať za lineárnu, čo sa vyjadruje vzťahom

$$\rho = \rho_o[1 + \alpha(t - t_o)] . \quad (9.2.2.5)$$

kde ρ_o je rezistivita pri teplote t_o . Koeficient α vyjadruje strmlosť závislosti, čím je väčší, tým je nárast rezistivity s teplotou prudší. Závislosť rezistivity, a tým aj elektrického odporu od teploty, sa využíva v precíznych teplomeroch.

Príklad 9.2.2.1 Vypočítajte elektrický odpor izolácie koaxiálneho kábla, ktorého vnútorný vodič má priemer 1 mm, vonkajší vodič 8 mm, dĺžka kábla je 100 m, rezistivita izolačného materiálu medzi vodičmi $\rho = 2 \times 10^9 \Omega \cdot \text{m}$.

Riešenie: Prúd cez izoláciu by prechádzal od jedného vodiča (napr. stredného) k druhému, preto aj elektrický odpor treba počítať takým spôsobom. Z obrázku, na ktorom je znázornený koaxiálny kábel, vyplýva postup ktorý použijeme pri výpočte:

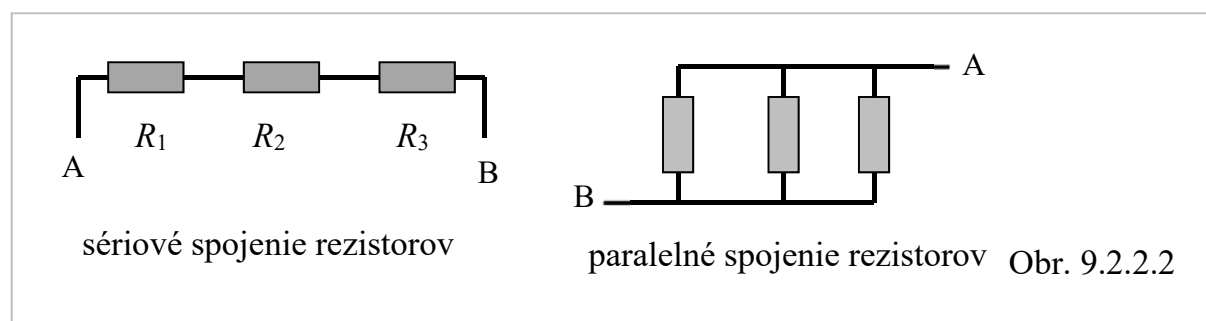


elementárny elektrický odpor tenkej rúrky s polomerom x , hrúbkou steny dx a dĺžkou L , medzi jej vnútornou a vonkajšou stenou je $dR = (\rho dx)/(2\pi xL)$, lebo prúd prekonáva elementárnu dĺžku dx a prechádza plochou s obsahom $2\pi xL$. Celý odpor vypočítame integráciou od vnútorného polomeru po vonkajší:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dx}{2\pi xL} = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dx}{x} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

Po dosadení číselných hodnôt $R \cong 6,6 \times 10^6 \Omega$.

V elektrických obvodoch sa rezistory často navzájom kombinujú, pričom ich spojenie môže byť principiálne dvojako – sériové, alebo paralelné.



Pri **sériovom** spojení (spojenie za sebou) všetkými rezistormi prechádza rovnaký prúd, pričom elektrické napätia na jednotlivých rezistoroch sú $U_1 = R_1 I$, $U_2 = R_2 I$, $U_3 = R_3 I$ (atď. ...), a výsledné napätie medzi bodmi A, B je súčtom napätí na jednotlivých rezistoroch:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I = (R_1 + R_2 + R_3) I = R I ,$$

z čoho pre výsledný elektrický odpor sériovo spojených rezistorov vyplýva vzorec:

$$R = \sum_k R_k , \quad (9.2.2.6)$$

čiže výsledný elektrický odpor sa rovná súčtu elektrických odporov rezistorov.

Pri **paralelnom** spojení je na všetkých rezistoroch rovnaké elektrické napätie U , takže platia vzťahy:

$$U = R_1 I_1 , \quad U = R_2 I_2 , \quad U = R_3 I_3$$

a navyše podľa prvého Kirchhoffovho zákona prúd I tečúci medzi bodmi A, B sa rovná súčtu prúdov tečúcich jednotlivými rezistormi:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \frac{U}{R} ,$$

z čoho vyplýva všeobecný výsledok pre väčší počet paralelne spojených rezistorov

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k} . \quad (9.2.2.7)$$

Kontrolné otázky

1. Čo vyjadruje Ohmov zákon v diferenciálnom tvare a čo Ohmov zákon v integrálnom tvare?
2. Ktoré veličiny vystupujú v Ohmovom zákone v integrálnom tvare?
3. Akým vzťahom sa vyjadruje elektrický odpor drôtu so známou dĺžkou a prierezom?
4. Ako závisí rezistivita kovového vodiča od teploty?
5. Aký je rozmer rezistivity v SI?
6. Aký je názov jednotky elektrického odporu v SI?
7. Aký je rozmer elektrického odporu vyjadrený pomocou základných jednotiek SI?
8. Ako sa počíta elektrický odpor rezistorov zapojených paralelne a sériovo?

9.2.3 Tepelné účinky elektrického prúdu, Joulovo teplo

Nie všetka elektrická energia prenášaná vodičmi sa dostane k spotrebičom (svetidlá, motory a pod.). Časť z nej sa stráca vo vodičoch takým spôsobom, že vodiče sa zahrievajú. Elektrická energia sa pritom mení na teplo, nazývané **Joulovo** (aj Joulovo

straty). Pôvod a veľkosť týchto strát možno vysvetliť využitím podobného postupu ako pri odvodení Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare.

Uvedieme zjednodušenú predstavu o tomto procese. Elektróny urýchľované vo vodiči elektrickým poľom odovzdávajú získanú kinetickú energiu atómom vodiča pri zrážkach s nimi. Po zrážke s elektrónom atóm začne intenzívnejšie kmitať okolo svojej rovnovážnej polohy. Atómami prijatá energia znamená zväčšenie vnútornej energie vodiča a tým jeho teploty.

Elektróny nesúce elementárny elektrický náboj e sú v elektrickom poli s intenzitou E urýchľované silou $F = eE$, pričom za stredný časový interval τ medzi dvomi zrážkami nadobudnú rýchlosť

$$v_{\max} = \frac{eE}{m_e} \tau ,$$

kde m_e je hmotnosť elektrónu. Na konci časového intervalu τ urýchlený elektrón nadobudne kinetickú energiu

$$W_{k1} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m_e \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 .$$

Podľa zjednodušených predstáv celú túto energiu odovzdá niektorému atómu vodiča. V objemovej jednotke sa nachádza n voľných elektrónov, čo znamená, že v časovom intervale τ v jednotkovom objeme elektróny odovzdajú energiu

$$W_{kn} = \frac{1}{2} m_e n \left(\frac{eE\tau}{m_e} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{ne^2\tau^2}{m_e} E^2 .$$

Odobzdaná energia pripadajúca na jednotku času, t. j. príkon P_1 do jednotkového objemu, je podiel posledného výrazu a časového intervalu τ :

$$P_1 = \frac{1}{\tau} W_{kn} = \frac{ne^2\tau}{2m_e} E^2 = \gamma E^2 = JE , \quad (9.2.3.1)$$

pričom sme využili vzťah (9.2.1.4) pre konduktivitu γ , ako aj Ohmov zákon v diferenciálnom tvare.

Príkon do vodiča, ktorý má dĺžku ℓ a prierez s obsahom S , má veľkosť:

$$P = JES\ell = (E\ell)(JS) = UI = RI^2 , \quad (9.2.3.2)$$

pričom pri úprave boli využité vzťahy $E\ell = U$, $JS = I$ a $U = IR$.

Ak príkon do vodiča s elektrickým odporom R je $P = RI^2$, potom energia odovzdaná vodiču v časovom intervale $(0, t_1)$ je

$$W_s = \int_0^{t_1} P dt = \int_0^{t_1} RI^2 dt . \quad (9.2.3.3)$$

Pri konštantnom prúde, t. j. keď prúd I nezávisí od času, platí $W_s = RI^2\Delta t$. Táto energia, ako každá iná energia, sa meria v jouloch (= W·s), ale častejšie v násobkoch tejto jednotky, napr. v kilowatthodinách.

Energia odovzdávaná vodiču elektrónmi má pôvod v energii elektrického poľa, ktoré elektróny urýchľuje. Ide tu o premenu energie elektrického poľa na vnútornú energiu vodiča, čím sa zvyšuje jeho teplota. Preto sa často hovorí o premene elektrickej energie na teplo, hoci z fyzikálneho pohľadu to nie je celkom správne konštatovanie, lebo vnútorná energia nie je totožná s teplom (pozri kapitolu o termodynamike).

Príklad 9.2.3.1 Medeným vodičom, ktorý má dĺžku $\ell = 100$ m, priemer $d = 1$ mm a rezistivitu $\rho = 1,7 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{cm}$, tečie elektrický prúd $I = 5$ A. Aké sú Joulove straty vo vodiči za sekundu a koľko energie sa v tomto vodiči stratí, ak ním prúd prechádza 12 hodín?

Riešenie: Najprv treba vypočítať elektrický odpor vodiča –

$$R = \frac{\rho \ell}{(\pi d^2/4)} = \frac{4 \times 1,7 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \times 100 \text{ m}}{\pi \times 10^{-6} \text{ m}} \cong 2,16 \Omega.$$

Príkon Joulových strát je $RI^2 = (2,16 \Omega) \times 25 \text{ A}^2 = 54 \text{ J/s}$. Za 12 hodín to predstavuje energiu $54 \text{ J/s} \times 12 \times 3600 \text{ s} = 2332800 \text{ Ws} = 0,648 \text{ kWh}$.

Príklad 9.2.3.2 Vodičom s elektrickým odporom R prechádza prúd, ktorého veľkosť sa s časom lineárne zväčšuje. V čase $t_0 = 0$ bol prúd nulový, v čase t_1 mal hodnotu I_1 . Koľko Joulovho tepla sa vo vodiči vytvorilo v časovom intervale $(0, t_1)$?

Riešenie: Do vzťahu (9.2.3.3) treba dosadiť prúd $I(t)$ ako funkciu času (pozri príklad 9.1.1.3): $I = (I_1/t_1)t$:

$$W_s = \int_0^{t_1} R \left(\frac{I_1}{t_1} \right)^2 t^2 dt = R \left(\frac{I_1}{t_1} \right)^2 \frac{t_1^3}{3} = R \left(\frac{I_1}{\sqrt{3}} \right)^2 t_1.$$

Výsledok príkladu 9.2.3.2 ukazuje, že rovnaké množstvo Joulovho tepla by sa vo vodiči uvoľnilo aj vtedy, ak by vodičom tiekol po celý časový interval $(0, t_1)$ prúd s veľkosťou $I_{\text{ef}} = (I_1/\sqrt{3})$. Prúd I_{ef} s uvedenou vlastnosťou sa nazýva **efektívna hodnota elektrického prúdu** a definuje sa všeobecným vzťahom

$$(I_{\text{ef}})^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I^2(t) dt. \quad (9.2.3.4)$$

Využíva sa prakticky len v prípade periodickej závislosti prúdu od času, teda pri striedavých elektrických prúdoch.

Kontrolné otázky

1. *Aký je mechanizmus zohrievania vodiča, keď ním prechádza elektrický prúd?*
2. *Akým vzťahom sa vyjadruje príkon Jouleových strát v objemovej jednotke vodiča?*
3. *Akým vzťahom sa vyjadruje príkon Jouleových strát vo vodiči s elektrickým odporom R ?*
4. *Akým vzťahom sa vyjadruje energia spotrebovaná na ohrev vodiča elektrickým prúdom?*

9.2.4 Elektromotorické napätie

Ak vodič konečnej dĺžky vložíme do elektrického poľa, tak voľné nosiče náboja sa v ňom začnú pohybovať (začne ním tečť prúd). Veľmi rýchlo sa na jednom konci vodiča nahromadia kladné náboje, na druhom náboje záporné, vytvorí tak vlastné pole, ktorým sa vykompenzuje vonkajšie pole a prúd zanikne. Ak by sme v tom okamihu odstránili vonkajšie elektrické pole, tak voľné náboje by sa vrátili do svojich pôvodných polôh, ale ešte predtým by vodič so separovanými nábojmi malú chvíľu pôsobil ako zdroj elektrického napätia. Ak chceme aby vodič slúžil ako trvalý zdroj napätia, musíme zabezpečiť trvalú separáciu kladných a záporných nábojov, čo znamená pôsobiť proti ich elektrostatickej príťažlivosti. To však znamená, že v samotnom zdroji by musela existovať sila pôsobiaca na nabitú časticu opačným smerom ako elektrostatická sila.

V rôznych zdrojoch elektromotorického napätia majú takéto sily rozličný pôvod, napr. v chemických procesoch (galvanické články), v účinku svetla (slnečné batérie), v teple (termočlánky) ale vzniká aj v generátoroch elektrického prúdu. Používajú sa pre ne rôzne názvy ako **iné sily**, **cudzie sily**, alebo aj **oddeľujúce sily**. Keďže sú akýmsi motorom poháňajúcim separáciu nabitých častíc, budeme ich v tomto texte nazývať **motorické sily**² a označovať symbolom F_m . Významnou charakteristikou takéhoto zdroja je **elektromotorické napätie** U_m . Stručne ho možno uviesť ako maximálne elektrické napätie, ktoré je zdroj schopný generovať. Rovná sa napríklad elektrickému napätiu medzi svorkami nezaťaženej galvanickej článku.

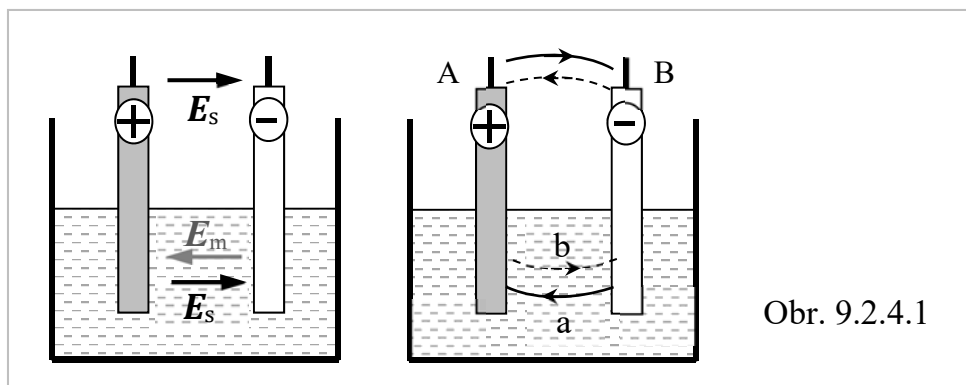
Motorická sila F_m koná pri separácii nábojov prácu, ktorá predstavuje prírastok energie zdroja. Ak pri prenesení kladného náboja q od záporného pólu zdroja

² Motorické pôsobenie v zdroji napätia nemá vždy povahu tradičného silového pôsobenia. Napríklad v elektrochemickom článku má pohyb iónov proti elektrickému poľu charakter difúzie a je spôsobený nerovnovážnym termodynamickým stavom priestorovo oddelených zložiek článku. Z pedagogických dôvodov je predstava motorickej sily veľmi nápomocná pri zavedení pojmu elektromotorického napätia.

ku kladnému pólu vykoná prácu $W_q = \int_{-}^{+} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r}$ tak elektromotorické napätie U_m sa dá zaviesť (definovať) ako podiel tejto práce a veľkosti náboja:

$$U_m = \frac{W_q}{q} = \frac{1}{q} \int_{-}^{+} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} . \quad (9.2.4.1)$$

Medzi elektródami (pólmi) zdroja existuje pole motorických síl, s rozložením ich veľkosti a smeru v priestore. Toto pole nie je elektrostatickej povahy, pôsobí však na elektricky nabitú časticu, preto ho budeme charakterizovať intenzitou $\mathbf{E}_m$, ktorá je podielom motorickej sily $\mathbf{F}_m$ a náboja q častice, na ktorú sila pôsobí: $\mathbf{E}_m = \mathbf{F}_m/q$. Pôsobením motorických síl sa posúvajú kladne nabitú časticu (napr. kladné ióny) ku kladnej elektróde zdroja, záporné k zápornej elektróde. Nabíjaním elektród vzniká medzi nimi elektrostatické pole s intenzitou $\mathbf{E}_s$, ktorá má opačný smer ako intenzita $\mathbf{E}_m$. Takže motorické sily posúvajú kladne nabitú časticu proti smeru vektora intenzity vznikajúceho elektrostatického poľa. Pritom pole motorických síl existuje len vo vnútri zdroja elektromotorického napätia (v galvanickom článku v jeho elektrolyte), ale intenzita $\mathbf{E}_s$ aj mimo zdroja. Pre názornosť je na obrázku (9.2.4.1) ako zdroj napätia nakreslený galvanický článok, v ľavej časti obrázku aj vektory týchto intenzít medzi elektródami.



Obr. 9.2.4.1

Separácia nábojov a s ňou spojené nabíjanie elektród prebieha dovtedy, pokiaľ sa motorická sila pôsobiaca na nabitú časticu nevyrovná elektrostatickej sile, t. j. pokiaľ sa intenzita $\mathbf{E}_s$ veľkosťou nevyrovná intenzite $\mathbf{E}_m$. Vtedy je zdroj – napr. galvanický článok – úplne nabitý a medzi jeho elektródami (vonkajšími svorkami), pokiaľ sa z článku neodoberá prúd, možno namerať rozdiel potenciálov, ktorý predstavuje jeho elektromotorické napätie.

Poznámka: Detailný opis vzniku elektromotorického napätia v rôznych typoch zdrojov, by vyžadoval podstatne širší priestor. Napríklad pri galvanických článkoch súvisí s chemickými procesmi na rozhraní kov – elektrolyt, v slnečných článkoch s excitáciou elektrónov do vyšších energetických hladín, v generátoroch elektrického prúdu s elektromagnetickou indukciou. Úvahy v nasledujúcej časti sú preto všeobecného charakteru, týkajú sa všetkých typov zdrojov elektromotorického napätia.

Elektrické napätie, teda rozdiel potenciálov medzi dvoma bodmi, sa všeobecne počíta ako integrál intenzity elektrického poľa po trajektórii spájajúcej tieto dva body (pozri časť 8.1.6 v kapitole o elektrostatickom poli). Preto sa aj elektromotorické napätie v mnohých učebniciach definuje ako integrál intenzity $\mathbf{E}_m$ po trajektórii od jedného pólu zdroja k druhému pólu:

$$U_m = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.2.4.2)$$

Súvislosť tohto vzťahu s definíciou (9.2.4.1) je zrejmá:

$$U_m = \int_{-}^{+} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{q} \int_{-}^{+} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = \frac{W_q}{q}.$$

Vznik elektromotorického napätia je výsledkom pôsobenia motorických síl $\mathbf{F}_m$ medzi elektródami (pólmi) zdroja. Pri vzniku elektromotorického napätia elektromagnetickou indukciou v uzavretej slučke však motorické sily pôsobia po celej jej dĺžke, preto sa vzťah (9.2.4.2) zovšeobecňuje a zapisuje ako integrál intenzity $\mathbf{E}_m$ po uzavretej krivke (slučke):

$$U_m = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.2.4.3)$$

Podľa tohto vzťahu znamienko U_m závisí od smeru integrácie. Na obrázku 9.2.4.1 galvanického článku (na jeho pravej strane) sú naznačené dve možnosti integrácie po uzavretej krivke – písmenom a v smere chodu hodinových ručičiek, písmenom b v opačnom smere. Smer vektora $d\mathbf{r}$ zvolíme v súlade so smerom integrácie. Ak vektor $\mathbf{E}_m$ má rovnaký smer ako vektor $d\mathbf{r}$, ich skalárny súčin je kladný, takže kladné je aj elektromotorické napätie. To má dopad na určovanie znamienok v druhom Kirchhoffovom zákone (pozri článok 9.2.5).

Vzťah (9.2.4.3) môžeme napísať aj v tvare

$$U_m = \oint (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s) \cdot d\mathbf{r}, \quad (9.2.4.4)$$

lebo podľa vzťahu (8.1.6.11) integrál intenzity $\mathbf{E}_s$ elektrostatického poľa po uzavretej krivke sa rovná nule: $\oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{r} = 0$. Takýto zápis umožní nasledujúcu úvahu.

Integrál po uzavretej krivke rozpíšeme na dva integrály – jeden ohraničíme na vnútro článku, druhý na trajektóriu mimo článku, teda medzi svorkami článku:

$$U_m = \int_{v \text{ článku}} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s) \cdot d\mathbf{r} + \int_{mimo} (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s) \cdot d\mathbf{r} = \int_{mimo} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.2.4.5)$$

Takýto výsledok však platí len v nezaťaženom článku, kde $\mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s = 0$, takže prvý z dvoch integrálov sa rovná nule. Mimo článku je vždy $\mathbf{E}_m = 0$, čo sa prejaví v druhom z integrálov. Vo výslednom integráli $\int_{mimo} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{r}$ ide o integráciu medzi svorkami článku, takže elektromotorické napätie nezaťaženého článku sa rovná jeho svorkovému

napätíu (znamienko závisí od smeru integrácie). Ak budeme integrovať v smere chodu hodinových ručičiek, elektromotorické napätie získame ako integrál intenzity $\mathbf{E}_s$ od kladnej (+) po zápornú (-) svorku:

$$U_m = \int_{+ \text{ mimo}}^{-} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{r} = -(\varphi_- - \varphi_+) > 0. \quad (9.2.4.6)$$

(Výsledok porovnajte so vzťahom (8.1.6.3) vyjadrujúcim rozdiel potenciálov.) Vektor $\mathbf{E}_s$ má pri tomto smere integrácie rovnaký smer ako vektor $d\mathbf{r}$, takže integrál je kladný. Potvrďuje sa to aj rozdielom potenciálov zápornej a kladnej elektródy, ktorý musí byť záporný, lebo potenciál zápornej elektródy je vždy nižší ako potenciál kladnej elektródy, takže

$$(\varphi_- - \varphi_+) < 0, \text{ resp. } (\varphi_+ - \varphi_-) > 0.$$

Pri opačnom smere integrácie je elektromotorické napätie záporné, o čom sa možno presvedčiť opäť integráciou intenzity $\mathbf{E}_s$ medzi svorkami článku, teraz však v opačnom smere.

Ak na zdroj elektromotorického napätia pripojíme spotrebič, napríklad žiarovku, začne obvodom prechádzať prúd a v zdroji (napríklad galvanickom článku) sa poruší rovnováha medzi motorickými silami a silami elektrostatického poľa. Elektróny, ktoré sa pohybujú v pripojenom vodiči mimo článku (vo vonkajšej časti obvodu), urýchľuje intenzita elektrického poľa $\mathbf{E}'_s$, pričom sa pohybujú od zápornej ku kladnej elektróde. Po prechode vonkajšou časťou obvodu sa elektróny vracajú nazad do zdroja, kde prechádzajú od kladnej k zápornej elektróde, teda proti pôsobeniu elektrostatického poľa. Tam ich v tomto smere urýchľuje motorická sila, preto v zaťaženom článku musí byť intenzita $\mathbf{E}'_s$ menšia než intenzita $\mathbf{E}_m$, čo znamená pokles $\mathbf{E}'_s$ vzhľadom na jej pôvodnú hodnotu: $\mathbf{E}'_s < \mathbf{E}_s$. Inak by prúd obvodom neprechádzal. Pokles intenzity $\mathbf{E}_s$ sa prejaví aj medzi svorkami zdroja, a to poklesom rozdielu potenciálov medzi svorkami zaťaženého zdroja vzhľadom na zdroj nezaťažený. Pripomeňme ešte raz, že rozdiel potenciálov medzi svorkami nezaťaženého zdroja sa rovná jeho elektromotorickému napätíu. Pokles svorkového napätia pri zaťažení zdroja sa vysvetľuje aj úbytkom elektrického napätia na vnútornom elektrickom odpore galvanického článku.

Poznámka: Pri odbere prúdu zo zdroja poklesne nielen svorkové, ale do istej miery aj elektromotorické napätie. Napríklad v galvanickom článku poklesne pri väčšom odbere prúdu, keď už chemické procesy nedokážu tvoriť dostatočný počet iónov.

Keď zdrojom tečie prúd, tak motorická sila $\mathbf{F}_m$ pôsobiaca na časticu musí byť väčšia než elektrostatická $\mathbf{F}_s$. Tieto sily pôsobia proti sebe a pri premiestňovaní častice obe konajú prácu, takže výslednú zmenu energie častice s kladným nábojom q pri

presunutí od zápornej ku kladnej elektróde vyjadríme súčtom týchto prác (jedna je kladná, druhá záporná):

$$\Delta W = \int_{-}^{+} \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} + \int_{-}^{+} \mathbf{F}_s \cdot d\mathbf{r} = q \int_{-}^{+} \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} + q \int_{-}^{+} \mathbf{E}'_s \cdot d\mathbf{r} = qU_m - qU'_{sv},$$

kde U_m je elektromotorické a U'_{sv} svorkové napätie zaťaženého článku (obe v absolútnej hodnote). Rozdiel prác ΔW motorických a elektrostatických síl sa prejaví v pohybe, t. j. v kinetickej energii častice, ktorá sa však stráca odporom prostredia, takže sa postupne mení na Joulovo teplo vnútri v článku (pozri časť 9.3.3). Pritom rozdiel napätí $U_m - U'_{sv}$ sa rovná súčinu vnútorného odporu článku R_{vn} a prúdu I tečúceho článkom: $U_m - U'_{sv} = IR_{vn}$.

Bez motorických síl by v elektrickom obvode nemohol trvalo tiecť prúd. Elektrostatické pole je konzervatívne, preto nemôže byť zdrojom práce, ale vytvára podmienky na jej konanie. V tomto smere jestvuje podobnosť s gravitačným poľom. V prečerpávacej hydroelektrárni voda klesajúca do dolnej nádrže odovzdáva svoju kinetickú energiu turbínam, pričom pôvod kinetickej energie je v pôsobení gravitačných síl na vodu. Pri urýchľovaní vody gravitačné sily konajú kladnú prácu. Pri prečerpávaní vody nazad do hornej nádrže, gravitačné sily konajú zápornú prácu, takže celková práca gravitačných síl pri jednom cykle je nulová. Pri prečerpávaní treba gravitačnú silu prekonávať inými, negravitačnými silami (napríklad vodu vyvážať koniskami povozmi, pričom konisky čerpajú energiu z potravy !!). Podobne je to pri prechode elektrického prúdu žiarovkou, cez ktorú sú elektróny poháňané elektrickými silami, ale nazad ich dostane napr. chemický proces v galvanickom článku, svetlo v slnečných batériách, alebo elektromagnetická indukcia v generátoroch.

Kontrolné otázky

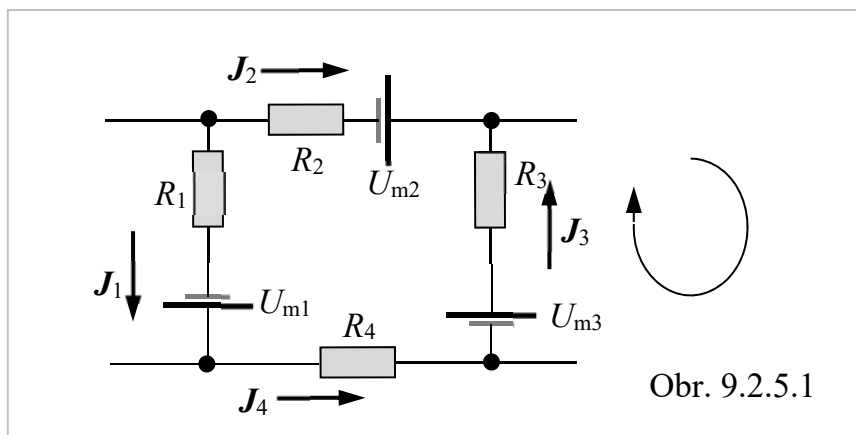
1. *Môže byť elektrostatické pole príčinou vzniku elektromotorického napätia?*
2. *Viete uviesť konkrétne príklady vzniku elektromotorického napätia?*
3. *Aká je jednotka elektromotorického napätia v SI?*
4. *Akým vzťahom sa definuje elektromotorické napätie?*
5. *Môže byť elektromotorické napätie záporné?*
6. *Kedy sa elektromotorické napätie zdroja rovná svorkovému napätiu?*
7. *Prečo je svorkové napätie zaťaženého zdroja menšie ako elektromotorické?*

9.2.5 Druhý Kirchhoffov zákon

Obsahom tohto zákona je vzťah medzi elektromotorickými napätiami, prúdmi a elektrickými odpormi vo vetvách uzavretej slučky elektrického obvodu. Pri odvodení druhého Kirchhoffovho zákona budeme vychádzať z Ohmovho zákona v diferenciálnom tvare (9.2.1.6), a to vo verzii v ktorej vystupuje rezistivita:

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J}. \quad (9.2.5.1)$$

Tento vzťah vyjadruje súvislosť medzi vektormi $\mathbf{E}$ a $\mathbf{J}$ v ľubovoľnom bode obvodu. Treba si pritom uvedomiť, že v bodoch nachádzajúcich sa vnútri v zdrojoch elektromotorického napätia pôsobia nielen elektrostatické, ale aj motorické sily, a preto $\mathbf{E}$ vo vzťahu (9.2.5.1) predstavuje súčet intenzity skutočného poľa $\mathbf{E}_s$ a intenzity motorických síl $\mathbf{E}_m$. Na obrázku je nakreslená slučka skladajúca sa zo štyroch vetiev, v ktorých sú zaradené zdroje elektromotorického napätia U_{mk} , elektrické odpory R_k , a prechádzajú nimi prúdy s hustotami $\mathbf{J}_k$, ktorých smery sa v slučke majú vyznačiť.



Ohmov zákon (9.2.5.1) budeme integrovať v smere naznačenom na obrázku, pozdĺž celej slučky, teda po uzavretej krivke:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r}. \quad (9.2.5.2)$$

Ľavú stranu rovnice rozpíšeme tak, že celkovú intenzitu $\mathbf{E}$ vyjadríme ako súčet motorickej a elektrostatickej $\mathbf{E} = \mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} + \oint \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{r},$$

pričom druhý z integrálov sa rovná nule, lebo ide o intenzitu elektrostatického poľa. Prvý integrál, v ktorom vystupuje intenzita $\mathbf{E}_m$, rozpíšeme ako súčet integrálov po jednotlivých vetvách, pričom si uvedomíme, že vo štvrtej vetve nie je zaradený zdroj elektromotorického napätia:

$$\oint \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} = \int_1 \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} + \int_2 \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} + \int_3 \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{r} = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3} . \quad (9.2.5.3)$$

Znamienka jednotlivých elektromotorických napätí závisia od vzájomného smeru vektora $d\mathbf{r}$ (t. j. smeru integrovania) a vektora $\mathbf{E}_m$ v konkrétnom zdroji danej vetvy. Pri ich súhlasnom smere je elektromotorické napätie kladné. Obrátením smeru integrácie sa zmenia znamienka všetkých elektromotorických napätí v obvode.

Pravú stranu rovnice (9.2.5.2) upravíme obdobne, čiže integrál po uzavretej krivke rozpíšeme na súčet integrálov po jednotlivých vetvách:

$$\oint \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = \sum_k \int_k \rho_k \mathbf{J}_k \cdot d\mathbf{r} . \quad (9.2.5.4)$$

Výpočet integrálu v skalárnom tvare bol už uskutočnený v článku 9.2.2, kde sa dospelo k výsledku

$$\int_k \rho_k \mathbf{J}_k \cdot d\mathbf{r} = R_k I_k .$$

Pravú stranu rovnice (9.2.5.2) možno potom napísať v tvare

$$\oint \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{r} = \sum_k \int_k \rho_k \mathbf{J}_k \cdot d\mathbf{r} = \sum_k R_k I_k . \quad (9.2.5.5)$$

Znamienka prúdov I_k závisia od vzájomného smeru vektorov $d\mathbf{r}$ a $\mathbf{J}_k$ v príslušnej vetve obvodu. Prúd je kladný, ak sú vektory súhlasne rovnobežné. Preto aj tu platí, že zmenou smeru integrácie sa zmenia znamienka prúdov.

Teraz už možno urobiť konečnú úpravu rovnice (9.2.5.2) s využitím výsledkov (9.2.5.3) a (9.2.5.5):

$$\sum_k U_{mk} = \sum_k R_k I_k , \quad (9.2.5.6)$$

čo je už bežne používaný zápis **druhého Kirchhoffovho zákona**. Slovné ho možno formulovať takto:

V uzavretej slučke, ktorá je súčasťou elektrického obvodu, sa súčet elektromotorických napätí zdrojov pôsobiacich v jednotlivých vetvách slučky rovná súčtu elektrických napätí na jednotlivých rezistoroch (t. j. súčtu súčinov $R_k I_k$).

Na záver je vhodné ešte raz zdôrazniť, že znamienka jednotlivých členov v sumáciách závisia nie iba od smerov elektromotorických intenzít v zdrojoch a od zvolených smerov vektorov hustoty prúdu, ale aj od zvoleného smeru integrácie pozdĺž obvodu.

Príklad 9.2.5.1 Suchý článok – batéria AA – má deklarované napätie $U_o = 1,5 \text{ V}$, vnútorný elektrický odpor $R_i = 0,15 \Omega$ a kapacitu $Q = 2200 \text{ mAh}$. Batériu skratujeme tuhou do pentelky, ktorej priemer $d = 0,25 \text{ mm}$ a dĺžka $l = 5 \text{ cm}$. Tuhu prepojíme s pólmi batérie medenými vodičmi, ktorých elektrický odpor môžeme voči vnútornému odporu batérie zanedbať. Konduktivita tuhy je $\sigma = 33 \text{ kS/m}$.

(a) Aký je elektrický odpor tuhy a aký prúd ňou bude tečť?

(b) Odhadnite časový interval, za ktorý sa batéria vybije!

Riešenie: (a) Odpor tuhy:

$$R = (1/\sigma) 4l/(\pi d^2) = 31 \Omega.$$

Použitím 2. Kirchhoffovho zákona pre napätie v obvode

$$U_o = (R + R_i) I$$

nájdeme prúd

$$I = U_o/(R + R_i) = 48 \text{ mA}.$$

(b) Ak batéria má kapacitu Q , potom časový interval Δt , za ktorý sa vyčerpá pri prúde I (za predpokladu konštantného prúdu a nemenného vnútorného odporu batérie)

$$\Delta t = Q/I = 46 \text{ h}.$$

Kontrolné otázky

1. Ktorý fyzikálny zákon sa používa ako východisko pri odvodení druhého Kirchhoffovho zákona?
2. Ako sa určujú znamienka elektromotorických napätí zaradených do vetiev obvodu?
3. Ako sa určujú znamienka elektrických prúdov vo vetvách obvodu?
4. Slovné vyjadrite obsah druhého Kirchhoffovho zákon.

Tenzor konduktivity

Vzťah medzi vektorom $\mathbf{J}$ hustoty elektrického prúdu a vektorom $\mathbf{E}$ intenzity elektrického poľa v izotropnom prostredí sprostredkuje skalárna veličina – *konduktivita* γ : $\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}$, takže tieto vektory sú súhlasne rovnobežné. Konduktivita vyjadruje kvantitatívny vzťah medzi nimi, zachováva ich vzájomnú rovnobežnosť, ovplyvňuje len ich vzájomnú veľkosť. V anizotropnom prostredí vektory $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ nebývajú vždy rovnobežné, takže ich vzťah musí sprostredkovať iná ako skalárna veličina. Musí to byť veličina, ktorá môže zmeniť nie len veľkosť vektora, ale aj jeho smer. Takýmito veličinami sú **tenzory**, v tomto prípade **tenzor konduktivity**.

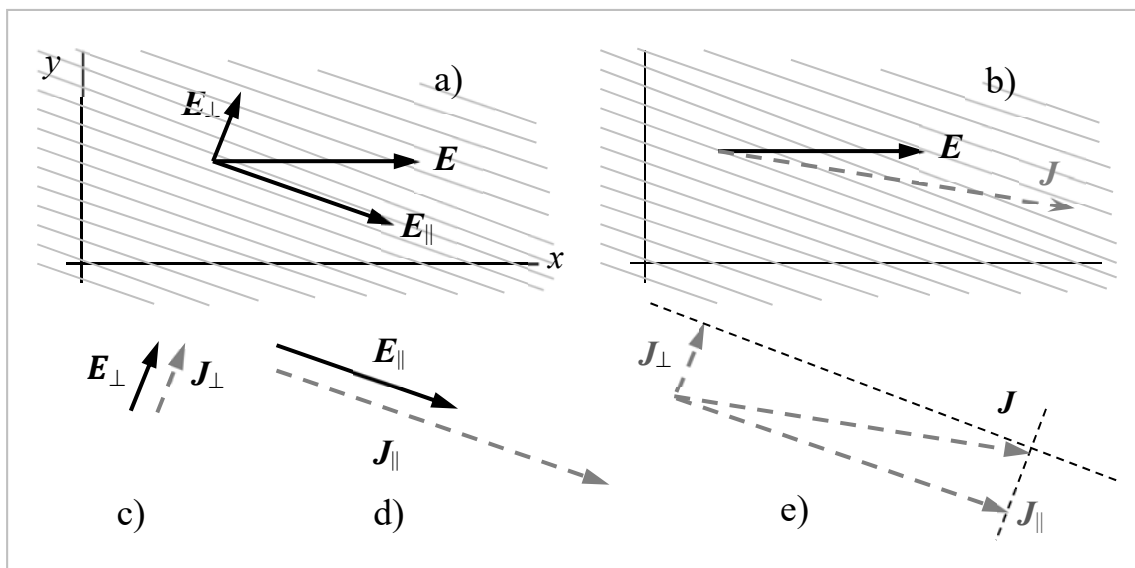
Vzťah medzi vektormi $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ v anizotropnom prostredí sa dá zjednodušene ilustrovať na dvojrozmernom modeli elektricky vodivej vrstevnatej látky, ktorá nech má pozdĺž vrstiev konduktivitu $\gamma_{\parallel}$ a kolmo na vrstvy konduktivitu $\gamma_{\perp}$ (Obr.). Vrstevnatú látku vložíme do elektrického poľa tak, aby vektor intenzity $\mathbf{E}$ nebol s vrstvami ani rovnobežný, ani kolmý na ne, aby sme ho mohli rozložiť na dve nenulové zložky (Obr. a):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\parallel} + \mathbf{E}_{\perp}.$$

Pre tieto zložky napíšeme Ohmov zákon v diferenciálnom tvare:

$$\mathbf{J}_{\parallel} = \gamma_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{J}_{\perp} = \gamma_{\perp} \mathbf{E}_{\perp}, \quad (1)$$

pričom predpokladáme, že vektory $\mathbf{J}_{\parallel}$ a $\mathbf{J}_{\perp}$ sú skalárnymi násobkami vektorov $\mathbf{E}_{\parallel}$, resp. $\mathbf{E}_{\perp}$. To vyplýva z povahy prípadu – nepredpokladáme, že by elektrické pole



s vektorom intenzity kolmým na vrstvy vyvolalo prúd aj pozdĺž vrstiev, a podobne – aby elektrické pole s vektorom intenzity rovnobežným s vrstvami vyvolalo prúd aj

v smere kolmom na vrstvy. Preto pri vyjadrení zložiek hustoty prúdu ich oprávnené zapisujeme ako skalárne násobky príslušných intenzít elektrického poľa.

Nech konduktivity $\gamma_{\perp}$ má číselnú hodnotu 1, a konduktivita $\gamma_{\parallel}$ číselnú hodnotu 2. To znamená, že vektor $\mathbf{J}_{\parallel}$ má v porovnaní s vektorom $\mathbf{E}_{\parallel}$ dvojnásobnú dĺžku, ale dĺžky vektorov $\mathbf{J}_{\perp}$ a $\mathbf{E}_{\perp}$ sú rovnaké (Obr. c a d). Sčítaním vektorov $\mathbf{J}_{\parallel}$ a $\mathbf{J}_{\perp}$ vznikne vektor $\mathbf{J}$ (Obr. e), ktorý nie je rovnobežný s vektorom $\mathbf{E}$ (Obr. b). To však znamená, že vektor $\mathbf{J}$ nemôže byť skalárnym násobkom vektora $\mathbf{E}$.

V súradnicovej sústave (x, y) nakreslenej na obrázku zvolíme vektor $\mathbf{E}$ tak, aby mal obidve zložky nenulové, takže $\mathbf{E} \equiv (E_x, E_y)$. Preto aj vektor $\mathbf{J}$ vyjadríme podobným spôsobom: $\mathbf{J} \equiv (J_x, J_y)$. Zložka $\mathbf{E}_x$ nie je rovnobežná s vrstvami ani kolmá na ne, čo znamená, že táto zložka sa dá ešte rozložiť na zložku rovnobežnú s vrstvami a na zložku kolmú na vrstvy. Preto zložka $\mathbf{E}_x$ vyvoláva prúd jednak pozdĺž vrstiev, jednak kolmo na ne. To isté platí pre zložku $\mathbf{E}_y$. Preto zložka J_x pozostáva z príspevkov podmienených jednak zložkou $\mathbf{E}_x$, jednak zložkou $\mathbf{E}_y$ vektora intenzity elektrického poľa. Preto súvislosť medzi súradnicami vektorov $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ v tomto prípade sa vyjadruje vzťahmi:

$$J_x = \gamma_{xx} E_x + \gamma_{xy} E_y, \quad (2)$$

$$J_y = \gamma_{yx} E_x + \gamma_{yy} E_y,$$

v ktorých veličiny $\gamma_{xx}, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}$ a γ_{yy} majú analogický význam ako konduktivity $\gamma_{\parallel}$ a $\gamma_{\perp}$. Vzťahy (2) sa zapisujú aj maticovou rovnicou

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (3)$$

alebo jej symbolickým tvarom

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{E}, \quad (4)$$

v ktorom $\boldsymbol{\Gamma}$ reprezentuje štvorcovú maticu konduktivity, $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ príslušné stĺpcové matice.

Prechod od maticového zápisu k tenzorovému sa uskutočňuje náhradou stĺpcových matíc $\mathbf{J}$ a $\mathbf{E}$ príslušnými vektormi:

$$\mathbf{J} = J_x \mathbf{i} + J_y \mathbf{j}, \quad \mathbf{E} = E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j}$$

a matica $\boldsymbol{\Gamma}$ tenzorom, ktorý sa zapisuje v tvare:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \gamma_{xx} \mathbf{i}\mathbf{i} + \gamma_{xy} \mathbf{i}\mathbf{j} + \gamma_{yx} \mathbf{j}\mathbf{i} + \gamma_{yy} \mathbf{j}\mathbf{j}. \quad (5)$$

Pritom $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ sú jednotkové vektory reprezentujúce smery súradnicových osí zvolenej karteziánskej súradnicovej sústavy. Medzi značku tenzora $\boldsymbol{\Gamma}$ a vektora $\mathbf{E}$ sa v porovnaní so vzťahom (4) vkladá navyše bodka reprezentujúca ich skalárny súčin:

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot \mathbf{E}. \quad (6)$$

Tento postup treba opísať podrobnejšie. Tenzor konduktivity sa z príslušnej matice vytvorí tak, že k prvkom matice sa pripíšu jednotkové vektory reprezentujúce smery súradnicových osí – napríklad ku konduktivitě γ_{yx} jednotkové vektory $\mathbf{j}\mathbf{i}$, v súlade s príslušnými súradnicami y a x . Dvojice vektorov (napr. $\mathbf{ii}$, $\mathbf{ji}$) vystupujúce vo vzťahu (5) sa nazývajú **diády**, pričom ide len o napísanie dvoch vektorov vedľa seba. Týmto zápisom (bez bodky či krížika) sa ku skalárnemu a vektorovému súčinu nezavádza ďalší typ súčinu medzi vektormi, napriek tomu, že sa často uvádza pod názvom **diadický súčin** vektorov. Značky súčtu „+“ medzi členmi tenzora (5) sú iba symbolické, lebo v algebre tenzorov sa súčet dvoch diád nezavádza. Vyjadrujú len „spolupatričnosť“ jednotlivých členov tenzora. Bodka medzi tenzorom $\mathbf{\Gamma}$ a vektorom $\mathbf{E}$ vo vzťahu (6) predstavuje skalárny súčin, pričom v konkrétnom prípade ide o skalárny súčin sprava (z pravej strany tenzora).

Skalárny súčin tenzora s vektorom sa definuje tak, že pri tom vzniká nový vektor, ktorý vo všeobecnosti má inú veľkosť aj iný smer než vektor, ktorým bol tenzor násobený. Napríklad skalárny súčin diády $\mathbf{ab}$ s vektorom $\mathbf{c}$ z pravej (resp. z ľavej) strany sa v algebre tenzorov definuje vzťahmi

$$\mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} \cdot \mathbf{ab} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b},$$

kde $(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$, resp. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})$ sú skalárne súčiny týchto vektorov, teda skalárne veličiny. To znamená, že výsledkom v prvom prípade je skalárny násobok vektora $\mathbf{a}$, v druhom prípade skalárny násobok vektora $\mathbf{b}$.

Detailnejší opis týchto operácií sa dá nájsť napríklad v klasických slovenských učebniciach vektorového počtu – Ilkovičovej a Garajovej – uvedených v zozname použitej literatúry.

Hodnoty (veľkosti) súradníc tenzora $\gamma_{xx}, \gamma_{xy}, \gamma_{yx}, \gamma_{yy}$ závisia od voľby súradnicovej sústavy. Ak zvolíme sústavu S' tak, aby napr. os x' bola rovnobežná s vrstvami a os y' na vrstvy kolmá, potom súradnicami tenzora budú konduktivity $\gamma_{\parallel}$ a $\gamma_{\perp}$:

$$\mathbf{\Gamma} = \gamma_{\parallel} \mathbf{i}'\mathbf{i}' + \gamma_{\perp} \mathbf{j}'\mathbf{j}', \quad (7)$$

kde $\mathbf{i}'$ a $\mathbf{j}'$ sú jednotkové vektory vyznačujúce smer súradnicových osí v sústave S' . Zmiešané členy typu $\mathbf{i}'\mathbf{j}'$ v tenzore $\mathbf{\Gamma}$ vtedy nevystupujú. Rovnica (3) nadobúda v tomto prípade tvar:

$$\begin{pmatrix} J_x' \\ J_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{\parallel} & 0 \\ 0 & \gamma_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x' \\ E_y' \end{pmatrix}, \quad (8)$$

takže namiesto rovníc (2) platia nasledujúce rovnice:

$$J_x' = \gamma_{\parallel} E_x', \quad J_y' = \gamma_{\perp} E_y'. \quad (9)$$

Výhodou tenzorového zápisu je možnosť jednoducho a názorne získať hodnotu konduktivity v ľubovoľnom smere. Smer sa vyjadří pomocou jednotkového vektora, pričom dvojnásobný skalárny súčin tenzora s týmto vektorom z ľavej a z pravej strany poskytne príslušnú hodnotu konduktivity. Uvedieme konkrétny príklad.

Vychádzajúc z rovnice (7) a hodnôt $\gamma_{\parallel} = 2, \gamma_{\perp} = 1$ (ako na obrázku) tenzor konduktivity bude mať tvar (pre jednoduchší zápis vynecháme čiarky nad jednotkovými vektormi):

$$\boldsymbol{\Gamma} = 2 \boldsymbol{ii} + 1 \boldsymbol{jj}.$$

To znamená, že v smere osi x má konduktivita veľkosť 2. Ak teda tenzor $\boldsymbol{\Gamma}$ vynásobíme skalárne jednotkovým vektorom $\boldsymbol{i}$ zľava aj sprava, mali by sme dostať hodnotu vodivosti v jeho smere:

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{i} \cdot (2 \boldsymbol{ii} + 1 \boldsymbol{jj}) \cdot \boldsymbol{i} = [2(\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{j}] \cdot \boldsymbol{i} = [2(1)\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}] \cdot \boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = 2$$

Jednotkový vektor, ktorý zvierá so súradnicovými osami uhol 45° , má tvar

$$\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{j},$$

takže konduktivitu v smere reprezentovanom jednotkovým vektorom $\boldsymbol{n}$ získame dvoma skalárnymi súčinmi

$$\gamma_n = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \cdot \boldsymbol{n} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{j} \right) \cdot (2 \boldsymbol{ii} + \boldsymbol{jj}) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \boldsymbol{j} \right).$$

Po uskutočnení súčinu z ľavej strany dostaneme:

$$\gamma_n = \left(\sqrt{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} \right)$$

a po ďalšom skalárnom súbine

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{4} = 1 + (1/2) = 1,5.$$

V trojrozmernom priestore majú tenzory 9 súradníc ($t_{11}, t_{12}, \dots, t_{33}$), ale na opis vlastností materiálov sú vhodné tzv. symetrické tenzory len so šiestimi nezávislými súradnicami. Pri vhodnej voľbe orientácie súradnicovej sústavy sa aj týchto šesť súradníc zredukuje len na tri vlastné hodnoty tenzora. Napríklad tenzor indexu lomu slúdy v zápise s vlastnými hodnotami má tvar $\boldsymbol{T} = 1,560 \boldsymbol{ii} + 1,594 \boldsymbol{jj} + 1,598 \boldsymbol{kk}$, kde uvedené čísla predstavujú indexy lomu v troch na seba kolmých smeroch.

Tenzory sa používajú v rôznych odvetviach fyziky, v mechanike (tenzor zotrvačnosti, tenzor mechanického napätia, tenzor deformácie), v elektromagnetizme (tenzor elektrickej vodivosti, tenzor permitivity, tenzor permeability), v náuke o teple (tenzor tepelnej vodivosti). ale aj v teórii relativity, najmä všeobecnej (tenzor energie – hybnosti, metrický tenzor).

Pre úplnosť uvedieme definíciu tenzora, ktorú nájdeme najmä v matematických prameňoch. Za tenzor sa považuje súbor reálnych alebo komplexných čísel $T_{1,2,\dots,n}$ (počet indexov n je *rád tenzora*) ktoré sa nazývajú *súradnice*, alebo aj *zložky*

(komponenty) tenzora, a ktoré sa pri transformácii súradníc $x'_i = \sum_j a_{ij}x_j$ transformujú nasledujúcim spôsobom:

$$T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \sum_{k_1 k_2 \dots k_n} a_{i_1 k_1} a_{i_2 k_2} \dots a_{i_n k_n} T_{k_1 k_2 \dots k_n} .$$

O tenzoroch a ich využití v rôznych oblastiach jestvuje rozsiahla literatúra. Z veľkého množstva je vhodné upozorniť aspoň na dve monografie. Z. Horák s J. Kučerom napísali obsiahlu monografiu o využití tenzorov v elektrotechnike a vo fyzike [Tenzory v elektrotechnike a ve fyzice. NČSAV, Praha 1963], v angličtine je k dispozícii klasická monografia o vlastnostiach kryštálov, ktorú napísal J. F. Nye [Physical Properties of Crystals: Their Representation by Tensors and Matrices, Oxford, Clarendon Press 1957].

SÚHRN VZŤAHOV

definícia elektrického prúdu

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

definícia hustoty elektrického prúdu

$$J = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}$$

elektrický prúd vyjadrený pomocou hustoty prúdu

$$I = \iint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

vzťah hustoty prúdu a transportnej rýchlosti

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_d$$

rovnica kontinuity v integrálnom tvare

$$\oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dQ}{dt}$$

rovnica kontinuity v diferenciálnom tvare

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0$$

prvý Kirchhoffov zákon v integrálnom tvare

$$\oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare

$$\mathbf{J} = \gamma \mathbf{E}, \text{ alebo } \mathbf{E} = \rho \mathbf{J}$$

Ohmov zákon v integrálnom tvare

$$U = IR$$

elektrický odpor úseku vodiča

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

závislosť rezistivity kovového vodiča od teploty

$$\rho = \rho_o [1 + \alpha(t - t_o)]$$

elektrický odpor pri sériovom spojení rezistorov

$$R = \sum_k R_k$$

elektrický odpor pri paralelnom spojení rezistorov

$$\frac{1}{R} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

energia odovzdaná vodiču, Joulove straty

$$W_s = \int_0^{t_1} P dt = \int_0^{t_1} RI^2 dt$$

definícia elektromotorického napätia

$$U_m = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \oint (\mathbf{E}_m + \mathbf{E}_s) \cdot d\mathbf{r}$$

druhý Kirchhoffov zákon

$$\sum_k U_{mk} = \sum_k R_k I_k$$

SLOVNÍK

ampér (A) – jednotka elektrického prúdu v SI; vodičom prechádza prúd 1 A, keď jeho celým prierezom prejde za 1 sekundu elektrický náboj 1 coulomb: $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$

ampérsekunda (A·s) – iné vyjadrenie jednotky elektrického náboja – coulombu, prostredníctvom základných jednotiek SI: $1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$

cudzie sily → motorické sily

driftová rýchlosť → transportná rýchlosť

druhý Kirchhoffov zákon – zákon platný v elektrických obvodoch, podľa ktorého sa súčet elektromotorických napätí v každej slučke obvodu rovná súčtu súčinov elektrických prúdov s hodnotami elektrických odporov zaradených v príslušných vetvách slučky

elektrická vodivosť (G) – skalárna veličina definovaná ako prevrátená hodnota elektrického odporu; jednotka: siemens (S)

elektrický prúd (I) – skalárna veličina definovaná podielom elektrického náboja, ktorý prešiel prierezom vodiča a príslušného časového intervalu; jednotka: ampér (A)

intenzita motorických síl (E_m) – vektorová veličina zavedená na charakterizáciu poľa motorických síl, pričom výraz qE_m predstavuje silu pôsobiacu v tomto poli na časticu nesúcu náboj q ; jednotka: N/C

elektromotorické napätie (U_m) – skalárna veličina charakterizujúca zdroj elektrického prúdu, určená podielom práce síl, ktoré prenesú elektrický náboj uzavretým obvodom, a tohto náboja; veľkosť elektromotorického napätia sa zhoduje s elektrickým napätím na svorkách nezaťaženia zdroja; jednotka: volt (V)

hustota elektrického prúdu, plošný elektrický prúd (J) – podiel elektrického prúdu a prierezu vodiča, ktorým prúd prechádza; jednotka: A/m^2 ; je to vektorová veličina

Joulovo teplo – teplo, ktoré vzniká pri prechode elektrického prúdu vodičom; predstavuje straty elektrickej energie vo vodiči

motorické sily – sily pôsobiace v zdroji elektrického prúdu na elektricky nabitú časticu, pričom kladne nabitú časticu posúvajú ku kladnému pólu zdroja a záporne nabitú k zápornému pólu (v galvanickom článku ku katóde); nie sú to sily elektrostatického poľa v zdroji, pôsobia proti nim, preto sa pre ne používa názov *cudzie sily*; keďže separujú kladné a záporne náboje, aj názov *oddeľujúce sily*

konduktivita (γ, σ) – prevrátená hodnota $\rightarrow$ rezistivity

Ohmov zákon v diferenciálnom tvare – zákon vyjadrujúci priamu úmernosť hustoty elektrického prúdu intenzite elektrického poľa; platí v každom bode vodiča

Ohmov zákon v integrálnom tvare – zákon platiaci na ľubovoľnom úseku (časti) vodiča, vyjadrujúci vzťah medzi elektrickým napätím na tomto úseku, elektrickým odporom tohto úseku a elektrickým prúdom ktorý týmto úsekom vodiča prechádza

plošný elektrický prúd $\rightarrow$ hustota elektrického prúdu

pohyblivosť – koeficient sprostredkujúci priamu úmernosť transportnej rýchlosti častíc istého druhu nesúcich elektrický náboj (elektrónov, iónov) intenzite elektrického poľa vo vodiči; číselne sa rovná transportnej rýchlosti príslušných častíc v elektrickom poli s jednotkou intenzitou

prvý Kirchhoffov zákon – zákon, podľa ktorého súčet elektrických prúdov vstupujúcich do uzla elektrického obvodu sa rovná súčtu prúdov z uzla vystupujúcich; platí iba v ustálenom stave; je vyjadrením zákona zachovania elektrického náboja

rezistivita – veličina predstavujúca elektrický odpor vodiča s prierezom 1 m^2 a dĺžkou 1 m ; v minulosti *merný elektrický odpor*; jednotka: $\Omega \cdot \text{m}$

rezistor – prvok elektrického obvodu skonštruovaný tak, aby sa v obvode prejavoval najmä svojim elektrickým odporom

rovnica kontinuity – rovnica vyjadrujúca zákon zachovania elektrického náboja vo všeobecnom prípade, teda aj stave, ktorý nie je ustálený

rovnica spojitosti $\rightarrow$ rovnica kontinuity

siemens (S) – jednotka elektrickej vodivosti; $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$

svorkové napätie – elektrické napätie na svorkách nezaťaženého zdroja elektrického prúdu

transportná rýchlosť, driftová rýchlosť – rýchlosť usmerneného pohybu voľných elektrónov vyvolaná vonkajším elektrickým poľom; nakladá sa na chaotické pohyby elektrónov podmienené teplotou vodiča

ÚLOHY

1. Koľko elektrického náboja prešlo prierezom vodiča, keď veľkosť elektrického prúdu, ktorá v okamihu t_0 na začiatku merania bola $I_0 = 12 \text{ A}$, exponenciálne klesala, a to za každé $\Delta t = 3 \text{ s}$ o polovicu?

Výsledok: $Q = (I_0 \Delta t) / \ln 2 = 51,94 \text{ C}$.

2. Anóda klasickej diódy má tvar valca, v osi ktorého je katóda v tvare tenkého žeraveného vlákna. Z katódy sa uvoľňujú elektróny a dopadajú na anódu. Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J_k tesne pri katóde a tesne pri anóde (J_a), ak elektrónkou prechádza prúd $I = 3 \text{ mA}$. Dĺžka vlákna katódy (a súčasne výška valca anódy) $\ell = 2 \text{ cm}$, priemer vlákna $d_k = 0,1 \text{ mm}$, priemer anódy $d_a = 1 \text{ cm}$. Hustoty prúdu prepočítajte aj na počet elektrónov, ktoré prechádzajú za sekundu cez 1 mm^2 .

Výsledok: $J_k = 4,77 \times 10^{-4} \text{ A/mm}^2$, t. j. $\approx 4 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} \text{ mm}^{-2}$ elektrónov;

$$J_a = 4,77 \times 10^{-6} \text{ A/mm}^2.$$

3. Rezistor má tvar zrezaného kužeľa s výškou ℓ . Polomer väčšej kruhovej základne má veľkosť b , menšej a . Rezistivita materiálu má hodnotu ρ . Vypočítajte elektrický odpor rezistora, ktorý sa nameria medzi jeho základňami.

Výsledok: $R = (\rho \ell) / (\pi a b)$.

4. Vodič s rezistivitou ρ má dĺžku ℓ , pričom prvá polovica tejto dĺžky má priemer d_1 , druhá priemer $d_2 = 2 d_1$. Vodičom prechádza prúd I . Vypočítajte podiel hustôt elektrického prúdu J_1 / J_2 a podiel intenzít elektrického poľa E_1 / E_2 v častiach s rôznymi prierezmi a podiel elektrických napätí U_1 / U_2 pripadajúcich na tieto úseky vodiča.

Výsledok: $\frac{J_1}{J_2} = \frac{d_2^2}{d_1^2} = 4$, $\frac{E_1}{E_2} = 4$, $\frac{U_1}{U_2} = 4$.

5. Uhlíkový hranol s dĺžkou $\ell = 10 \text{ cm}$ a prierezom 2 cm^2 je pripojený na elektrické napätie $U = 10 \text{ V}$. Konduktivita uhlíka $\gamma = 1,6 \times 10^4 \text{ } \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$. Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J a veľkosť intenzity elektrického poľa v tomto hranole.

Výsledok: $J = \frac{\gamma U}{\ell} = 1,6 \times 10^6 \text{ A m}^{-2}$, $E = 100 \frac{\text{V}}{\text{m}}$.

6. Na medený vodič s dĺžkou $\ell = 100 \text{ m}$, priemerom $d = 2 \text{ mm}^2$ a rezistivitou $\rho = 1,6 \cdot 10^{-8} \text{ } \Omega \text{ m}$, je pripojený zdroj s elektrickým napätím $U = 2 \text{ V}$. Aká je hustota elektrického prúdu J vo vodiči? Koľko elektrónov prechádza celým prierezom vodiča za sekundu? (Náboj elektrónu $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.)

Výsledok: $J = \frac{U}{\rho \ell} = 1,25 \text{ A} \cdot \text{mm}^{-2}$, $\frac{\Delta N}{\Delta t} = 1,56 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$.

7. Aká je intenzita E elektrického poľa vo vodiči s tvarom valca (priemer valca d , dĺžka ℓ , rezistivita materiálu ρ), ak ním prechádza elektrický prúd I ? Aký je rozdiel potenciálov U medzi koncami vodiča?

$$\text{Výsledok: } E = \rho \frac{4I}{\pi d^2}, \quad U = \rho \frac{4I}{\pi d^2} \ell.$$

8. Vodič z homogénneho materiálu s rezistivitou ρ má tvar kužeľa s odrezaným vrcholom, jeho dĺžka je ℓ , a polomery čelných kruhových plôch $r_1 < r_2$. Vodičom prechádza ustálený prúd I . Vyjadrite závislosť intenzity E elektrického poľa od polohy pozdĺž osi symetrie vodiča! Pri ktorej základni kužeľového vodiča je táto intenzita väčšia? Predpokladajte, že hustota prúdu je v každom reze kolmom na os konštantná.

$$\text{Výsledok: } E(x) = \frac{\rho I}{\pi \left(r_1 + \frac{r_2 - r_1}{\ell} x \right)^2}.$$

9. Cievka navinutá z medeného drôtu má pri teplote $t_0 = 20^\circ\text{C}$ elektrický odpor $R_0 = 15,1 \Omega$. Po istej dobe činnosti sa elektrický odpor cievky zvýšil na $R_1 = 17,3$. Aká bola vtedy teplota t_1 cievky? Teplotný koeficient elektrického odporu medi má hodnotu $\alpha = 5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

$$\text{Výsledok: } t_1 = t_0 + \frac{R - R_0}{R_0 \alpha} = 49,14^\circ\text{C}.$$

10. Teplotný koeficient elektrického odporu medi má hodnotu $\alpha_{\text{Cu}} = 5 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, hliníka $\alpha_{\text{Al}} = 4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Aký je teplotný koeficient elektrického odporu vodiča vytvoreného sériovým spojením hliníkového vodiča s elektrickým odporom $R_{\text{Al}} = 3 \Omega$, a medeného vodiča s elektrickým odporom $R_{\text{Cu}} = 2 \Omega$?

$$\text{Výsledok: } \alpha = \frac{R_{\text{Cu}} \alpha_{\text{Cu}} + R_{\text{Al}} \alpha_{\text{Al}}}{R_{\text{Cu}} + R_{\text{Al}}} = 4,4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}.$$

11. Na zdroj s elektromotorickým napätím $U_m = 48 \text{ V}$ a zanedbateľným vnútorným elektrickým odporom chceme pripojiť špirálový ohrievač s príkonom $P_1 = 100 \text{ W}$. Aký elektrický odpor R_{20} musí mať špirála pri teplote $t_0 = 20^\circ\text{C}$, ak jej pracovná teplota $t_1 = 400^\circ\text{C}$, a teplotný koeficient elektrického odporu $\alpha = 6 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$?

$$\text{Výsledok: } R_{20} = \frac{U_m^2}{P_1} \frac{1}{1 + \alpha \Delta t} \cong 7 \Omega$$

12. Dva voltmetre s rovnakým rozsahom ale rôznymi vnútornými elektrickými odpormi $R_1 = 17\,000 \Omega$, $R_2 = 5000 \Omega$ sú zapojené do série a pripojené na elektrické napätie $U_0 = 220 \text{ V}$. Aké napätia U_1 , U_2 ukazujú voltmetre?

$$\text{Výsledok: } U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} U_0 = 170 \text{ V}, \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = 50 \text{ V}.$$

13. Zdroj s elektrickým napätím $U_o = 120 \text{ V}$ bol zapojený do série s voltmetrom a rezistorom, ktorého elektrický odpor $R_1 = 10^4 \Omega$. Voltmeter ukazoval $U_1 = 50 \text{ V}$. Po výmene rezistora za iný s neznámym elektrickým odporom, voltmeter ukazoval napätie $U_2 = 10 \text{ V}$. Aký veľký je neznámy elektrický odpor R_x ?

$$\text{Výsledok: } R_x = \frac{U_o - U_2}{U_2} \frac{U_1}{U_o - U_1} R_1 = \frac{55}{7} \times 10^4 \Omega.$$

14. Ak na galvanický článok pripojíme rezistor s elektrickým odporom $R_1 = 5 \Omega$, prechádza ním prúd $I_1 = 0,2 \text{ A}$. Ak pripojíme rezistor s odporom $R_2 = 8 \Omega$, prúd sa zmení na $I_2 = 0,15 \text{ A}$. Aký prúd I_3 by prechádzal vodičom, ktorým by sme spojili svorky galvanického článku nakrátko?

$$\text{Výsledok: } I_3 = I_1 I_2 \frac{R_2 - R_1}{R_2 I_2 - R_1 I_1} = 0,75 \text{ A}.$$

15. Plochá batéria sa skladá z troch do série zapojených galvanických článkov, každý s elektromotorickým napätím $U_1 = 1,5 \text{ V}$ a vnútorným elektrickým odporom $R_v = 0,3 \Omega$. Pri akom veľkom elektrickom prúde I_1 batéria dodáva do pripojeného spotrebiča výkon $P_1 = 0,5 \text{ W}$? Aký veľký je elektrický odpor R_s spotrebiča?

$$\text{Výsledok: } I_1 = \frac{3U_1 - \sqrt{(3U_1)^2 - 4 \times 3 \times R_v \times P_1}}{2 \times 3 \times R_v} \cong 0,114 \text{ A}, \quad R_s \cong 38,7 \Omega.$$

16. Rezistor má tvar valčeka s polomerom r a dĺžkou l . Je zhotovený z materiálu s rezistivitou ρ . Straty za sekundu na Joulovo teplo v rezistore majú veľkosť P . Vypočítajte hustotu elektrického prúdu J tečúceho rezistorom a elektrické napätie U medzi koncami valčeka.

$$\text{Výsledok: } J = \sqrt{\frac{P}{\rho l \pi r^2}}, \quad U = \sqrt{\frac{P \rho l}{\pi r^2}}.$$

17. Vodičom s elektrickým odporom $R = 20 \Omega$ tiekol prúd, ktorého veľkosť s časom rovnomerne rástla. V čase $t_1 = 2 \text{ s}$ mal prúd veľkosť $I_1 = 2 \text{ A}$, v čase $t_2 = 6 \text{ s}$ už $I_2 = 4 \text{ A}$. Koľko energie W_1 sa premenilo na Joulovo teplo v tomto časovom intervale?

$$\text{Výsledok: } W_1 \cong 747 \text{ J}.$$

18. Vodičom s elektrickým odporom $R = 20 \Omega$ tiekol konštantný prúd, pričom náboj veľkosti ΔQ prešiel vodičom za časový interval Δt . Vypočítajte, koľko Joulovho tepla W sa vo vodiči pritom uvoľnilo. Zistite, aký je pomer W_1/W_2 zodpovedajúci rovnakému množstvu elektrického náboja, ale rozdielnym časovým intervalom Δt_1 a Δt_2 ! V ktorom časovom intervale sa uvoľní viac tepla – v kratšom, či v dlhšom?

$$\text{Výsledok: } W = R \frac{(\Delta Q)^2}{\Delta t}.$$

Zoznam použitej literatúry v zošitkoch

Učebnice

- Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovits V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika,
ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do statist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985
- Friš S. E., Timoreva A. V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Příručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I. V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski-Krakau-Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

- Sacharov D. I., Kosminkov I. S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Příklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

- Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

Ivan Červeň, Peter Bokes

Fyzika po kapitolách, časť 9.
Elektrický prúd

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo vydavateľstve STU SPEKTRUM v roku 2023

Rozsah 42 strán, 9 obrázkov, 2,235 AH, 2,335 VH

85 – 225 – 23

ISBN 978-80-227-5352-4