

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Gravitačné pole

Ivan Červenň

Hydromechanika

Peter Bokes

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2023

Druhé, upravené a doplnené vydanie publikácie bolo realizované
s podporou KEGA v rámci projektu 006STU-4/2022

„Digitálna podpora predmetov fyzikálneho inžinierstva“

© Ivan Červeň, Peter Bokes

Recenzenti:
prof. Ing. Július Cirák, CSc.
doc. Ing. Ján Vajda, CSc.

ISBN 978-80-227-5350-0

OBSAH

5.1	Gravitačné pole	
5.1.1	Keplerove zákony	5
5.1.2	Newtonov gravitačný zákon	8
5.1.3	Zotrvačná a gravitačná hmotnosť	11
5.1.4	Práca gravitačných síl, potenciálna energia	13
5.1.5	Intenzita a potenciál gravitačného poľa	16
5.1.6	Kozmické rýchlosti, geostacionárna družica	20
5.2	Hydromechanika	
5.2.1	Tlak v tekutinách	24
5.2.2	Hustota	26
5.2.3	Hydrostatický tlak	30
5.2.4	Vztlaková sila	32
5.2.5	Rýchlostné pole a tok	35
5.2.6	Rovnica kontinuity, bilančné rovnice hmotnosti	37
5.2.7	Bernoulliho rovnica a bilancia energie	39
5.2.8	Viskozita	47
5.2.9	Laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny	50
5.2.10	Turbulentné prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny	54
D	Dodatky	
D1	Pascalov zákon	58
D2	Rovnica spojitosti toku v integrálnom a diferenciálnom tvare	59
D3	Základná pohybová rovnica hydrodynamiky	60
D4	Eulerova a Navierova-Stokesova rovnica	62
D5	Bernoulliho rovnica	63
D6	Premena plošného integrálu na objemový	64
V	Súhrn vzťahov	
	Gravitačné pole	66
	Hydromechanika	67
S	Slovník	
	Gravitačné pole	68
	Hydromechanika	71
U	Úlohy	
	Gravitačné pole	75
	Hydromechanika	78

5.1 Gravitačné pole

Padanie telies a obiehajúce Mesiaca okolo Zeme majú spoločnú príčinu – vzájomnú príťažlivosť telies, nazývanú **gravitácia**. Na rozdiel od ostatných fyzikálnych interakcií (elektromagnetickej a jadrových interakcií) je dominantná najmä v nebeskej mechanike, ale nemá reálny význam pri vzájomnom silovom pôsobení medzi atómami. Tam sa uplatňuje najmä elektromagnetická interakcia, ktorá je medzi elektrónmi až 10^{39} -krát silnejšia než gravitačná.

Gravitačné pôsobenie matematicky ako prvý opísal Isaac Newton v roku 1687, keď sformuloval gravitačný zákon. Pomocou neho možno predpovedať polohy planét na oblohe, ale aj počítať trajektórie umelých družíc, vrátane telekomunikačných. Všeobecnejší a dokonalejší matematický opis gravitačného pôsobenia pochádza od Alberta Einsteina (Všeobecná teória relativity, 1916), ten však nebude predmetom tohto textu.

V tejto kapitole sú najprv uvedené Keplerove zákony a na ich základe je potom odvodený Newtonov gravitačný zákon. Ďalej je opísaný rozdiel medzi gravitačnou a zotrvačnou hmotnosťou a experimenty, ktoré poukazujú na ich ekvivalenciu. Nasledujúce články textu sa zaoberajú gravitačným poľom a zavádzajú sa v nich dôležité veličiny na jeho opis – intenzita a potenciál. V poslednom článku sú opísané tzv. kozmické rýchlosti a odvodené parametre trajektórie geostacionárnych družíc, ktoré sa využívajú na telekomunikačné účely.

Z matematickej stránky – formálne – je teória gravitačného poľa zhodná s teóriou elektrostatického poľa, ktorá bude v príslušnej kapitole opísaná podrobnejšie než teória gravitačného poľa v tejto kapitole.

5.1.1 Keplerove zákony

Vyjadrujú zákonitosti pohybu planét okolo Slnka. Johannes Kepler (1571 – 1630) ich sformuloval na základe dôkladnej analýzy údajov, ktoré získal mnoho-ročným pozorovaním najmä Tycho Brahe (1546 – 1601). Je pozoruhodné, že údaje boli získané bez použitia ďalekohľadu.

Prvý Keplerov zákon sa týka tvaru obežných dráh planét. Tento zákon uvádza, že *planéty obiehajú okolo Slnka po eliptických trajektóriách, pričom Slnko leží v spoločnom ohnisku týchto elíps*. Elipsy, po ktorých planéty obiehajú, majú malú výstrednosť – najmenším rozdielom dĺžok polosí sa vyznačuje Venuša (0,002 %), najväčším Pluto (až 3 %). V nasledujúcej tabuľke sú uvedené vzdialenosti niektorých planét od Slnka v miliónoch kilometrov (aj v astronomických jednotkách AU), doba obehu v rokoch a excentricita, definovaná vzťahom $e = (\sqrt{a^2 - b^2})/a$, kde a , b sú dĺžky hlavnej a vedľajšej polosí elipsy.

Tabuľka 1.	Merkúr	Venuša	Zem	Mars	Jupiter	Saturn	Pluto
Vzdialenosť (10 ⁶ km)	58	108	150	228	778	1430	5900
(AU)	0,38	0,72	1	1,52	5,18	9,53	39,3
Doba obehu (rok)	0,241	0,615	1	1,88	11,9	29,5	248
Excentricita	0,206	0,0068	0,0167	0,0934	0,0485	0,0556	0,250
Relatívna hmotnosť	0,0558	0,815	1	0,107	318	95	0,11

Prísne vzaté – planéta a Slnko obiehajú okolo spoločného ťažiska, ale vzhľadom na malú hmotnosť planét v porovnaní s hmotnosťou Slnka, možno túto skutočnosť zanedbať.

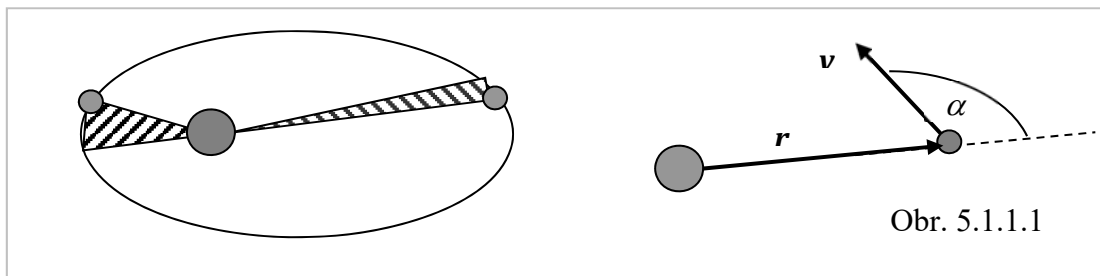
Prvý Keplerov zákon sa vzťahuje aj na pohyb Mesiaca a umelých družíc okolo Zeme. Keďže hmotnosť Mesiaca je približne len 81-krát menšia než hmotnosť Zeme, treba pri precíznejších výpočtoch rátať s ich pohybom okolo spoločného ťažiska.

Ak v prvom Keplerovom zákone termín *elipsa* nahradíme termínom *kuželosečka* (tým zahrnieme aj parabolu a hyperbolu), platí tento zákon nielen pre planéty, ale aj pre ľubovoľné iné nebeské telesá (kométy, asteroidy), ktoré sa dostanú do silového pôsobenia Slnka.

Druhý Keplerov zákon vyjadruje stálosť momentov hybnosti planét, ale Kepler pri jeho formulácii využil pojem plošnej rýchlosti. Pod plošnou rýchlosťou v_p planéty rozumieme podiel veľkosti plochy vytvorenej sprievodičom planéty (t. j. spojnicou

planéta – Slnko) v rovine obežnej dráhy a príslušného časového intervalu: $v_p = \Delta S / \Delta t$.

Podľa druhého Keplerovho zákona ***plošná rýchlosť planéty je konštantná***. To znamená, že veľkosť plochy vytvorenej sprievodičom za jednotku času nezávisí od toho, na ktorom mieste obežnej dráhy sa planéta nachádza. Keď je k Slnku bližšie, pohybuje sa rýchlejšie.



Obr. 5.1.1.1

Plošná rýchlosť planéty, ako vektorová veličina, sa definuje vzťahom

$$\mathbf{v}_p = (1/2)(\mathbf{r} \times \mathbf{v}), \quad (5.1.1.1)$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor planéty vzhľadom na Slnko, $\mathbf{v}$ jej okamžitá rýchlosť. Za malý časový interval Δt sprievodič vytvorí plochu s veľkosťou

$$\Delta S = \frac{1}{2} r v \Delta t \sin \alpha,$$

kde v je rýchlosť konca pohybujúceho sa sprievodiča, r vzdialenosť planéty od Slnka a α uhol medzi polohovým vektorom planéty a vektorom jej rýchlosti. Pre veľkosť plochy vytvorenej za jednotku času (t. j. plošnú rýchlosť) odtiaľ vyplýva:

$$v_p = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{r v \Delta t \sin \alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2} r v \sin \alpha, \quad (5.1.1.2)$$

čo je veľkosť vektorového súčinu $(1/2)(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, t. j. veľkosť vektora plošnej rýchlosti.

Presvedčíme sa, že stálosť plošnej rýchlosti planéty znamená aj stálosť jej momentu hybnosti. Moment hybnosti častice s hmotnosťou m pohybujúcej sa rýchlosťou $\mathbf{v}$ vzhľadom na jedno z ohnísk elipsy je

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad (5.1.1.3)$$

takže veľkosť momentu hybnosti sa rovná výrazu

$$L = m r v \sin \alpha = 2m v_p. \quad (5.1.1.4)$$

Deriváciou vzťahu (5.1.1.3) podľa času získame:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} \right) + \left(\mathbf{r} \times \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \right) = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + (\mathbf{r} \times m\mathbf{a}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Súčin $(\mathbf{v} \times m\mathbf{v})$ sa rovná nule vzhľadom na rovnobežnosť vektorov $\mathbf{v}$ a $m\mathbf{v}$. Aj súčin $(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ sa rovná nule, lebo jediná sila ktorá pôsobí na planétu, má smer opačný ako polohový vektor. To znamená, že pri pohybe planéty sa jej moment hybnosti nemení. Zo vzťahu (5.1.1.4) potom vyplýva, že sa nemení ani plošná rýchlosť planéty.

Tretí Keplerov zákon vyjadruje vzťah medzi obežnou dobou T planéty a dĺžkou hlavnej polosi jej eliptickej obežnej dráhy. Hovorí, že *pomer druhej mocniny obežnej doby a tretej mocniny dĺžky hlavnej polosi je pre všetky planéty rovnaký*. Podľa toho platia vzťahy:

$$T^2 = ka^3, \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (5.1.1.5)$$

kde k je konštanta úmernosti. Vyplýva z nich, že vzdialenejšie planéty majú väčšiu obežnú dobu. Pomocou tab.1. si možno overiť správnosť tohto Keplerovho zákona. Obežná doba Saturna, v porovnaní s obežnou dobou Zeme, je takmer 30-krát dlhšia.

Pomocou obežnej doby T a polomeru R trajektórie planéty (trajektórie považujeme za približne kruhové) možno vyjadriť dostredivé zrýchlenie planéty:

$$a_d = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R} \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad (5.1.1.6)$$

ktoré už bezprostredne súvisí s veľkosťou sily pôsobiacej na planétu. Využitím tretieho Keplerovho zákona vzťah ešte upravíme:

$$a_d = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{4\pi^2 R}{kR^3} = c \frac{1}{R^2}, \quad (5.1.1.7)$$

odkiaľ už vidno, že dostredivé zrýchlenie a_d , a teda aj sila, ktorou pôsobí Slnko na planétu, sa znižuje s druhou mocninou vzdialenosti od Slnka. Túto skutočnosť využijeme v ďalšej časti textu pri zdôvodnení správnosti Newtonovho gravitačného zákona.

Príklad 5.1.1.1 Medzi Marsom a Jupiterom sa nachádza množstvo menších obiehajúcich telies (asteroidov), o ktorých sa predpokladalo, že sú zvyškami rozpadnutej planéty. Mala sa pohybovať vo vzdialenosti od Slnka približne 2,8-krát väčšej ako naša Zem. Aká by bola jej obežná doba? Vyjadrite ju v rokoch. Aký je pomer plošných rýchlostí tejto hypotetickej planéty a našej Zeme?

Riešenie: Využijeme tretí Keplerov zákon, podľa ktorého $T_p^2 = T_z^2 (R_p^2/R_z^2)$, odkiaľ získame číselnú hodnotu $T_p \cong 4,7$ roka. Plošnú rýchlosť získame podielom plošného obsahu kružnice a doby obehu. Pre pomer plošných rýchlostí vychádza $P_p/P_z = 1,67$.

Kontrolné otázky

1. Čo je obsahom prvého Keplerovho zákona?
2. Čo je obsahom druhého Keplerovho zákona?
3. Čo je obsahom tretieho Keplerovho zákona?
4. Ktorý z Keplerových zákonov je iným vyjadrením zákona zachovania momentu hybnosti planéty?
5. Definujte plošnú rýchlosť planéty.

5.1.2 Newtonov gravitačný zákon

O gravitácii ako spoločnej príčine padania telies a pohybu Mesiaca okolo Zeme, začal Newton uvažovať už vo svojej mladosti. Veľkosti príťažlivých síl pôsobiacich na rôzne telesá (padajúce kamene, Mesiac) posudzoval na základe ich zrýchlení, v súlade so zákonom sily (3.1.1.4). Zrýchlenie padajúcich telies vyvolané zemskou príťažlivosťou možno merať priamo, dostredivé zrýchlenie Mesiaca sa dá vypočítať z jeho obežnej doby T a polomeru trajektórie R_M na základe vzťahu (5.1.1.7). Pre dostredivé zrýchlenie Mesiaca vychádza $a_M = 0,0027 \text{ m/s}^2$, čo je iba zlomok $1/3600$ zrýchlenia voľne padajúcich telies na povrchu Zeme. Mesiac je od Zeme ďaleko, gravitačné pôsobenie Zeme v takej vzdialenosti je istotne menšie. Aká je však kvantitatívna závislosť gravitačnej sily od vzdialenosti medzi telesami? Túto závislosť možno získať z porovnania pomeru veľkosti zrýchlení a pomeru príslušných vzdialeností. Newton za vzdialenosť kameňa od Zeme považoval jeho vzdialenosť od stredu zeme R_z , nie od jej povrchu. Zem teda nahradil hmotným bodom s hmotnosťou rovnajúcou sa hmotnosti Zeme a nachádzajúcim sa v jej strede (pozri poznámku). Newtonovi z výpočtov vyplynulo, že hodnote $1/3600$ sa veľmi približuje druhá mocnina pomeru vzdialeností $(R_z/R_M)^2$:

$$\left(\frac{R_z}{R_M}\right)^2 = \left(\frac{6,37 \times 10^6 \text{ m}}{3,82 \times 10^8 \text{ m}}\right)^2 \cong \frac{1}{3600}.$$

Z toho teda vyplýva, že príťažlivá sila medzi telesami sa znižuje s druhou mocninou ich vzájomnej vzdialenosti.

Poznámka: V kapitole o elektrostatickom poli sa pomocou Gaussovho zákona rieši analogický prípad. Dokazuje sa tam, že účinky homogénne nabitej gule v jej okolí sú rovnaké, ako keby celý elektrický náboj bol sústredený v jej strede.

Výsledok, že gravitačná sila sa znižuje s druhou mocninou vzdialenosti medzi telesami, vyplýva aj z tretieho Keplerovho zákona. Treba pritom použiť Newtonov zákon sily. Postup zjednodušíme predpokladom, že planéty sa pohybujú po kružniciach. Vtedy použijeme výsledok (5.1.1.7) vyplývajúci z tretieho Keplerovho zákona:

$$a_d = c \frac{1}{r^2} .$$

Po dosadení do zákona sily, pre veľkosť príťažlivej sily F_p pôsobiacej na planétu s hmotnosťou m , dostaneme vzťah:

$$F_p = c m \frac{1}{r^2} . \quad (5.1.2.1)$$

Zo vzťahu jednoznačne vyplýva, že veľkosť príťažlivej sily pôsobiacej na planétu je nepriamo úmerná druhej mocnine vzdialenosti od Slnka. Podľa zákona akcie a reakcie rovnako veľká sila (vyvolaná gravitačným pôsobením planéty) musí pôsobiť na Slnko (má hmotnosť M):

$$F_S = c' M \frac{1}{r^2} . \quad (5.1.2.2)$$

Veľkosť síl F_p a F_S je rovnaká, preto platí vzťah

$$c' M \frac{1}{r^2} = c m \frac{1}{r^2} ,$$

z ktorého vyplýva rovnosť

$$cm = c'M , \quad \text{resp.} \quad \frac{c}{M} = \frac{c'}{m} = G , \quad (5.1.2.3)$$

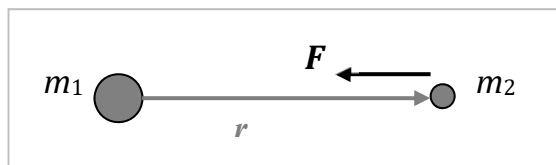
v ktorej G je veličina s názvom **gravitačná konštanta**. Vzťahy (5.1.2.1) a (5.1.2.2) pomocou gravitačnej konštanty nadobudnú nový spoločný tvar:

$$F_S = F_p = GmM \frac{1}{r^2} . \quad (5.1.2.4)$$

S ohľadom na vektorový charakter sily tento vzťah sa zapisuje v tvare:

$$\mathbf{F}_p = -GmM \frac{1}{r^3} \mathbf{r}_p , \quad (5.1.2.5)$$

v ktorom záporné znamienko vyjadruje skutočnosť, že sila $\mathbf{F}_p$ pôsobiaca na planétu má opačný smer ako polohový vektor $\mathbf{r}_p$, ktorého začiatok sa umiestňuje do stredu Slnka. Reprezentuje to aj skutočnosť, že gravitačná sila je vždy príťažlivá, na rozdiel od elektrostatických síl medzi elektrickými nábojmi, kde jestvuje aj odpudivá sila.



Vzťah (5.1.2.4) vyjadruje veľkosť gravitačnej sily pôsobiacej medzi ľubovoľnými „bodovými“ telesami, resp. ako už bolo uvedené v poznámke, medzi telesami s guľovou symetriou. Vtedy vzdialenosť r vystupujúca vo vzťahu je vzdialenosť medzi ich stredmi. Namiesto hmotností Slnka a planéty sa potom vo vzťahu uvádzajú hmotnosti telies m_1 a m_2 . To platí aj pre jeho vektorový zápis:

$$\mathbf{F} = -Gm_1m_2 \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \quad (5.1.2.6).$$

Tento vzťah vyjadruje aj gravitačnú silu pôsobiacu na kameň ležiaci na povrchu Zeme. Keď ho zodvihneme, cítime že je priťahovaný k Zemi. Podľa zákona akcie a reakcie rovnako veľká sila, ale opačným smerom, pôsobí na našu Zem. Keď kameň z ruky pustíme, začne padat' k Zemi. Posudzujúc situáciu z hľadiska ich spoločného ťažiska, aj Zem sa pohybuje, ibaže jej zrýchlenie (v porovnaní so zrýchlením kameňa) je toľkokrát menšie, koľkokrát je väčšia jej hmotnosť.

Hodnotu gravitačnej konštanty G v laboratóriu experimentálne určil ešte v roku 1789 G. Cavendish pomocou torzných váh. Podľa súčasných údajov má veľkosť:

$$G = 6,6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}.$$

Z veľkosti gravitačnej konštanty vyplýva, že dve telesá, každé s hmotnosťou 1 kg, sa zo vzdialenosti 1 m priťahujú silou $6,6726 \times 10^{-11}$ N. Preto nepozorujeme gravitačné sily medzi telesami v miestnosti. Majú však rozhodujúcu úlohu v kozmických rozmeroch.

Príklad 5.1.2.1 Akou veľkou gravitačnou silou je priťahovaná kocka ľadu s objemom 1 dm^3 na povrchu Zeme a na povrchu Mesiaca? (Hmotnosť Mesiaca $m_M = 7,36 \times 10^{22}$ kg, polomer $R_M = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$, hustota ľadu $\rho = 0,9 \text{ kg/m}^3$.)

Riešenie: Na kocku ľadu na Zemi pôsobí sila $F_Z = 0,9 \text{ kg} \times 9,81 \text{ m/s}^2 = 8,83 \text{ N}$. Na Mesiaci pôsobí sila $F_M = Gm_Mm_l \frac{1}{R_M^2} = 1,45 \text{ N}$, čo je približne 6-krát menšia sila.

Kontrolné otázky

1. Z ktorého Keplerovho zákona možno dospieť k záveru, že gravitačná sila sa zmenšuje s druhou mocninou vzdialenosti medzi telesami?
2. Ak na seba pôsobia dve telesá – veľké a trikrát menšie – v akom pomere sú veľkosti gravitačných síl, ktorými pôsobia väčšie teleso na menšie a menšie na väčšie?
3. Pri vzájomnom pôsobení dvoch hviezd jednu silu nazveme akcia, druhú reakcia. Možno pri dvojici hviezd rotujúcich okolo spoločného ťažiska jednu z nich označiť ako dostredivú a druhú ako odstredivú?
4. Aká je veľkosť gravitačnej konštanty (uved'te len jej rád)?

5.1.3 Zotrvačná a gravitačná hmotnosť

Hmotnosť ako fyzikálna veličina, v súvislosti so silou, vystupuje v dvoch fyzikálnych zákonoch – v zákone sily a v gravitačnom zákone. V prvom z nich vyjadruje zotrvačné vlastnosti telies, t. j. tendenciu brániť sa zmene pohybového stavu, v druhom zákone ide o gravitačné vlastnosti telies – o sily, ktorými sa telesá priťahujú. Preto prirodzene vzniká otázka, či v oboch zákonoch ide o rovnakú hmotnosť, alebo či tieto hmotnosti treba rozlišovať. Odpoveď môže poskytnúť iba experiment.

Je pozoruhodné, že prvé experimenty s úmyslom rozhodnúť túto otázku vykonal už Newton. Využil na to jednoduché fyzikálne kyvadlo, pre dobu kmitu ktorého platí vzťah (4.3.3.9):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}, \quad (5.1.3.1)$$

v ktorom J je moment zotrvačnosti kyvadla, m jeho hmotnosť, g tiažové zrýchlenie a l vzdialenosť medzi osou otáčania a ťažiskom kyvadla. Súčin mg v menovateli výrazu predstavuje tiaž, podmienenú vzájomným gravitačným pôsobením kyvadla a Zeme, takže príslušná hmotnosť m_g reprezentuje gravitačné vlastnosti kyvadla. Newton použil kyvadlo tvorené malým guľovým puzdrom (bolo možné ho naplniť rôznymi látkami), zaveseným na tenkom vlákne s dĺžkou l . Moment zotrvačnosti – reprezentujúci zotrvačné vlastnosti kyvadla – sa pri takomto kyvadle vyjadruje vzťahom $J = m_z l^2$, kde m_z je zotrvačná hmotnosť zaveseného puzdra s náplňou. Po dosadení uvedených vzťahov vzorec (5.1.3.1) získa tvar:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_z l^2}{m_g g l}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_z l}{m_g g}}. \quad (5.1.3.2)$$

Newton vkladal do puzdra rôzne látky, ale vždy tak, aby sa celková hmotnosť puzdra nezmenila. Hmotnosť kontroloval na rovnoramenných váhach, čím sa zaručilo, že na kyvadlo pôsobila vždy rovnako veľká gravitačná sila. Preto sa rozdiel medzi rôznymi látkami mohol prejaviť iba ich rôznymi zotrvačnými vlastnosťami. Odlišné zotrvačné vlastnosti, teda odlišné zotrvačné hmotnosti látok s rovnakou gravitačnou hmotnosťou, by viedli k zmenám doby kyvu kyvadla. Newton však vo všetkých prípadoch (v rámci tolerancie 10^{-3}) nameral rovnaké doby kyvu, z čoho usúdil, že rovnakým gravitačným hmotnostiam rôznych látok zodpovedajú aj rovnaké zotrvačné hmotnosti.

Ekvivalenciu (rovnosť) zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti podporuje aj skutočnosť, známa už Galileimu, že veľké aj malé telesá padajú rovnakým zrýchlením. Zrýchlenie padajúceho telesa tesne pri povrchu Zeme vyjadríme vzťahom

$$a_g = \frac{F_g}{m_z} = \frac{1}{m_z} G \frac{M m_g}{R^2} = \left(G \frac{M}{R^2} \right) \left(\frac{m_g}{m_z} \right). \quad (5.1.3.3)$$

V prvej zátvorke vystupuje (gravitačná) hmotnosť Zeme M a jej polomer R , takže výraz je pre všetky padajúce telesá rovnaký. Zo skutočnosti, že zrýchlenie a_g nezávisí od veľkosti telesa vyplýva, že ak iné padajúce teleso má napr. dvojnásobnú gravitačnú hmotnosť, dvojnásobná musí byť aj jeho zotrvačná hmotnosť. Preto je rozumné považovať ich za rovnaké.

Veľmi presné experimenty týkajúce sa rovnosti zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti vykonal v rokoch 1887 až 1912 L. Eötvös. Dokázal, že podiel týchto hmotností sa od čísla 1 odlišuje nanajvýš na ôsmom desatinnom mieste. V roku 1964 Dicke pomocou zdokonalenej Eötvösovej metódy posunul túto hranicu až na jedenáste a v roku 1971 Braginskij a Panov až na dvanáste desatinné miesto.

Rovnosť zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti má súvislosť s ekvivalenciou zotrvačných a gravitačných síl. Veľkosti týchto síl sú úmerné príslušným hmotnostiam telies, na ktoré pôsobia. Zotrvačné sily sa prejavujú len v neinerciálnych vzťahných sústavách. Takou je aj zrýchlene sa pohybujúca kabína výťahu. Ak sa nachádzame v takejto kabíne a nemáme možnosť pozorovať okolie, potom prípadnú náhlu zmenu sily, ktorou pôsobíme na podlahu kabíny, by sme si mohli vysvetliť buď zrýchleným pohybom kabíny nahor (neinerciálnosťou vzťahnej sústavy s ňou spojenou), alebo zosilnením gravitačného pôsobenia Zeme. Na druhej strane, v uzavretej kabíne, ktorá by padala gravitačným zrýchlením, by sme na jej dno tiažou nepôsobili – ako keby v padajúcej kabíne zaniklo gravitačné pôsobenie. Gravitačné pôsobenie sa teda dá eliminovať vhodne zvolenou neinerciálnou sústavou. Nemožnosť rozlíšiť zotrvačné účinky od gravitačných, je obsahom **princípu ekvivalencie** (zotrvačných a gravitačných síl). Ten stojí v základe Einsteinovej všeobecnej teórie relativity. Ak by bolo možné experimentálne odlíšiť zotrvačnú a gravitačnú hmotnosť, princíp ekvivalencie by neplatil.

Kontrolné otázky

1. Aké boli dôvody na rozlišovanie zotrvačnej hmotnosti od gravitačnej?
2. Akými experimentmi sa dá zdôvodniť ekvivalencia zotrvačnej a gravitačnej hmotnosti?
3. Čo vyjadruje princíp ekvivalencie?

5.1.4 Práca gravitačných síl, gravitačná potenciálna energia

Ak dve telesá pôsobia na seba gravitačnými silami a mení sa ich vzájomná vzdialenosť, potom tieto sily konajú prácu. Výpočet tejto práce zjednodušíme predpokladom, že ide o dve rozmerovo malé, prakticky bodové telesá, s hmotnosťami m_1 a m_2 . Predpokladajme, že prvé teliesko s hmotnosťou m_1 je umiestnené v začiatku súradnicovej sústavy, druhé teliesko s hmotnosťou m_2 v bode B, do ktorého zo začiatku sústavy smeruje polohový vektor $\mathbf{r}_B$. Teliesko sa potom presunie z bodu B do bodu C, do ktorého smeruje polohový vektor $\mathbf{r}_C$. Gravitačná sila pôsobiaca na druhé teliesko pritom vykoná prácu, ktorú vypočítame podľa všeobecného vzťahu

$$A = \int_B^C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

do ktorého za silu $\mathbf{F}$ dosadíme vzťah z gravitačného zákona (5.1.2.6):

$$A = - \int_B^C G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ako bolo uvedené v článku 3.2.2 o energii, špeciálne v poznámke 2, platí rovnosť $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$, ktorú využijeme pri úprave integrálu:

$$\begin{aligned} A &= - \int_B^C G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = -G \int_B^C \frac{m_1 m_2}{r^3} r dr = -G m_1 m_2 \int_B^C \frac{1}{r^2} dr = \\ &= -G m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_B} \right). \end{aligned}$$

Vo výsledku vystupujú vzdialenosti r_B a r_C bodov B a C od začiatku súradnicovej sústavy, teda od telieska s hmotnosťou m_1 . Preto vykonaná práca závisí iba od zmeny vzdialenosti teliesok, nie od dĺžky a tvaru krivky, po ktorej sa druhé teliesko premiestňovalo z bodu B do bodu C. Ak sa teda teliesko pohybuje len po guľovej ploche s polomerom r_B , gravitačná sila prácu nekoná.

V článku 3.2.2 o energii bolo uvedené, že práca dodaná sústave sa rovná prírastku energie sústavy. Túto prácu však musia konať vonkajšie sily. V tomto prípade sústavu tvoria dve telesá a prácu konajú vnútorné sily – sily pôsobiace medzi týmito telesami. Preto sa celková energia sústavy nemení, mení sa iba ich vzájomná potenciálna energia. Jej úbytok sa musí rovnať prírastku kinetických energií telies. Keďže ide o gravitačné sily, energia súvisiaca so vzájomnou polohou telies sa nazýva **gravitačná potenciálna energia** (označíme ju W_p). Zmena tejto energie súvisí s prácou, pričom platí vzťah:

$$A = -Gm_1m_2 \left(-\frac{1}{r_C} + \frac{1}{r_B} \right) = -(W_{pC} - W_{pB}). \quad (5.1.4.1)$$

Z rovnice vyplýva, že pre vzájomnú gravitačnú potenciálnu energiu dvoch telies môžeme napísať vzťah:

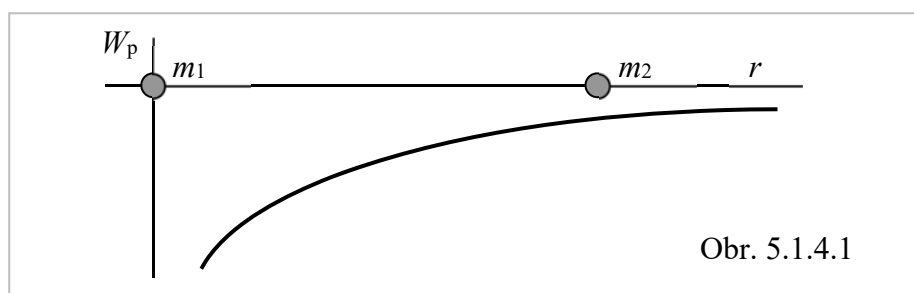
$$W_p(r) = -G \frac{m_1m_2}{r} + C_k, \quad \text{resp.} \quad W_p(r) = -G \frac{m_1m_2}{r} + W_o. \quad (5.1.4.2)$$

Veľkosť konštanty $C_k = W_o$ závisí od voľby takej vzdialenosti medzi telesami, pri ktorej ich vzájomnú potenciálnu energiu považujeme za nulovú. Ak túto vzdialenosť zvolíme za nekonečne veľkú, t. j. položíme $W_p(\infty) = 0$, vtedy sa konštanta W_o bude rovnať nule. Presvedčíme sa o tom pomocou zápisu

$$W_p(r) = -G \frac{m_1m_2}{r} + W_o \Rightarrow W_p(\infty) = 0 + W_o \Rightarrow W_o = 0.$$

Pri takejto voľbe nulovej hladiny sa vzájomná gravitačná potenciálna energia dvoch veľmi malých (bodových) telies vyjadruje vzťahom

$$W_p(r) = -G \frac{m_1m_2}{r}. \quad (5.1.4.3)$$



Zo vzťahu (5.1.4.3) vyplýva, a aj z obrázku vidno, že pri ľubovoľnej konečnej vzdialenosti medzi telesami je ich vzájomná potenciálna energia záporná. Čím sú telesá k sebe bližšie, tým je táto ich energia menšia. Gravitačná sila medzi telesami je príťažlivá a ak sa teleso m_2 vplyvom tejto sily približuje k telesu m_1 , sila vykoná kladnú prácu na úkor vzájomnej potenciálnej energie (pozri Poznámku). Na tomto princípe pracujú hodiny poháňané závažím. Ak chceme aby hodiny išli, musíme závažie posunúť do hornej polohy. Na chod hodín sa potom využíva gravitačná sila, pričom sa spotrebúva vzájomná gravitačná potenciálna energia medzi závažím a Zemou. Pri dvíhaní závažia gravitačné sily konajú zápornú prácu, kladnú prácu vtedy koná človek, ktorý sústave Zem – závažie zväčšuje vzájomnú potenciálnu energiu.

Poznámka: Ak má vektor gravitačnej sily $\mathbf{F}_g$ pôsobiacej na druhé teliesko má rovnaký smer ako vektor elementárneho posunutia, je vykonaná elementárna práca gravitačnej sily kladná.

Doposiaľ sa v texte písalo iba o vzájomnej potenciálnej energii dvoch telies. Potenciálna energia sa v princípe môže prejavovať iba medzi dvomi, alebo viacerými telesami. Napriek tomu sa bežne hovorí o potenciálnej energii jednotlivých telies nad zemským povrchom. Je to dôsledok skutočnosti, že v porovnaní s bežnými telesami na zemskom povrchu, Zem má podstatne väčšiu hmotnosť. Na objasnenie vypočítame rozdiel vzájomných potenciálnych energií Zeme s hmotnosťou M a malého telesa s hmotnosťou m , medzi polohami telesa priamo na povrchu Zeme a vo výške h nad jej povrchom. Vychádzajúc zo vzťahu (5.1.4.3) pre tento rozdiel energií platí:

$$\Delta W_p = -G \frac{Mm}{R+h} - \left(-G \frac{Mm}{R} \right) = -GMm \left(\frac{1}{R+h} - \frac{1}{R} \right) = GMm \frac{h}{R(R+h)}.$$

Ak uvažujeme iba s výškami h , ktoré sú v porovnaní s polomerom Zeme R malé, výsledný vzťah po aproximácii nadobudne tvar

$$\Delta W_p = GMm \frac{h}{R(R+h)} \cong GMm \frac{h}{R^2} = \left(G \frac{M}{R^2} \right) mh = gmh. \quad (5.1.4.4)$$

To je známy vzťah vyjadrujúci potenciálnu energiu telesa s hmotnosťou m vo výške h nad zemským povrchom, v ktorom $g = GM/R^2$ predstavuje gravitačné zrýchlenie, čo bude dokázané v nasledujúcom článku. Vo výslednom vzťahu mgh zdanlivo vystupuje iba hmotnosť m , čo zvädza k názoru, že nejde o vzájomnú potenciálnu energiu, ale o potenciálnu energiu individuálneho telesa. Hmotnosť Zeme je však zahrnutá v gravitačnom zrýchlení g .

Príklad 5.1.4.1 Vypočítajte rýchlosť v_1 telesa, ktoré by z výšky h dopadlo na povrch Zeme, ak by letelo vo vákuu. Hmotnosť telesa je m , Zeme M .

Riešenie: Zo zákona zachovania mechanickej energie vyplýva

$$\begin{aligned} W_p(h) + W_k(h) &= W_p(0) + W_k(0), \text{ t. j.} \\ &= -G \frac{Mm}{R+h} + 0 = -G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv_1^2, \end{aligned}$$

odkiaľ vypočítame rýchlosť v_1 :

$$v_1^2 = 2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) \cong 2GM \frac{h}{R(R+h)}.$$

Kontrolné otázky

1. *Ako sa musí meniť vzdialenosť medzi dvomi telesami, aby sa ich vzájomná gravitačná potenciálna energia zväčšovala?*
2. *Napište vzťah vyjadrujúci vzájomnú potenciálnu energiu dvoch telies pôsobiacich na seba gravitačnými silami.*
3. *V ktorom prípade je práca gravitačných síl pôsobiacich medzi dvomi telesami kladná – pri zväčšovaní, či pri zmenšovaní ich vzájomnej vzdialenosti?*
4. *Môže byť vzájomná gravitačná potenciálna energia dvoch telies kladná?*

5.1.5 Intenzita a potenciál gravitačného poľa

V XIX. storočí M. Faraday a J. C. Maxwell zaviedli pojem fyzikálneho poľa, v ich prípade – elektromagnetického. Rozumeli tým sprostredkovateľa vzájomného silového pôsobenia medzi elektricky nabitými telesami, resp. časticami. Takto zavedený pojem poľa sa uplatňuje aj pri opise gravitačných javov. Podľa tejto predstavy každé teleso vytvára gravitačné pole v okolitom priestore, a toto pole pôsobí silou na každé iné teleso nachádzajúce sa v ňom. To znamená, že telesá na seba nepôsobia na diaľku priamo, ale prostredníctvom gravitačných polí, ktoré vo svojom okolí vytvárajú.

O existencii gravitačného poľa v istom priestore sa môžeme presvedčiť tak, že do neho vložíme teleso a zistíme, či naň pôsobí (gravitačná) sila. Bez skúšobného telesa sa o existencii gravitačného poľa nemôžeme presvedčiť. Preto zostáva otvorenou otázka, či gravitačné pole v okolí telesa je objektívne existujúci fyzikálny objekt, alebo či silové pôsobenie (naďaleko) existuje iba medzi telesami.

Napriek takejto (filozofickej) nejasnosti sa predstava o reálnej existencii gravitačného poľa ako fyzikálneho objektu (ale aj iných druhov polí) plne akceptuje a poľu sa pripisujú parametre ako energia či hybnosť. V prípade elektromagnetického poľa sa energia môže šíriť priestorom (rýchlosťou svetla) a sprostredkovať prenos informácií. V tomto prípade je predstava o existencii poľa ako samostatnej entity celkom pochopiteľná. V podstate iba nedávno sa podarilo experimentálne pozorovať gravitačné vlny, takže aj v prípade gravitačného poľa sa celkom prirodzene dá akceptovať jeho objektívna existencia.

Na opis gravitačného poľa ako fyzikálneho objektu sa používajú dve významné veličiny –

- intenzita gravitačného poľa (vektorová veličina) a
- potenciál gravitačného poľa (skalárna veličina).

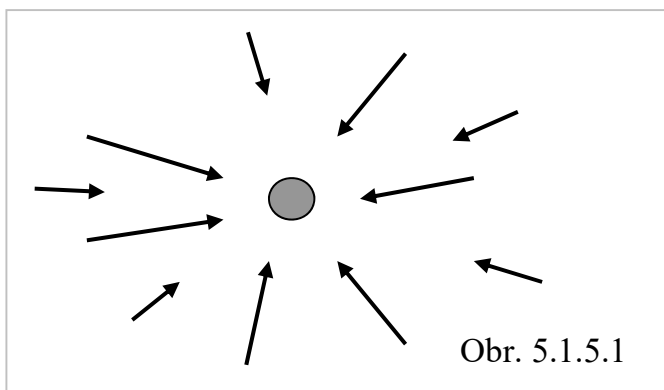
Definícia **intenzity gravitačného poľa** vychádza zo silového pôsobenia poľa na skúšobné teliesko s hmotnosťou m , ktoré sa v ňom nachádza. Definuje sa ako podiel gravitačnej sily $\mathbf{F}_g$ pôsobiacej na skúšobné teliesko (v danom bode poľa) a hmotnosti tohto telieska:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}. \quad (5.1.5.1)$$

Ak sa skúšobné teliesko s hmotnosťou m nachádza v gravitačnom poli vytvorenom jediným telesom s hmotnosťou M , potom sila medzi týmito telesami sa vyjadruje gravitačným zákonom (5.1.2.5). Preto sa intenzita v okolí telesa s hmotnosťou M vyjadruje vzťahom:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{1}{m} G \frac{mM}{r^3} \mathbf{r} = -G \frac{M}{r^3} \mathbf{r}. \quad (5.1.5.2)$$

Zo vzťahu vyplýva, že vektor intenzity $\mathbf{E}$ má opačný smer ako polohový vektor $\mathbf{r}$, ktorého začiatok leží v telese s hmotnosťou M . To znamená, že ak nakreslíme okolo telesa množinu vektorov intenzity gravitačného poľa, všetky budú smerovať k telesu, ktoré vytvára (generuje) gravitačné pole. Fyzikálne pole takéhoto typu sa nazýva **radiálne pole** (Obr. 5.1.5.1). S rastúcou vzdialenosťou od telesa, sa veľkosť vektorov intenzity znižuje.



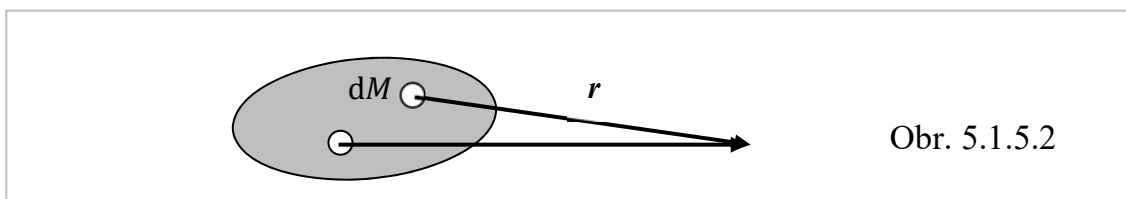
Ak na skúšobné teliesko pôsobí viac telies, výsledná intenzita gravitačného poľa v mieste telieska, sa rovná vektorovému súčtu intenzít vyvolaných jednotlivými telesami (princíp superpozície):

$$\mathbf{E} = \sum_i \mathbf{E}_i. \quad (5.1.5.3)$$

Veľké teleso, aj nepravidelného tvaru, možno rozdeliť na množinu malých telies a intenzitu v jeho okolí počítať pomocou vzťahu (5.1.5.3). V limitnom prípade delenia sa sumácia zmení na integrál, pričom jednotlivé elementy veľkého telesa sa stanú prakticky bodovými telesami (hmotnými bodmi). Potom sa intenzita v okolí takéhoto telesa počíta integráciou:

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = -G \int \frac{dM}{r^3} \mathbf{r}, \quad (5.1.5.4)$$

príčom polohový vektor $\mathbf{r}$ má začiatok v príslušnom hmotnom elemente dM a končí v bode, v ktorom počítame intenzitu.



Obr. 5.1.5.2

Bez dôkazu uvedieme, že ak ide o guľovo symetrické teleso a intenzitu počítame mimo telesa, integráciou získame výsledok zhodný so vzťahom (5.1.5.2). To znamená, že v takomto prípade je intenzita rovnaká, ako keby celá hmotnosť telesa bola sústredená v jeho strede.

Intenzita gravitačného poľa je definovaná podielom sily a hmotnosti, z čoho vyplýva, že jednotkou tejto veličiny je m/s^2 . Má teda rozmer zrýchlenia. Tesne nad povrchom Zeme pre veľkosť intenzity gravitačného poľa platí

$$E = \frac{F_g}{m} = \frac{1}{m} G \frac{mM}{R^2} = G \frac{M}{R^2} = g_0, \quad (5.1.5.5)$$

z čoho po vyčíslení zistíme, že intenzita gravitačného poľa je totožná s gravitačným zrýchlením. Zhoduje sa s ňou nie iba čo do veľkosti, ale aj čo do smeru. Vo výške h nad zemským povrchom je intenzita menšia:

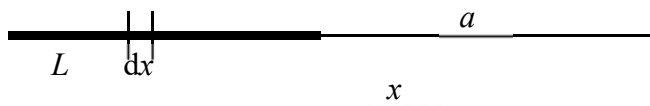
$$E = \frac{F_g}{m} = \frac{1}{m} G \frac{mM}{(R+h)^2} = G \frac{M}{(R+h)^2} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{(R+h)^2} = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

Pomocou tohto vzťahu sa dá vypočítať závislosť gravitačného zrýchlenia od nadmorskej výšky. Niektoré hodnoty sú uvedené v nasledujúcej tabuľke. Posledný stĺpec tabuľky zodpovedá vzdialenosti Mesiaca od Zeme.

h (km)	0	1	8	32	100	500	380 000
g (m/s^2)	9,806	9,803	9,782	9,709	9,507	8,436	0,00278

Príklad 5.1.5.1 Vypočítajte intenzitu gravitačného poľa v predĺžení tenkej tyče (hmotnosť tyče m , dĺžka L) vo vzdialenosti a od jej konca.

Riešenie:



$$E = \int_a^{a+L} G \frac{dm}{x^2} = G \frac{m}{L} \int_a^{a+L} \frac{dx}{x^2} = -G \frac{m}{L} \left(\frac{1}{a+L} - \frac{1}{a} \right) = G \frac{m}{a(a+L)}.$$

Všimnime si, že pre veľké vzdialenosti, t. j. ak $L \ll a$, vzťah nadobúda tvar, ako keby tyč bola bodovým telesom.

Potenciál gravitačného poľa (značka φ) v okolí telesa s hmotnosťou M sa definuje ako podiel vzájomnej potenciálnej energie W_p tohto telesa so skúšobným telieskom s hmotnosťou m , nachádzajúcim sa od neho v istej vzdialenosti a hmotnosti skúšobného telieska:

$$\varphi = \frac{W_p}{m}. \quad (5.1.5.6)$$

V prípade bodového telesa alebo telesa s guľovou symetriou, vychádzajúc zo vzťahu (5.1.4.3), dostaneme:

$$\varphi = \frac{1}{m} \left(-G \frac{mM}{r} \right) = -G \frac{M}{r}. \quad (5.1.5.7)$$

Jednotkou potenciálu gravitačného poľa (gravitačného potenciálu) je joule na kilogram (J/kg).

Podobne, ako v prípade intenzity, aj potenciál v okolí väčších telies sa počíta integráciou:

$$\varphi = -G \int \frac{dM}{r}, \quad (5.1.5.8)$$

pričom r predstavuje vzdialenosť hmotného elementu dM od miesta, v ktorom potenciál počítame.

Medzi intenzitou a potenciálom gravitačného poľa (ale aj iných polí) platia vzťahy

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \varphi \quad \text{a} \quad \varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}, \quad (5.1.5.9)$$

ktoré budú podrobne zdôvodnené až v kapitole o elektrostatickom poli.

Príklad 5.1.5.2 Vypočítajte potenciál gravitačného poľa tenkej homogénnej tyče na priamke, ktorá je jej predĺžením (hmotnosť tyče M , dĺžka L), vo vzdialenosti b od jej konca.

Riešenie: S pomocou obrázku z príkladu 5.1.5.1 pre potenciál dostaneme:

$$\varphi = - \int_b^{b+L} G \frac{M}{L} \frac{dx}{x} = -G \frac{M}{L} \ln \frac{b+L}{b}$$

Kontrolné otázky

1. Čo rozumieme pod gravitačným poľom?
2. Ako je definovaná intenzita gravitačného poľa?
3. Aký fyzikálny rozmer má intenzita gravitačného poľa?
4. Ako sa počíta intenzita gravitačného poľa, ak pole je generované viacerými telesami?
5. Ako je definovaný potenciál gravitačného poľa?

5.1.6 Kozmické rýchlosti, geostacionárna družica

Keď vodorovným smerom hodíme kameň, v istej vzdialenosti od nás dopadne na zem. Čím väčšou rýchlosťou kameň hodíme, tým ďalej od nás dopadne. Keby sme ho dokázali hodiť rýchlosťou blízkou hodnote 8 km/s, nedopadol by, ale obiehal by okolo Zeme. Táto rýchlosť má názov **prvá kozmická rýchlosť**. Je to teda rýchlosť, ktorú musíme udeliť telesu vo vodorovnom smere, aby trvale obiehalo okolo Zeme (pravda – keby okolo Zeme nebol vzduch, ktorý kladie odpor pohybu telesa).

Veľkosť tejto rýchlosti vypočítame zo vzťahu vyjadrujúceho skutočnosť, že dostredivá sila pri obiehaní po kružnici (s polomerom Zeme R) je realizovaná gravitačnou príťažlivou silou medzi Zemou a telesom (družicou):

$$m \frac{v_1^2}{R} = G \frac{mM}{R^2} = g_o m, \quad (5.1.6.1)$$

kde m je hmotnosť telesa, M hmotnosť Zeme, a g_o gravitačné zrýchlenie tesne nad povrchom Zeme. Zo vzťahu vypočítame prvú kozmickú rýchlosť tesne nad povrchom Zeme:

$$v_1^2 = \sqrt{g_o R} = 7,9 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

Ak teleso (družica) obieha vo výške h nad povrchom Zeme, vtedy rovnicu (5.1.6.1) treba upraviť na tvar:

$$m \frac{v_1^2}{R+h} = G \frac{mM}{(R+h)^2},$$

odkiaľ pre prvú kozmickú rýchlosť vo výške h dostaneme:

$$v_1^2 = G \frac{M}{R+h} = G \frac{M}{R^2} \frac{R^2}{R+h} = g_o \frac{R^2}{R+h}. \quad (5.1.6.2)$$

S rastúcou nadmorskou výškou sa teda prvá kozmická rýchlosť znižuje, čo sa prejavuje aj na obežných rýchlostiach družíc.

Rýchlosť, ktorú treba na zemskom povrchu udeliť telesu vo vertikálnom smere aby sa na Zem už nevrátilo, sa nazýva **druhá kozmická rýchlosť**. Jej veľkosť získame uplatnením zákona zachovania mechanickej energie. Teleso má na povrchu Zeme istú gravitačnú potenciálnu energiu, ku ktorej pri vystrelení zvislým smerom pribudne kinetická energia. Tá sa pri pohybe nahor postupne mení na potenciálnu energiu. Minimálna kinetická energia udelená telesu musí byť taká, aby sa ďaleko od Zeme (teoreticky nekonečne ďaleko), celá spotrebovala na potenciálnu energiu. Ak sa nekonečne ďaleko teleso aj zastaví, už sa na Zem nevráti. Vzájomná gravitačná potenciálna energia Zeme a telesa, ak sú od seba nekonečne vzdialené, podľa vzťahu (5.1.4.3) sa rovná nule. Podľa zákona zachovania mechanickej energie platí:

$$W_p(R) + W_k(R) = W_p(\infty) + W_k(\infty),$$

a tak po dosadení konkrétnych hodnôt energií získame vzťah:

$$-G \frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_{II}^2 = 0 + 0,$$

z ktorého pre druhú kozmickú rýchlosť vychádza hodnota:

$$v_{II}^2 = 2G \frac{M}{R} = 2G \frac{MR}{R^2} = 2g_o R \Rightarrow v_{II} = \sqrt{2g_o R} \cong 11,2 \text{ km/s}.$$

Pri výpočte sme nebrali do úvahy odpor vzduchu, takže hodnota druhej kozmickej rýchlosti 11,2 km/s by bola správna len vo vákuu. Keďže teleso s takouto rýchlosťou by sa už na Zem nevrátilo, nazýva sa aj **úniková rýchlosť**, a používa sa v súvislosti s rýchlosťami molekúl v atmosfére. Časť týchto molekúl, v súlade s Maxwellovou distribučnou funkciou, má rýchlosť väčšiu. Avšak na to, aby z atmosféry naozaj unikli, musel by vektor ich rýchlosti smerovať od zemského povrchu a nesmeli by sa už zraziť s pomalšou molekulou, aby nestratili časť svojej energie.

Špeciálnym prípadom družice pohybujúcej sa prvou kozmickou rýchlosťou je **geostacionárna družica**. Vyznačuje sa tým, že „stojí“ nad jedným miestom zemského povrchu. Takáto družica musí obiehať v rovine zemského rovníka a v takej výške, aby sa jej obežná doba zhodovala s dobou otočenia Zeme o 360°. Jej uhlová rýchlosť sa preto musí zhodovať s uhlovou rýchlosťou rotácie Zeme

$$\omega = \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \left(\frac{2\pi}{86\,400} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

a jej obvodová rýchlosť má preto hodnotu $v_1 = (R + h)\omega$. V spojení so vzťahom (5.1.6.2) dostaneme rovnosť:

$$\omega^2 (R + h)^2 = g_o \frac{R^2}{R + h}.$$

Odtiaľto už možno vypočítať výšku h , pre ktorú vychádza $h = 35\,954,4$ km. To je takmer šesť zemských polomerov.

Príklad 5.1.6.1 Vypočítajte obvodovú rýchlosť modulu, ktorý sa pohyboval blízko povrchu Mesiaca pri prvom pristátí kozmonautov na tomto telese. Hmotnosť Mesiaca $m = 7,36 \cdot 10^{22}$ kg, jeho polomer $R = 1,74 \cdot 10^6$ m.

Riešenie: Pomocou vzťahu (5.1.6.1) vypočítame prvú kozmickú rýchlosť tesne nad povrchom Mesiaca:

$$v_1 = \sqrt{G \frac{m}{R}} = 1580 \text{ m/s}.$$

Kontrolné otázky

1. Ako je definovaná prvá kozmická rýchlosť?
2. Ako je definovaná druhá kozmická rýchlosť?
3. Aké vlastnosti musí spĺňať geostacionárna družica?

5.2 Hydromechanika

Hydromechanika sa zaoberá pohybom tekutín (t. j. kvapalín a plynov), závislosťou tlaku v tekutinách od miesta a od rýchlosti prúdenia. Tekutiny sa vyznačujú nestálosťou tvaru, čo priamo ovplyvňuje naše zaobchádzanie s nimi v bežnom živote i v rámci fyzikálneho opisu. Nestálosť tvaru – na rozdiel od tuhého telesa – neumožňuje vyjadriť polohu či pohyb tekutiny pomocou jediného polohového vektora (napr. ťažiska) a uhlov natočenia. Ich opis je založený na sledovaní malých hmotných elementov, ako sa každý z nich pohybuje, aké sily naň pôsobia. Postupne sa oboznámime s opisom silového pôsobenia tlaku, gravitácie a viskozity v tekutinách. Pohyb hmotných elementov tekutiny opisujeme pomocou vektorového poľa rýchlosti, z ktorého vieme získať prakticky užitočné veličiny ako sú toky objemu a hmotnosti. Vychádzajúc z Newtonových pohybových zákonov nájdeme Bernoulliho rovnicu, pomocou ktorej sú vysvetlené fyzikálne princípy niektorých technických aplikácií využívajúcich prúdiacu kvapalinu, a to v laminárnom aj v turbulentnom režime. V dodatku sú odvodené základné rovnice hydrodynamiky všeobecnejším postupom, využívajúcim náročnejší matematický aparát.

5.2.1 Tlak v tekutinách

Tlak je skalárna fyzikálna veličina (označuje sa písmenom p), definovaná ako podiel veľkosti sily F a plošného obsahu S plochy, na ktorú sila kolmo pôsobí:

$$p = \frac{F}{S}. \quad (5.2.1.1)$$

Týmto vzťahom je určená aj jednotka tlaku – newton na štvorcový meter (N/m^2), ktorá má osobitný názov **pascal** a značku Pa:

$$[p] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2} = \text{Pa}. \quad (5.2.1.2)$$

Z praktického hľadiska je to pomerne malá jednotka, lebo predstavuje iba 10^{-5} časť bežného atmosférického tlaku pri morskej hladine. Preto sa môže používať aj medzinárodne akceptovaná jednotka s názvom (aj značkou) **bar**, pre ktorú platí vzťah:

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}.$$

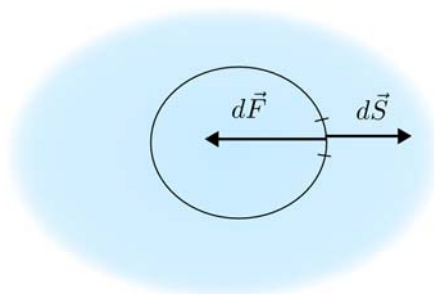
Pri meraní krvného tlaku sa používa jednotka **milimeter ortuťového stĺpca** (mmHg), čo bola historicky prvá jednotka na meranie tlaku, ktorá pochádza ešte z Torricelliho čias (E. Torricelli 1608 – 1647). Predstavuje tlak vyvolaný tiažou ortuťového stĺpca s výškou 1 mm, teplotou 0°C a pri štandardnom tiažovom zrýchlení $9,806 \text{ m/s}^2$. Vo vzťahu k jednotke pascal: $1 \text{ mmHg} = 133,322 \text{ Pa}$.

Ak poznáme v kvapaline pôsobiaci tlak, tak pomocou neho dokážeme vypočítať silu pôsobiacu na ľubovoľnú plochu veľkosti S pomocou súčinu:

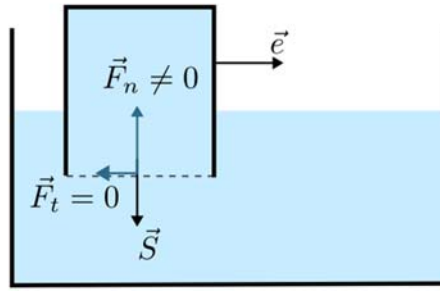
$$F = pS. \quad (5.2.1.3)$$

Tlak môže mať v rôznych miestach kvapaliny rôzne hodnoty, vo všeobecnosti je funkciou polohy, t. j. polohového vektora $\vec{r}$: $p(\vec{r})$. Pritom však zmena tlaku v ľubovoľnom mieste kvapaliny vyvolá rovnakú zmenu vo všetkých ostatných miestach uvažovanej kvapaliny. Tento experimentálne zistený fakt sa nazýva **Pascalov zákon** (pozri tiež dodatok D1).

Tlak v danom mieste kvapaliny pôsobí rovnako na ľubovoľne orientovanú rovinnú plôšku, ale sila ako vektorová veličina vyvolaná tlakom kvapaliny má nielen veľkosť, ale aj určitý smer a pôsobisko. Zaužívaná je dohoda, podľa ktorej sa vektoru reprezentujúcemu veľkosť a orientáciu malej plôšky, ktorá je súčasťou uzavretej plochy, prisudzuje smer zásadne z vnútra plochy von (Obr. 5.2.1.1). Keď diferenciálne malej



Obr. 5.2.1.1



Obr. 5.2.1.2 Na myslenú plochu S (naznačenú čiarkovane) uzatvárajúcu vodu v pohári, pôsobí normálová sila $\vec{F}_n$ vyvolaná tlakom kvapaliny nachádzajúcej sa pod plochou; je to vztlaková sila pôsobiaca na vodu naplňujúcu obrátený pohár. Ak pohár posúvame dostatočne pomaly v smere jednotkového vektora $\vec{e}$, t. j. rovnobežne s rovinou plochy S , kvapalina nekladie odpor proti tomuto pohybu – naznačená tangenciálna sila $\vec{F}_t$ je nulová. Je to prejav nestálosti tvaru kvapaliny.

plôške ako časti uzavretej plochy priradíme vektor $d\vec{S}$, a keď pod silou $d\vec{F}$ budeme rozumieť silu pôsobiacu na kvapalinu uzavretú v tejto ploche, potom vzťah (5.2.1.3) môžeme napísať vo vektorovom tvare so znamienkom mínus:

$$d\vec{F} = -p d\vec{S}, \quad (5.2.1.4)$$

lebo príslušné vektory majú opačný smer. Po zvážení skutočnosti, že tlak závisí od polohy v kvapaline, tento vzťah nadobudne tvar:

$$d\vec{F} = -p(\vec{r}) d\vec{S}. \quad (5.2.1.5)$$

Sila pôsobiaca na plôšku v kvapaline môže mať vo všeobecnosti dve zložky: **normálovú**, kolmú na plôšku a **tangenciálnu**, rovnobežnú s rovinou plôšky. Ukazuje sa, že v kvapaline nachádzajúcej sa v pokoji, sú tangenciálne zložky nulové (Obr. 5.2.1.2), čo priamo súvisí s nestálosťou tvaru kvapalín.

Pri hydromechanických úvahách sa zvyčajne zameriavame na určité malé množstvo kvapaliny – **hmotný element kvapaliny**, ktorému prisudzujeme polohu vyznačenú polohovým vektorom $\vec{r}$ a objem V ohraničený uzavretou plochou S . Túto plochu dokážeme vyskladať z malých elementárnych plôšok $d\vec{S}$, takže celkovú tlakovú silu pôsobiacu na vybraný element kvapaliny vyjadríme ako plošný integrál cez celú uzavretú plochu:

$$\vec{F} = -\oint p(\vec{r}) d\vec{S}. \quad (5.2.1.6)$$

Keby bol tlak $p(\vec{r})$ vo všetkých miestach kvapaliny rovnaký, tento integrál by sa rovnal nule, lebo na protiľahlých stranách elementu kvapaliny by pôsobili rovnako veľké, ale opačne orientované sily. To by mohlo nastať v beztlakovom stave, ale v nenulovom

gravitačnom poli alebo v odstredivke tlak závisí od polohy v kvapaline, a teda celková tlaková sila pôsobiaca na element vo všeobecnosti nie je nulová.

Kontrolné otázky

1. Ako je definovaný tlak v tekutine?
2. Je tlak skalárna, alebo vektorová veličina?
3. Ktoré ďalšie jednotky tlaku poznáte?
4. Čo hovorí Pascalov zákon?
5. Ako zavádzame orientáciu vektora malej plôšky?
6. Nech v mieste $\vec{r}$ pôsobí tlak $p(\vec{r})$ v kvapaline. V akom smere pôsobí sila?

5.2.2 Hustota

Hustota telesa ako fyzikálna veličina (značka ρ), je definovaná podielom hmotnosti m a objemu V telesa:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (5.2.2.1)$$

Z tohto vzťahu vyplýva aj jednotka hustoty – kilogram na kubický meter (kg/m^3).

Ak poznáme hustotu telesa, tak pomocou objemu dokážeme vypočítať jeho hmotnosť, resp. pomocou známej hmotnosti jeho objem, využívúc definičný vzťah hustoty.

Aj keď sa celková hmotnosť daného množstva látky nemení, jej hustota sa meniť môže, ak sa látka rozpína či stláča a tak zaberá rôzny objem. Z experimentov je známe, že objem daného množstva kvapaliny sa mení pri zmene tlaku p alebo teploty θ , t. j. objem je funkciou tlaku aj teploty: $V(p, \theta)$. Táto závislosť je vo všeobecnosti nelineárna, ale ak ide o približný výpočet, možno použiť jej lineárny rozvoj v okolí vybraného referenčného tlaku a referenčnej teploty. V praxi sa ako referenčný používa normálny atmosférický tlak $p_a = 101\,325 \text{ Pa}$, ktorý zodpovedá atmosférickému tlaku na úrovni hladiny mora. Pre referenčnú teplotu sú zaužívané viaceré hodnoty, napr. v chémii je to často teplota prostredia $\theta_o = 25^\circ\text{C}$.

Lineárny rozvoj v okolí referenčných hodnôt tlaku a teploty má tvar:

$$V(p, \theta) = V(p_a, \theta_o)[1 - \kappa(p - p_a) + \beta(\theta - \theta_o)] \quad (5.2.2.2)$$

alebo zjednodušene:

$$\Delta V = -V\kappa\Delta p + V\beta\Delta\theta, \quad (5.2.2.3)$$

kde

$$\kappa = -\frac{1}{V} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta p} \right)_{\Delta \theta = 0} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right) \quad (5.2.2.4)$$

je **koeficient objemovej stlačiteľnosti** a

$$\beta = \frac{1}{V} \lim_{\Delta \theta \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta V}{\Delta \theta} \right)_{\Delta p = 0} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \quad (5.2.2.5)$$

je **koeficient objemovej roztlačnosti**. Vo vzťahoch (5.2.2.4) a (5.2.2.5) sa používajú parciálne derivácie $\partial V/\partial p$, resp. $\partial V/\partial \theta$, lebo objem je funkciou dvoch premenných, pričom pri uvedených zmenách sa predpokladá, že sa mení len jedna z premenných, druhá je konštantná. Dosadením vzťahov (5.2.2.4) a (5.2.2.5) do (5.2.2.3) nájdeme matematický zápis pre úplný diferenciál objemu, t. j. vyjadrenie pre celkovú zmenu objemu, ak sa málo menia tlak a teplota od referenčných hodnôt:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial p} dp + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta. \quad (5.2.2.6)$$

Objem V vo vzťahoch (5.2.2.4 – 5.2.2.5) má význam objemu v referenčnom stave. V týchto vzťahoch vystupuje v menovateli, čo znamená, že príslušné zmeny objemu – $\partial V/\partial p$, resp. $\partial V/\partial \theta$, sa prepočítavajú na jednotku objemu. Objem je extenzívna veličina, rastúca s množstvom, kým koeficienty charakterizujúce materiál sú od jeho množstva nezávislé (sú uvádzané v špecializovaných tabuľkách). Treba poznamenať, že hodnoty koeficientov závisia aj od referenčných hodnôt tlaku a teploty.

Zo závislosti objemu vybraného množstva kvapaliny od tlaku a teploty dokážeme nájsť aj závislosť hustoty od týchto veličín, vychádzajúc z hmotnosti, ktorá sa pri zmene tlaku a teploty nemení:

$$m = \rho(p, \theta) V(p, \theta) = \rho_o V_o$$

$$m = (\rho_o + B\Delta p + C\Delta \theta)(V_o - V_o\kappa\Delta p + V_o\beta\Delta \theta)$$

$$0 = \Delta p(BV_o - \rho_o V_o\kappa) + \Delta \theta(CV_o + \rho_o V_o\beta) + \dots$$

pričom v poslednom vzťahu boli zanedbané členy úmerné súčinu dvoch malých čísiel Δp , a $\Delta \theta$. Aby posledná rovnica platila pre rôzne, ale malé zmeny tlaku a teploty, musí platiť:

$$B = \rho_o\kappa \text{ a } C = -\rho_o\beta,$$

t. j.

$$\Delta \rho = \rho_o\kappa\Delta p - \rho_o\beta\Delta \theta.$$

Podľa tejto rovnice možno použiť koeficienty objemovej stlačiteľnosti a teplotnej roztlačnosti aj pri výpočte zmeny hustoty $\Delta \rho$ pri zmene tlaku a/alebo teploty.

K rovnakému výsledku by sme prišli pomocou formálnych pravidiel o derivovaní, napr.:

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{m}{V(p, \theta)} \right) = -\frac{m}{V^2} \frac{\partial V}{\partial p} = \rho \kappa.$$

Pri riešení statiky a dynamiky kvapalín sa stretávame s problémami, keď sú teplota a/alebo tlak v rôznych miestach kvapaliny rôzne. Vtedy hustotu vyjadrujeme ako funkciu polohového vektora:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(p(\vec{r}), \theta(\vec{r})).$$

Integrovaním takejto hustoty cez celý objem V vybranej kvapaliny získame jej hmotnosť:

$$m_V = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV. \quad (5.2.2.7)$$

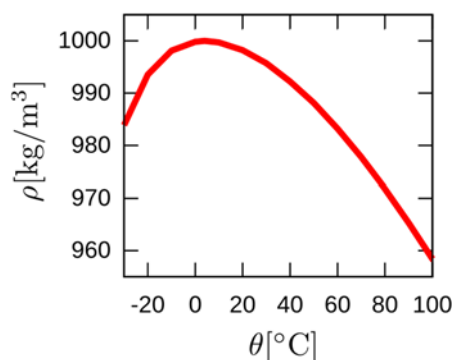
Príklad 5.2.2.1 Koeficient objemovej roztlačnosti vody pri atmosférickom tlaku a teplote 20 °C je $\kappa = 4,7 \times 10^{-10} \text{Pa}^{-1}$. Ak sa zvýši tlak pôsobiaci na vodu o 10-násobok atmosférického tlaku, $\Delta p = 10p_a = 10 \times 101 \text{ kPa} \cong 10^6 \text{Pa}$, relatívna zmena objemu bude:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \Delta p = -4,7 \times 10^{-4} \approx 0,05\%$$

Vodu teda môžeme pri bežných kolísaniach tlaku považovať za nestlačiteľnú. Koeficient teplotnej roztlačnosti vody pri 20 °C a atmosférickom tlaku má hodnotu $\beta = 2,0 \times 10^{-4} \text{K}^{-1}$. Relatívna zmena objemu vody pri zohriatí o $\Delta \theta = 30 \text{ °C}$ bude:

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta \Delta \theta = 2,0 \times 10^{-4} \times 30 \approx 0,6 \%$$

Z uvedených príkladov vidieť, že na objem vody má zmena teploty väčší vplyv ako zmena tlaku. V skutočnosti je závislosť objemu a tým aj hustoty od teploty pri atmosférickom tlaku nelineárna, s minimom pri $\theta = 4 \text{ °C}$ (Obr. 5.2.2.1). Zmena hustoty kvapaliny vyvolaná zmenou teploty je dôležitá pri vzniku prirodzeného prúdenia; napríklad pri ohreve vody v hrnci.



Obr. 5.2.2.1 Hustota vody pri rôznych teplotách a pri atmosférickom tlaku. Hustota vody pri 4 °C je vyššia ako pri bode mrazu, tento rozdiel je však len 0,02 %!

Príklad 5.2.2.2 Teplota, objem a tlak plynov spĺňajú s dobrou presnosťou stavovú rovnicu ideálneho plynu:

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množstvo plynu, T je termodynamická teplota meraná v kelvinoch ($[T] = \text{K}$), súvisiaca s Celziovou teplotou θ pomocou vzťahu $T = \theta + 273,15$ a $R = 8,314 \text{ J/K}$ je molárna plynová konštanta. Nájdite koeficienty objemovej stlačiteľnosti a rozpínavosti vzduchu v štandardnom stave, t. j. pri $p_a = 101 \text{ kPa}$ a $\theta_o = 25^\circ \text{C}$.

Riešenie: Podľa (5.2.2.4):

$$\kappa = -\frac{1}{V_o} \frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{p_a}{nRT_o} \left(\frac{\partial}{\partial p} \frac{nRT_o}{p} \right)_{p=p_a} = \frac{1}{p_a} \approx 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$$

a podľa (5.2.2.5):

$$\beta = \frac{1}{V_o} \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{p_a}{nRT_o} \left(\frac{\partial}{\partial T} \frac{nRT}{p} \right)_{T=T_o} = \frac{1}{T_o} \approx 3,4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

Vidíme, že v porovnaní s vodou je vzduch asi 10-krát teplotne rozpínavejší a 100 000-krát stlačiteľnejší.

Kontrolné otázky

1. Na akej najmensej vzdialenosti má ešte význam uvažovať zmenu hustoty tekutiny ako funkcie polohy?
2. Aká je fyzikálna jednotka koeficientu objemovej stlačiteľnosti?
3. Prečo je v definícii koeficientu objemovej stlačiteľnosti znamienko mínus a prečo v definícii koeficientu teplotnej rozťažnosti nie je?
4. Načo je užitočná voľba referenčnej teploty a tlaku?
5. Vymenujte aspoň štyri bežné tekutiny a uveďte aké sú ich hustoty vo vami vybranom referenčnom stave.

5.2.3 Hydrostatický tlak

Zo skúsenosti vieme, že s rastúcou hĺbkou pod hladinou vody tlak rastie, alebo že tlak vzduchu klesá s rastúcou nadmorskou výškou. V oboch prípadoch je táto zmena tlaku spôsobená gravitačným poľom Zeme.

Uvažujme nehybný element kvapaliny, ktorý má tvar kvádra s veľkosťou postavy S , výškou Δz , a teda má objem $V = S\Delta z$. Kvapalina sa nachádza v homogénnom gravitačnom poli a vertikálna súradnica polohy elementu je určená osou z , orientovanou proti smeru gravitačného zrýchlenia. Súčet všetkých síl pôsobiacich na tento nehybný element je podľa druhého Newtonovho zákona nulový. Predpokladajme, že tlak pri dolnej podstave elementu je $p(z)$ a pri hornej podstave elementu je $p(z + \Delta z)$. Potom súčet tlakových síl a gravitačnej sily pôsobiacich na element v smere osi z môžeme vyjadriť vzt'ahom:

$$F_z = S p(z) - S p(z + \Delta z) - \rho S \Delta z g = 0.$$

Jeho úpravou nájdeme vzt'ah pre prírastok tlaku v kvapaline pri náraste súradnice z :

$$\frac{\Delta p}{\Delta z} = -\rho g. \quad (5.2.3.1)$$

V prípade stlačiteľnej kvapaliny nie je hustota v celom objeme kvapaliny rovnaká, a preto musíme uvažovať len s malým elementom objemu, $\Delta z \rightarrow 0$. V limite nájdeme rovnicu na výpočet hydrostatického tlaku v kvapaline vo všeobecnosti:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g. \quad (5.2.3.2)$$

Jej integrovaním možno získať závislosť hydrostatického tlaku od súradnice v celom objeme kvapaliny.

Bežné kvapaliny sú len málo stlačiteľné ($\rightarrow$ príklad 5.2.2.1), takže ich hustota sa s tlakom mení len zanedbateľne. Inak je to pri plynach, napríklad so vzduchom, ktorého tlak a tým aj hustota s nadmorskou výškou klesá. Výpočet závislosti tlaku a hustoty vzduchu od nadmorskej výšky je uvedený v kapitole Termodynamike, článok 7.2.3.

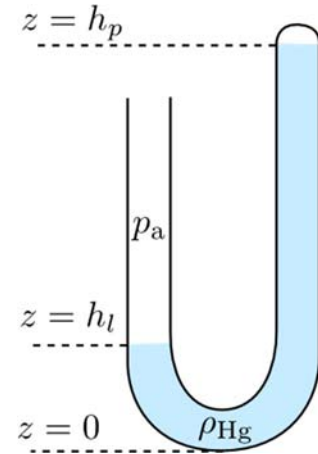
Príklad 5.2.3.1 Odhadneme výšku atmosféry Zeme za predpokladu, že hustota vzduchu je konštantná: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$. Integrovaním rovnice (1.36) medzi nulovou nadmorskou výškou, kde je štandardný atmosférický tlak p_a a výškou h , kde atmosféra končí a tlak je nulový, nájdeme:

$$\int_0^h \frac{dp}{dz} dz = -\rho g \int_0^h dz \rightarrow 0 - p_a = -\rho g h$$

$$\rightarrow h = \frac{p_a}{\rho g} \approx \frac{10^5}{1 \times 10} = 10 \text{ km}.$$

Troposféra, najnižšia časť atmosféry, ktorá obsahuje asi 80% hmotnosti atmosféry, má približne takúto výšku.

Príklad 5.2.3.2 Tlak vzduchu v rôznych nadmorských výškach môžeme merať pomocou hydrostatického tlaku ortuti v tzv. ortuťovom manometri (Obr. 5.2.3.1). V pravom zatavenom ramene manometra, nad hladinou ortuti, je prakticky vákuum, takže je tam nulový tlak. Preto tam na hladinu ortuti nepôsobí tlaková sila. Ľavé rameno je otvorené, pôsobí naň tlak vzduchu a tak pretlačí časť ortuti z ľavého ramena do pravého. Na dne manometra (priradíme mu výškovú súradnicu $z = 0$), musí byť v ustálenom stave tlak vyvolaný ľavým stĺpcom rovnaký, ako tlak vyvolaný pravým stĺpcom – tlak v danom mieste kvapaliny nezávisí od smeru.



Obr. 5.2.3.1

Tlak na dne pravého ramena je určený len výškou h_p pravého ortuťového stĺpca; integrovaním rovnice (5.2.3.2) nájdeme:

$$p(h_p) - p(0) = - \int_0^{h_p} \rho_{\text{Hg}} g dz \rightarrow p(0) = \rho_{\text{Hg}} h_p g.$$

Tlak na dne ľavého ramena je súčtom tlaku vzduchu a tlaku vyvolaného výškou h_l ľavého ortuťového stĺpca, čo nájdeme integrovaním vzťahu (5.2.3.2) v ľavej časti manometra:

$$p_a - p(0) = - \int_0^{h_l} \rho_{\text{Hg}} g dz \rightarrow p(0) = p_a + \rho_{\text{Hg}} h_l g.$$

Z podmienky rovnosti tlakov $p(0)$ získame rovnicu:

$$p_a + \rho_{\text{Hg}} h_l g = \rho_{\text{Hg}} h_p g$$

a z nej meranú hodnotu atmosférického tlaku p_a :

$$p_a = \rho_{\text{Hg}} g (h_p - h_l).$$

Ak dosadíme hustotu ortuti, tiažové zrýchlenie a ak rozdiel hladín ortuti meraný v takomto experimente dosiahne hodnotu $(h_p - h_l) = 760 \text{ mm}$, nájdeme výsledok pre normálny atmosférický tlak:

$$p_a = 13,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \times 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \times 0,76 \text{ m} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Príklad 5.2.3.3 Nech v hĺbke $h = 3 \text{ m}$ sa na vertikálnej stene vodného rezervoáru nachádza horná hrana štvorcového otvoru s dĺžkou hrany $l = 0,1 \text{ m}$. Ak je otvor privretý príklopom, akou silou naň pôsobí hydrostatický tlak vody v nádrži?

Riešenie Ak si označíme ako $z = 0$ výškovú súradnicu spodnej hrany otvoru, potom sa tlak vyjadruje vzťahom:

$$p(z) = p(0) - zg\rho, \quad p(0) = (h + l)g\rho$$

Celkovú silu pôsobiacu na plochu otvoru nájdeme spočítaním príspevkov k tejto sile z rôznych hĺbok:

$$\begin{aligned} F &= \int p(z) dS = \int_0^l p(z) l \, dz = (h + l)g\rho l^2 - (1/2)l^3 g\rho = \\ &= (h + l/2)l^2 g\rho = (3 + 0,05) \times (0,1)^2 \times 1000 \times 9,81 \text{ N} = 300 \text{ N}. \end{aligned}$$

Kontrolné otázky

1. Čo je to hydrostatický tlak?
2. Ako sa počíta tlak kvapaliny na dno nádoby?
3. V akej hĺbke pod hladinou mora je tlak rovný dvojnásobku atmosférického tlaku?

5.2.4 Vztlačková sila

Na teleso ponorené do kvapaliny pôsobí okrem tiažovej sily, určenej jeho hmotnosťou, aj sila vztlačková, spôsobená rozdielnym tlakom kvapaliny pôsobiacim na teleso na rôznych častiach jeho povrchu. Pretože vo väčšej hĺbke je tlak väčší, výslednica pôsobiacich tlakových síl, t. j. **vztlačková sila**, pôsobí smerom nahor, a kompenzuje aspoň časť tiažovej sily – teleso je nadľahčované.

Uvažujme teleso s hmotnosťou m a polohovým vektorom jeho ťažiska $\vec{r}$ čiastočne ponorené v kvapaline. Hydrostatický tlak v kvapaline závisí od hĺbky z pod hladinou podľa vzťahu:

$$p(z) = \rho_l g z, \quad (5.2.4.1)$$

kde ρ_l je hustota kvapaliny, g tiažové zrýchlenie. Na malý plošný element $d\vec{S}$ povrchu telesa pôsobí sila $d\vec{F} = -p d\vec{S}$, a teda celková vztlačková sila sa vyjadří vzťahom:

$$\vec{F}_{vz} = - \oint_S p(z) d\vec{S}, \quad (5.2.4.2)$$

kde integrujeme cez celý ponorený povrch telesa.

Výsledok integrálu možno získať nasledovnou úvahou: ak by sme ponorenú časť telesa objemu V_l nahradili príslušným množstvom kvapaliny, bola by táto kvapalina v pokoji, a teda celkový súčet síl pôsobiacych na ňu by bol nulový. Tiažová sila pôsobiaca na túto kvapalinu je vyjadrená vzťahom:

$$\vec{F}_{gl} = V_l \rho_l \vec{g} \quad (5.2.4.3)$$

a vztlaková sila je rovnaká ako sila pôsobiaca na pôvodne uvažované teleso (5.2.4.2), takže z podmienky rovnováhy síl vyplýva:

$$\vec{F}_{vz} + \vec{F}_{gl} = 0 \rightarrow \vec{F}_{vz} = -V_l \rho_l \vec{g} \quad (5.2.4.4)$$

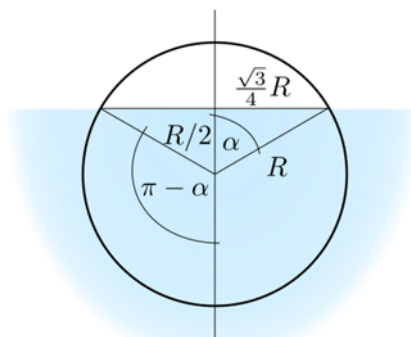
Ponorenú časť objemu telesa V_l nazývame aj **objem vytlačenej kvapaliny**. Posledný vzťah sa používa na výpočet vztlakovej sily pôsobiacej na ponorené teleso a predstavuje matematickú formuláciu Archimedovho zákona.

Príklad 5.2.4.1 Guľatina (priamy kmeň stromu s kruhovým prierezom) pláva po hladine tak, že je tromi štvrtinami svojho priemeru ponorená pod vodnou hladinou. Ak hustota suchého dreva je $\rho_0 = 450 \text{ kg} \cdot \text{m}^3$, koľko percent jeho aktuálnej hmotnosti tvorí nasiaknutá voda? (Predpokladáme, že plaviace sa drevo je rovnomerne nasiaknuté vodou v celkom svojom objeme.)

Riešenie: Najprv z ponoru nájdeme hustotu nasiaknutého dreva. Ak $S = \pi R^2$ je prierez stromu, potom prierez S_V ponorenej plochy nájdeme z geometrie (Obr. 5.2.4.1), ako súčet plôch dvoch kruhových výsekov s uhlom $\pi - \alpha$ a plochy dvoch trojuholníkov:

$$\alpha = \arccos(1/2) = \pi/3$$

$$S_V = 2 \left(\frac{(2/3)\pi}{2\pi} \pi R^2 + \frac{\sqrt{3}}{8} R^2 \right) = \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) R^2$$



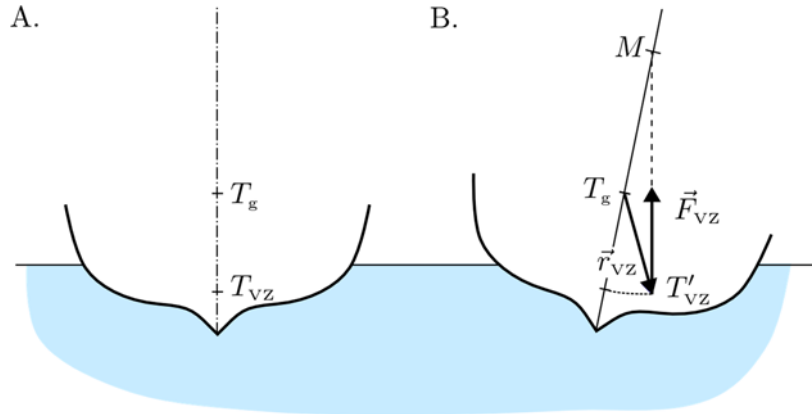
Obr. 5.2.4.1

Pri plávaní sú tiažová a vztlaková sila vyrovnané, preto:

$$\rho_V S_V l = \rho S l \rightarrow \rho = \rho_V \frac{S_V}{S} = \rho_V \left(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right) = v \rho_V, \quad v \approx 0,8.$$

Nakoniec percento p vlhkosti dreva určíme pomocou hmotností nasiaknutého (m) a suchého (m_0) dreva:

$$p = \frac{m - m_0}{m} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} = 1 - \frac{\rho_0}{v \rho_V} = 44 \, \%.$$



Obr. 5.2.4.1 (A) Keď je loď v rovnovážnej polohe nie len jej ťažisko T_g , ale aj ťažisko vytlačenej kvapaliny T_{vz} na osi symetrie lode. (B) Pri jej vychýlení je pre stabilitu dôležité, aby moment vztlakovej sily vzhľadom na ťažisko lode $\vec{M} = \vec{r}_{vz} \times \vec{F}_{vz}$ otáčal loď späť do rovnovážnej polohy.

Podmienkou rovnováhy telesa je popri nulovom súčte síl, aj nulový súčet momentov síl pôsobiacich na teleso. Moment vztlakovej sily $\vec{M}$ vzhľadom na ťažisko ponoreného telesa je daný vzt'ahom:

$$\vec{M} = \oint_S \vec{r} \times d\vec{F} \quad (5.2.4.5)$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor plošného elementu $d\vec{S}$ vzhľadom na ťažisko ponoreného telesa, a $d\vec{F} = -p(\vec{r})d\vec{S}$ je sila, ktorou pôsobí okolitá kvapalina na plošku povrchu ponoreného telesa. Vzt'ah (5.2.4.5) možno opäť vyjadriť len pomocou celkovej vztlakovej sily a polohového vektora $\vec{r}_{vz}$ ťažiska T'_{vz} vytlačenej kvapaliny, vyjadreného vzhľadom na ťažisko ponoreného telesa T_g v tvare $\vec{M} = \vec{r}_{vz} \times \vec{F}_{vz}$. O tomto sa presvedčíme ak uvažíme, že moment vztlakovej sily pôsobiacej na kvapalinu, nahradenej ponoreným telesom, ktorý je definovaný vzhľadom na jej ťažisko, bol nulový, t. j.:

$$-\oint_S (\vec{r} - \vec{r}_{vz}) \times p(\vec{r})d\vec{S} = 0 \quad (5.2.4.6)$$

Pomocou identity (5.2.4.6) nájdeme uvedený vzt'ah pre moment vztlakovej sily pôsobiacej na ponorené teleso:

$$\vec{M} = -\oint_S \vec{r} \times p(\vec{r})d\vec{S} = -\oint_S \vec{r}_{vz} \times p(\vec{r})d\vec{S} = \vec{r}_{vz} \times \vec{F}_{vz} \quad (5.2.4.7)$$

Výpočet momentu vztlakovej sily je dôležitý pre stabilitu lodí. V rovnovážnej polohe a orientácii lode, je moment vztlakovej sily nulový, pretože $\vec{r}_{vz}$ je rovnobežný s $\vec{g}$ (Obr. 5.2.4.1 A). Ak sa loď vplyvom vetra alebo vln nakloní, zmení sa poloha ťažiska vytlačenej kvapaliny, a moment vztlakovej sily je nenulový. Výsledná vztlaková sila má pôsobisko v ťažisku vytlačenej kvapaliny. Priesečník priamky ležiacej v smere vztlakovej sily a spojnice ťažiska vytlačenej kvapaliny a lode sa nazýva **metacentrum** (bod M na Obr. 5.2.4.1 B). Pre stabilitu lode je nevyhnutné, aby moment vztlakovej sily pôsobil proti nakloneniu lode. Toto sa pri konštrukcii lode zabezpečí tým, že metacentrum sa nachádza nad ťažiskom lode.

Kontrolné otázky

1. Ako súvisí Archimédov zákon so vztlakovou silou?
2. Závisí veľkosť vztlakovej sily od hĺbky do ktorej je teleso ponorené?
3. Závisí veľkosť vztlakovej sily od atmosférického tlaku nad hladinou kvapaliny?
4. Je vztlaková sila pôsobiaca na určité teleso vo vode rovnaká ako v liehu?
5. Aká veľká vztlaková sila musí pôsobiť na ponorku, aby si ponorila/vynorila?
Ako sa dá zmena vztlakovej sily pôsobiacej na ponorku dosiahnuť?
6. Prečo vodou nasiaknutý kmeň stromu nepláva vo vode tak, že jeho os je kolmá na hladinu?

5.2.5 Rýchlostné pole a tok

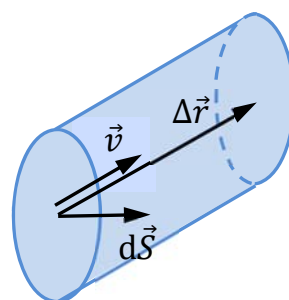
Pre prúdiacu kvapalinu zavádzame **rýchlostné pole** $\vec{v}(\vec{r})$, ktoré udáva rýchlosť malého elementu kvapaliny nachádzajúceho sa aktuálne na mieste $\vec{r}$. Pokiaľ je rýchlostné pole v čase nemenné, hovoríme o **ustálenom prúdení**. Neznačená to, že rýchlosť elementov kvapaliny sa nemení, pretože tieto sa presúvajú a v rôznych miestach priestoru môžu mať rôznu rýchlosť, a teda elementy kvapaliny sú urýchľované alebo spomaľované, podľa charakteru prúdenia.

Myslená krivka, pozdĺž ktorej sa pohybuje element kvapaliny, sa nazýva **prúdnic**a. Prúdnice možno zviditeľniť, ak sa do prúdiacej kvapaliny v jednom mieste kontinuálne pridáva farbivo. Ak je rýchlosť kvapaliny väčšia ako vplyv difúzie farbiva, farbivo je unášané hmotným elementom kvapaliny, čo vizualizuje prúdnicu.

Ak poznáme rýchlostné pole, dokážeme vypočítať koľko kvapaliny preteká miestami, ktoré nás zaujímajú. Podľa toho, či nás zaujíma prietok hmotnosti, alebo prietok objemu, používame pojem objemového alebo hmotnostného toku.

Objemový tok J_V predstavuje objem kvapaliny, ktorá pretečie vybranou plochou S za jednotku času. Jednotkou objemového toku je kubický meter za sekundu:

$$[J_V] = \frac{m^3}{s}.$$



Obr. 5.2.5.1

Uvažujme malý plošný element $d\vec{S}$ plochy S , nachádzajúci sa na mieste $\vec{r}$ (Obr. 5.2.5.1). Rýchlosť kvapaliny v tomto mieste je $\vec{v}(\vec{r})$. Za krátky okamih času Δt sa kvapalina posunie o $\Delta\vec{r} = \vec{v}(\vec{r})\Delta t$, a teda plôškou $d\vec{S}$ prejde objem kvapaliny:

$$\Delta dV = d\vec{S} \cdot \Delta\vec{r} = d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r})\Delta t.$$

Za jednotku času prejde plôškou $d\vec{S}$:

$$\frac{\Delta dV}{\Delta t} = d\vec{S} \cdot \vec{v}(\vec{r})$$

objemu kvapaliny a teda celou plochou S :

$$J_V = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.5.1)$$

Pomocou objemového toku kvapaliny sa zavádza **priemerná rýchlosť** v_{av} kvapaliny prechádzajúcej prierezom S :

$$v_{av} = \frac{1}{S} J_V = \frac{1}{S} \iint_S \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}. \quad (5.2.5.2)$$

Príklad 5.2.5.1 Ak z kohútika s vnútorným priemerom $d = 1$ cm, a teda vnútorným prierezom $S = \pi(0,5)^2 = 0,79$ cm², napustíme vedro s objemom $V = 5$ l za $\Delta t = 60$ s, potom priemerná rýchlosť kvapaliny v potrubí bude

$$v_{av} = \frac{1}{S} J_V = \frac{V/\Delta t}{\pi(d/2)^2} \approx 1 \text{ m/s}$$

Hmotnostný tok J_m predstavuje hmotnosť kvapaliny, ktorá pretečie vybranou plochou S za jednotku času. Jej jednotka je kilogram za sekundu:

$$[J_m] = \text{kg/s}.$$

Pri hľadaní vzťahu medzi hmotnostným tokom a rýchlostným poľom postupujeme takmer identicky ako v prípade objemového toku, len objem, ktorý pretečie ploškou dS za krátky časový interval dt , je potrebné vynásobiť hustotou v mieste $\vec{r}$, čím získame hmotnosť a teda pre hmotnostný tok vzťah:

$$J_m = \iint_S \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} \quad (5.2.5.3)$$

Veličina

$$\vec{j}_m = \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}) \quad (5.2.5.4)$$

sa nazýva **hustota hmotnostného toku**, lebo predstavuje hmotnosť kvapaliny, ktorá pretečie plochou s jednotkovým obsahom za jednotku času.

Kontrolné otázky

1. Čo rozumiete pod prúdovou čiarou?
2. Môžu sa prúdové čiary pretínať?
3. Aký je súvis medzi dotyčnicami k prúdniciam a rýchlostným poľom?
4. Definujte hmotnostný tok. Akú má fyzikálnu jednotku?
5. Akú priemernú hodnotu máme na mysli, keď hovoríme o priemernej rýchlosti prúdenia v potrubí?

5.2.6 Rovnica spojitosti toku, bilančné rovnice hmotnosti

Uvažujme úlohu, pri ktorej do zásobníka priteká kvapalina potrubím s prierezom S_{in} priemernou rýchlosťou v_{in} a zároveň z neho vyteká otvorom s prierezom S_{out} a priemernou rýchlosťou v_{out} (Obr. 5.2.6.1). Ak má kvapalina hustotu ρ , potom do zásobníka za jednotku času pritečie

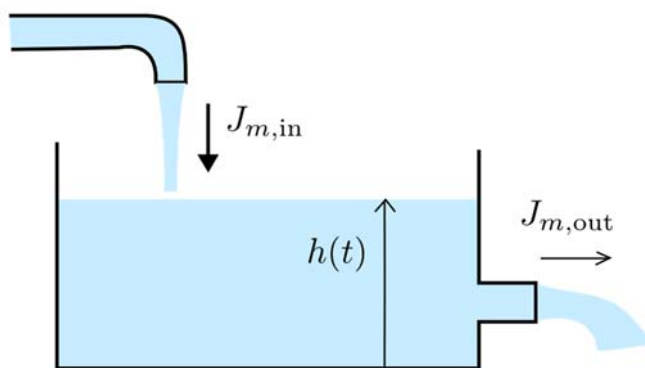
$$J_{m,in} = S_{in} v_{in} \rho$$

kilogramov kvapaliny, a vytečie

$$J_{m,out} = S_{out} v_{out} \rho$$

kilogramov kvapaliny. Bilancia týchto množstiev hovorí, že v rezervoári sa musí za jednotku času nahromadiť hmotnosť, rovnajúca sa rozdielu týchto dvoch tokov:

$$\frac{dm}{dt} = J_{m,in} - J_{m,out} \quad (5.2.6.1)$$



Obr. 5.2.6.1 Typický problém bilancie množstva látky obsahuje prítok, výtok a zásobník

V prípade nestlačiteľnej kvapaliny je jej hustota všade rovnaká, a tak hmotnosť kvapaliny v zásobníku možno jednoducho vyjadriť pomocou jej objemu. Podobne hmotnostné toky vyjadríme pomocou objemových tokov takže po predelení rovnice (5.2.6.1) hustotou nájdeme bilanciu objemu kvapaliny v rezervoári:

$$\frac{dV}{dt} = J_{V,in} - J_{V,out} . \quad (5.2.6.2)$$

Nakoniec, v prípade ustáleného prúdenia sa objem či hmotnosť v zásobníku nebude meniť, a výsledná rovnosť toku do a von zo zásobníka vedie na vzťah:

$$J_{V,in} = J_{V,out} \quad \rightarrow \quad S_{in} v_{in} = S_{out} v_{out} \quad (5.2.6.3)$$

Posledný vzťah medzi priemernými rýchlosťami sa niekedy nazýva aj **rovnica spojitosti toku** alebo **rovnica kontinuity toku** pre nestlačiteľné ustálené prúdenie a umožňuje vyjadriť priemernú rýchlosť v potrubí s premenlivým prierezom.

Všeobecný tvar rovnice spojitosti toku (pozri dodatok D2) sa týka každého jednotlivého bodu kvapaliny, nie prierezov ako celku, ako je tomu v rovnici (5.2.6.3). Vyjadruje súvislosť medzi časovou zmenou hustoty ρ a hustotou hmotnostného toku $\vec{j}_m = \rho \vec{v}$ ($\vec{v}$ je rýchlosť kvapaliny v danom bode):

$$\text{div} \vec{j}_m + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (5.2.6.4)$$

Príklad 5.2.6.1 Zásobníková časť injekčnej striekačky má prierez 2 cm^2 , ihla má vnútorný prierez $0,5 \text{ mm}^2$. Ak v striekačke stláčame piest celkom pomaly rýchlosťou $v_1 = 1 \text{ mm/s}$, akou rýchlosťou v_2 prúdi náplň striekačky ihlou?

Riešenie: Použijeme rovnicu (5.2.2.1) $S_1 v_1 = S_2 v_2$, z ktorej vypočítame rýchlosť $v_2 = 40 \text{ cm/s}$.

Kontrolné otázky

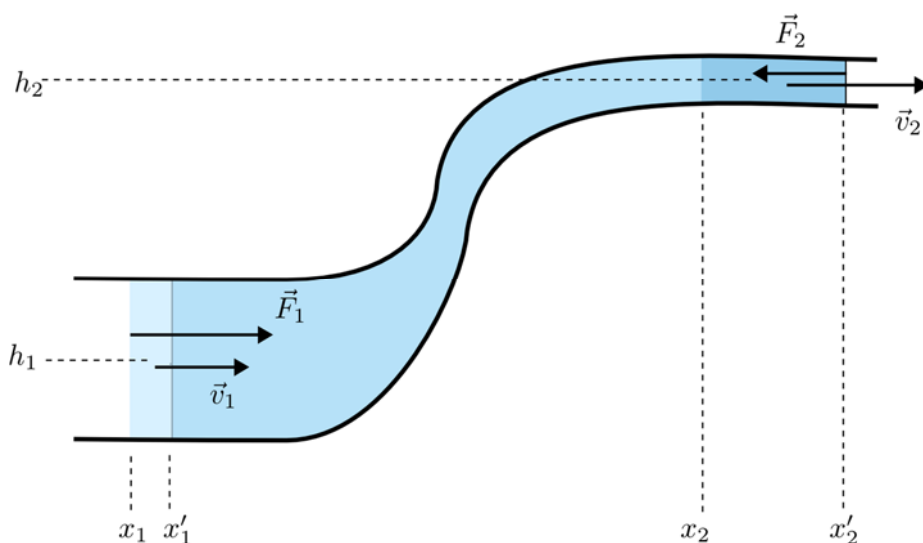
1. Čo je obsahom rovnice spojitosti toku?
2. Napište rovnicu spojitosti toku stlačiteľnej kvapaliny.
3. Na diaľnici sa dva jazdné pruhy spájajú do jedného. Aký musí byť pomer rýchlostí áut na dvojprúdovom a jedno prúdovom úseku cesty, aby doprava neviazla? Ako toto súvisí s rovnicou spojitosti nestlačiteľnej kvapaliny?

5.2.7 Bernoulliho rovnica a bilancia energie

V prípade ustáleného prúdenia možno podobne ako pri hmotnosti, uvažovať aj o bilancii mechanickej energie prúdiacej kvapaliny. Predstavme si segment potrubia, v ktorom si myslene vydelíme dané množstvo kvapaliny, nachádzajúce sa na počiatku medzi súradnicami x_1 a x_2 (Obr. 5.2.7.1). Z mechaniky vieme, že vo všeobecnosti platí:

$$W = \Delta E_m - W_{tr}, \quad (5.2.7.1)$$

kde W je práca konaná vonkajšími silami, ΔE_m zmena mechanickej energie a W_{tr} práca konaná trecími silami. Trecie sily v tejto časti zanedbáme, budeme ich považovať za nulové. Vrátime sa k nim po zavedení viskozity v nasledujúcich častiach.



Obr. 5.2.7.1 Pri odvádzaní Bernoulliho rovnice uvažujeme vydelené množstvo kvapaliny, ktoré sa posunie z pozície medzi x_1 a x_2 na pozíciu medzi x'_1 a x'_2 . Počas toho naň pôsobí okolitá kvapalina silami $\vec{F}_1$ a $\vec{F}_2$.

Pre vyčíslenie zmeny mechanickej energie je potrebné si uvedomiť, že opisujeme ustálené prúdenie, a preto rýchlosť kvapaliny v pevnom mieste je v každom čase rovnaká, aj keď samotná kvapalina sa presúva. Pri posunutí vybraného množstva kvapaliny z pozície medzi x_1 a x_2 na pozíciu medzi x'_1 a x'_2 , sa kinetická energia tejto kvapaliny zmení. Táto zmena sa dá vypočítať ako rozdiel kinetickej energie kvapaliny nachádzajúcej sa medzi x_2 a x'_2 ,

$$\frac{1}{2}\rho_2 S_2 (x'_2 - x_2) v_2^2, \quad (5.2.7.2)$$

a kinetickej energie kvapaliny medzi x_1 a x'_1 ,

$$\frac{1}{2}\rho_1 S_1 (x'_1 - x_1) v_1^2, \quad (5.2.7.3)$$

kde S_1 a S_2 sú prierezy potrubia v miestach „1” a „2”. Keďže celková hmotnosť vydelenej kvapaliny sa v čase nemení, vydelená časť sa hýbe s prúdiacou kvapalinou, potom výraz $\rho_2 S_2 (x'_2 - x_2)$ musí predstavovať tú istú hmotnosť ako $\rho_1 S_1 (x'_1 - x_1)$, a pre naše účely si ho označíme ako Δm . Podobne kinetickej energii, potenciálna energia získa príspevok $\Delta m g h_2$ a stratí príspevok $\Delta m g h_1$, takže celková zmena mechanickej energie bude:

$$\Delta E_m = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g h_2 - \left(\frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g h_1 \right) \quad (5.2.7.4)$$

Na vydelenú časť kvapaliny pôsobia vonkajšie sily – na jej hranici „1” je to tlak kvapaliny pred ňou, p_1 , a na jej hranici „2” je to tlak kvapaliny za ňou, p_2 . Tieto dve vonkajšie sily konajú pri posune kvapaliny prácu:

$$W = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2 = p_1 S_1 (x'_1 - x_1) - p_2 S_2 (x'_2 - x_2) \quad (5.2.7.5)$$

Dosadením rovnice (5.2.7.4) a (5.2.7.5) do základnej energetickej bilancie (5.2.7.1) nájdeme:

$$\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 \right) S_1 v_1 \Delta t - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho_2 v_2^2 + \rho_2 g h_2 \right) S_2 v_2 \Delta t = 0, \quad (5.2.7.6)$$

kde sme uvážili, že $(x'_1 - x_1) = v_1 \Delta t$ a podobne $(x'_2 - x_2) = v_2 \Delta t$.

Ak budeme uvažovať nestlačiteľnú kvapalinu ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), bude podľa rovnice kontinuity $S_1 v_1 = S_2 v_2$; vykrátením tohto faktora nájdeme najznámejší tvar Bernoulliho rovnice:

$$\left(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \right) - \left(p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \right) = 0 \quad (5.2.7.7)$$

alebo:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{konšt.},$$

platný ale len pre nestlačiteľné kvapaliny. Bernoulliho rovnica hovorí, že súčet tlaku, a objemových hustôt kinetickej a potenciálnej energie je pozdĺž prúdnic nemenný.

Príklad 5.2.7.1 Venturiho trubica sa používa na meranie veľkosti objemového toku J_V vo vodorovnom potrubí (Obr. 5.2.7.1). Z rovnice (5.2.7.7) použitej pre zúženie a normálnu časť potrubia nájdeme:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2. \quad (a)$$

Rýchlosti sú previazané rovnicou kontinuity:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

V bočných trubiciach musí byť v mieste ich pripojenia k potrubiu tlak rovnaký, a na hladine zase tlak atmosférický (inak by tieto rozhrania neboli v pokoji, ale posúvali by sa vplyvom nenulovej výslednej sily). Preto:

$$p_1 = p_a + \rho g h_1 \quad \text{a} \quad p_2 = p_a + \rho g h_2. \quad (b)$$

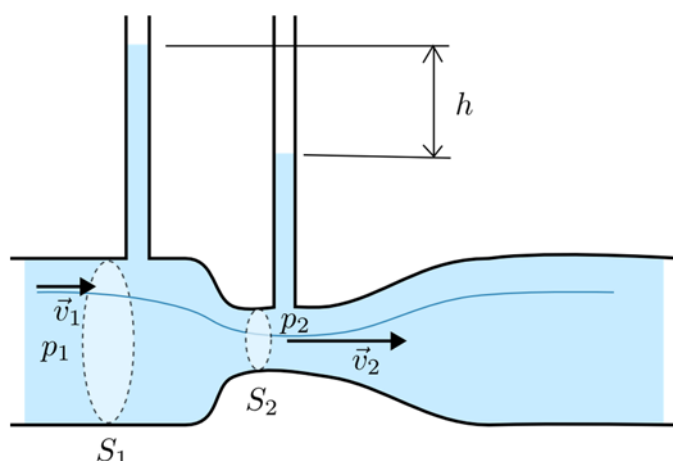
a teda:

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2). \quad (c)$$

Dosadením (b) a (c) do (a) nájdeme rýchlosť kvapaliny v potrubí:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{(S_1/S_2)^2 - 1}} \sqrt{2gh},$$

a teda objemový tok v potrubí bude:



Obr. 5.2.7.1 Pomocou Venturiho trubice dokážeme vypočítať celkový prietok potrubím z rozdielu výšok hladiny v bočných meracích trubičkách. Bernoulliho rovnicu použijeme pre veličiny pozdĺž prúdnic vyznačenej modrou krivkou. O prúdení predpokladáme, že žiadna z prúdnic nesmeruje do bočných trubíc.

$$J_V = S_1 v_1 = \frac{1}{\sqrt{(1/S_2)^2 - (1/S_1)^2}} \sqrt{2gh}.$$

Ak pre potrubie s vodou, s $r_1 = 2,5$ cm a $r_2 = 2$ cm, t. j. $S_1 = \pi (2,5)^2 = 20$ cm², $S_2 = 13$ cm² bude namerané $h = 1$ cm, potom $v_1 = 0,38$ m · s⁻¹ a celkový tok

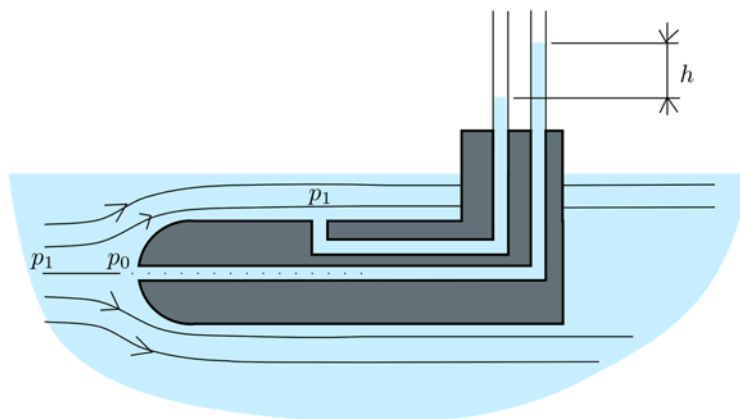
$$J_V = S_1 v_1 = 0,75 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}.$$

V praxi sa tento vzťah násobí koeficientom $C \approx 1$, ktorým sa koriguje nájdený výsledok na konečnú viskozitu a rýchlostný profil prúdenia (pozri aj časť o viskozite).

Príklad 5.2.7.2 Pitotova trubica (Obr. 5.2.7.2) sa používa na meranie rýchlosti prúdenia kvapaliny alebo plynu, napr. rýchlosť vzduchu okolo lietadla (a teda vlastne rýchlosť lietadla vzhľadom na vzduch). Použitie Bernoulliho rovnice pre prúdnicu vedúcu priamo na čelo Pitotovej trubice poskytne výsledok:

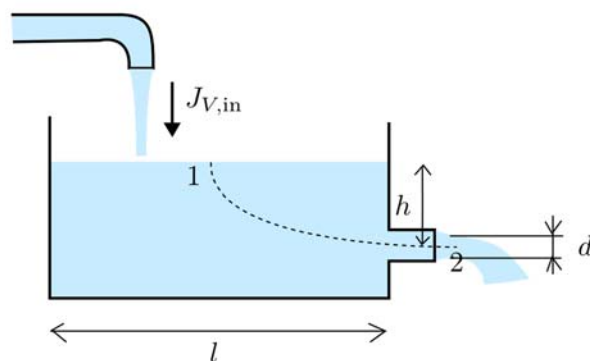
$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_o \rightarrow v = \sqrt{2hg}.$$

Podobne ako pri Venturiho trubici, v dôsledku viskozity, sa tento výsledok v praxi koriguje číselným koeficientom, $v = C\sqrt{2hg}$, $C \approx 1$.



Obr. 5.2.7.2 Rýchlosť na prúdnici priamo oproti čelu Pitotovej trubice postupne klesá až celkom pred trubicou zastane, tzv. stagnačný bod. Tlak p_o v tomto mieste je vyšší ako tlak p_1 inde v kvapaline, pričom z ich rozdielu možno nájsť rýchlosť prúdenia kvapaliny.

Príklad 5.2.7.3 V hĺbke $h = 0,5$ m pod hladinou vody v zásobníku je stred výtokového otvoru v tvare kruhu s priemerom $d = 5$ cm. Podstava zásobníka má tvar štvorca so stranou $l = 1$ m. Aký je objemový prítok vody J_V , ak sa výška hladiny nemení?



Obr. 5.2.7.3 Pri používaní Bernoulliho rovnice na riešenie prúdenia si vyznačíme predpokladanú prúdnicu – čiarkovaná čiara – a na nej si vyberieme miesta, v ktorých pre potreby príkladu má význam vyčíslit' energiu pripadajúcu na jednotku objemu.

Predpokladajte, že výtoková rýchlosť je v celom priereze otvoru rovnaká, t. j. že $d \ll h$.

Riešenie: Predpokladáme, že jedna z prúdnic, pozdĺž ktorej bude prúdiť voda má tvar vyznačený čiarkovanou čiarou na Obr. 5.2.7.3. Pozdĺž tejto prúdnice je nemenná hodnota súčtu daného Bernoulliho rovnicou (5.2.7.7). Vyhodnotíme ho v dvoch miestach, o ktorých niečo dokážeme zo zadania zistiť – v blízkosti hladiny (1) a v prúde vytekajúcej vody (2):

$$1: p_a + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h$$

$$2: p_a + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

kde p_a je atmosférický tlak, v_1 rýchlosť klesania hladiny a v_2 rýchlosť vody vo výtoku. Hustotu považujeme za rovnakú všade lebo voda je veľmi málo stlačiteľná. Ak dáme tieto dve vyjadrenia do rovnosti, dostaneme jednu rovnicu s dvoma neznámymi – v_1 a v_2 . Keďže výška hladiny je ustálená, voda sa v zásobníku nehromadí, a preto môžeme použiť rovnicu kontinuity v tvare:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

čo nám pomôže zbaviť sa jednej neznámej rýchlosti. Veľkosti plôch vypočítame zo zadanej geometrie:

$$S_1 = l^2, \quad S_2 = \pi d^2 / 4$$

Ich dosadením do rovnice kontinuity, a v kombinácii s Bernoulliho rovnicou nájdeme:

$$\frac{1}{2} \rho \left(\frac{\pi d^2}{4 l^2} v_2 \right)^2 + \rho g h = \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - (\pi^2 d^4 / 16l^4)}} = 3,13 \text{ m/s}.$$

Aby bola hladina ustálená, musí byť prítok rovnako veľký ako výtok, preto:

$$J_V = S_2 v_2 = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gh}{1 - (\pi^2 d^4 / 16l^4)}} = 0,006 \text{ m}^3/\text{s} = 6 \text{ l/s}.$$

V tomto prípade, je plocha výtoku oveľa menšia ako plocha hladiny, $d \ll l$, a preto možno člen

$$(\pi^2 d^4 / 16l^4) = 6 \times 10^{-5}$$

voči jednotke zanedbať. Pre výtokovú rýchlosť potom dostávame Toricceliho vzťah:

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

Ako vidno na obrázku, prúd vody sa zvyčajne po opustení výtokovej trubice mierne zúži. Pri riešení podobných úloh sa preto zvyčajne udáva redukovaný prierez, ktorý býva (aj o polovicu) menší ako geometrický prierez otvoru.

Ak je kvapalina stlačiteľná, potom objem pohybujúcej sa kvapaliny sa zmeniť môže, t. j. $S_1 v_1 \neq S_2 v_2$, ale jej hmotnosť musí byť stále nemenná, t. j. bude platiť:

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (5.2.7.8)$$

Naviac, v prípade stlačiteľnej kvapaliny musíme pri bilancovaní energie zahrnúť aj vnútornú energiu kvapaliny a jej výmenu tepla (energie) s okolím. Zmenu vnútornej energie telesa popisuje prvý a druhý termodynamický zákon (Kapitola 7, Tepelný pohyb, termodynamika):

$$dU = -pdV + TdS,$$

kde U je vnútorná energia látky, p je jej tlak, V objem, T termodynamická teplota a S jej entropia. Zmena objemu kvapaliny ($dV \neq 0$) podľa tohto vzťahu vedie na zmenu vnútornej energie ($dU \neq 0$). Pridaním zmien vnútornej energie do rovnice (5.2.7.6) a vykrátením tejto rovnice s výrazom (5.2.7.8) dostávame Bernoulliho rovnicu platnú aj pre stlačiteľnú kvapalinu (a plyny):

$$\left(u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + gh_1\right) - \left(u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + gh_2\right) = \Delta q, \quad (5.2.7.9)$$

kde $u = U/m$ je **vnútorná energia kvapaliny pripadajúca na jednotku hmotnosti** a Δq je teplo, ktoré odovzdá okoliu jednotková hmotnosť kvapaliny, ktorá prejde z miesta x_1 na miesto x_2 .

Pretože $I = U + pV$ je termodynamická stavová veličina **entalpia**, a teda $u + pV/m = u + p/\rho = i$ je hmotnostná hustota entalpie, zapisujeme pomocou nej výraz v zátvorke v rovnici (5.2.7.9) v tvare:

$$i + \frac{1}{2}v^2 + gh. \quad (5.2.7.10)$$

V prípade že výmenu tepla s okolím môžeme zanedbať ($\Delta q = 0$) hovoríme o **izoentropickom prúde**, ktorého dôležitým príkladom je rýchle obtekanie vzduchu telies v aerodynamike.

Pri odvádzaní Bernoulliho rovnice sme našli vyjadrenie pre zmenu kinetickej a potenciálnej energie vybraného množstva kvapaliny sledovaním jej pohybu z priestoru medzi polohami x_1 a x_2 , do priestoru medzi x'_1 a x'_2 . Namiesto toho, zameriame teraz svoju pozornosť na stacionárnu oblasť priestoru medzi polohami x_1 a x_2 , ktorú budeme nazývať **sledovaný objem** (z anglického *control volume*). Do sledovaného objemu prúdi kvapalina dnu aj von cez jeho plochu, a toto prúdenie je spojené s tokom hmotnosti ale aj energie. Orientácia vektorov priradených plochám, ako častí plochy ohraničujúcej sledovaný objem bude pri mieste x_2 paralelná s rýchlosťou, a preto $S_2 v_2 = \vec{S}_2 \cdot \vec{v}_2$, a pri mieste x_1 anti-paralelná: $S_1 v_1 = -\vec{S}_1 \cdot \vec{v}_1$. S týmto označením môžeme Bernoulliho rovnicu napísať v tvare:

$$\sum_{i=1}^2 \vec{S}_i \cdot \vec{v}_i \left(p_i + \frac{1}{2} \rho v_i^2 + \rho g h_i \right) = 0. \quad (5.2.7.11)$$

Veličina

$$\vec{j}_{e,m} = \vec{v} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h \right) = \vec{v} e_m \quad (5.2.7.12)$$

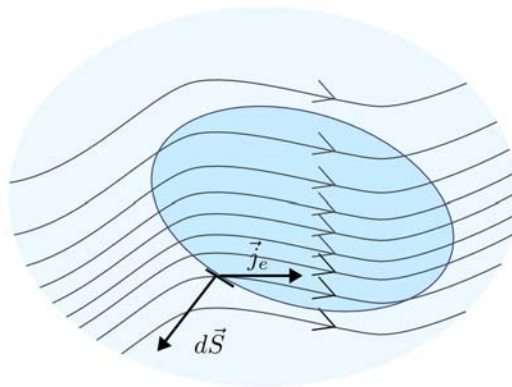
má podobne ako $\vec{j}_m$ v rovnici (5.2.5.4), význam toku energie cez jednotkovú plochu za jednotku času, t. j. **hustoty toku mechanickej energie**.

Rovnica (5.2.7.11) hovorí, že súčet tokov energie z vybraného objemu cez plochy S_1 a S_2 je nulový. Samotný výraz

$$e_m(\vec{r}) = p(\vec{r}) + \frac{1}{2} \rho(\vec{r}) (v(\vec{r}))^2 + \rho(\vec{r}) \vec{r} \cdot \vec{g} \quad (5.2.7.13)$$

má význam **objemovej hustoty mechanickej energie** prúdiacej kvapaliny v homogénnom gravitačnom poli (Obr. 5.2.7.1).

Rovnicu (5.2.7.11) môžeme zovšeobecniť pre sledovaný objem, do ktorého môže pritekať kvapalina a prinášať energiu v ktoromkoľvek mieste povrchu objemu:



Obr. 5.2.7.1 Podobne ako sme zaviedli hustotu toku hmotnosti $\vec{j}_m$, zavádzame aj hustotu toku mechanickej energie, $\vec{j}_e$, ktorého integrál cez uzavretú plochu $\oiint \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$, sa rovná celkovej zmene mechanickej energie v sledovanom objeme (tmavá modrá). Ten, pokiaľ v ňom nie je konaná práca (napr. turbínou, čerpadlom), alebo viskóznymi silami, musí byť nulový.

$$\oiint_S \vec{j}_{e,m} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (5.2.7.14)$$

Tento výraz predstavuje zákon zachovania mechanickej energie vyjadrený pomocou lokálnej veličiny $\vec{j}_{e,m}$. Mechanická energia sa ale vo všeobecnosti nezachováva. Napríklad, ak sa v sledovanom objeme nachádza turbína, potom tečúca kvapalina koná na turbíne prácu, a mechanická energia kvapaliny sa znižuje. Pravá strana rovnice (5.2.7.14) potom nie je nulová, ale rovná sa tomuto úbytku mechanickej energie:

$$\oiint_S \vec{j}_{e,m} \cdot d\vec{S} = -\frac{dE_m}{dt}. \quad (5.2.7.15)$$

Takýto zápis bilancie energie v sledovanom objeme je úplne analogický integrálnemu tvaru rovnice kontinuity pre hmotnosť (5.2.2.3), preto sa niekedy nazýva aj **rovnica kontinuity pre mechanickú energiu**.

Hustota toku energie a hustota toku hmotnosti a ich bilancia v sledovanom objeme pomocou rovnice (5.2.7.15) a jej zovšeobecnením pre celkovú energiu sa využívajú v technickej praxi pri návrhoch prúdenia z pohľadu zásobníkov, reaktorov, turbín alebo chladičov.

Kontrolné otázky

1. Aký je pôvod sily urýchľujúcej kvapalinu v horizontálnej prúdovej trubici?
2. Aký fyzikálny princíp bol použitý pri odvodzovaní Bernoulliho rovnice?
3. Aké tri členy obsahuje Bernoulliho rovnica?
4. Aké obmedzenia sa týkajú platnosti Bernoulliho rovnice?

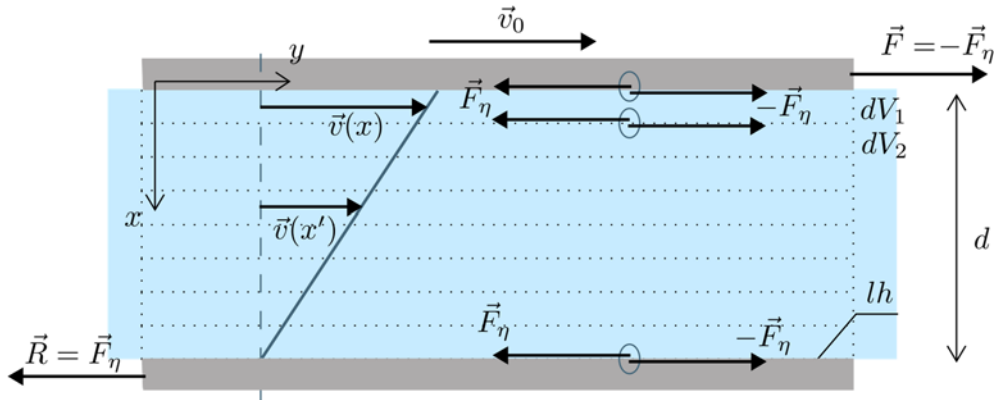
5. Presvedčte sa, že všetky tri členy Bernoulliho rovnice majú rovnaký rozmer.
6. Bude tlak vzduchu v idúcom aute na ktorom otvoríme strešné okno vyšší alebo nižší ako je vonkajší tlak vzduchu?

5.2.8 Viskozita

Viskozita charakterizuje veľkosť vnútorného trenia v tečúcej kvapaline. Pri zavedení tlaku sme na Obr. 5.2.1.1 demonštrovali, že kvapalina v pokoji nevykazuje tangenciálne sily. Akonáhle je ale rýchlosť kvapaliny nenulová, uvedené tvrdenie neplatí.

Uvažujme dve paralelné dosky dlhé l , široké h a vzdialené od seba o d , medzi ktorými je kvapalina (Obr. 5.2.8.1). Ak spodná doska bude nepohyblivá a vrchnú budeme posúvať rýchlosťou v_o , budeme ju musieť ťahať silou F_η . Experimenty ukázali, že táto sila je úmerná veľkosti plochy ťahanej dosky lh , rozdielu rýchlostí dosiek v_o , a nepriamo úmerná ich kolmej vzdialenosti d , t. j.

$$F_\eta = \eta \frac{lh}{d} v_o \quad (5.2.8.1)$$



Obr. 5.2.8.1 Ak chceme hornú dosku posúvať rýchlosťou v_o voči spodnej doske, pričom medzi nimi je kvapalina, musíme na vrchnú dosku pôsobiť silou $\vec{F}$, ktorej veľkosť je zhodná s veľkosťou sily viskózneho trenia $\vec{F}_\eta$. Vrstvy kvapaliny sa začnú pohybovať tak, že veľkosť ich rýchlosti rastie lineárne vo vertikálnom smere od nuly po v_o . Jednotlivé vrstvy, ako objemové elementy dV_i vyznačené bodkovanými čiarami, na seba vzájomne pôsobia silou veľkosti F_η . Tieto dve sily spojené zákonom akcie-reakcie majú pôsobiská na obrázku vyznačené krúžkom. Celková sila pôsobiaca na každý jeden objemový element je nulová, a preto sa každá vrstva pohybuje nemennou, aj keď od iných vrstiev odlišnou rýchlosťou. Ťahová sila $\vec{F}$ je prostredníctvom viskózných síl prenášaná na spodnú dosku, kde je jej pôsobenie kompenzované reakčnou silou $\vec{R}$ upevnenia dosky.

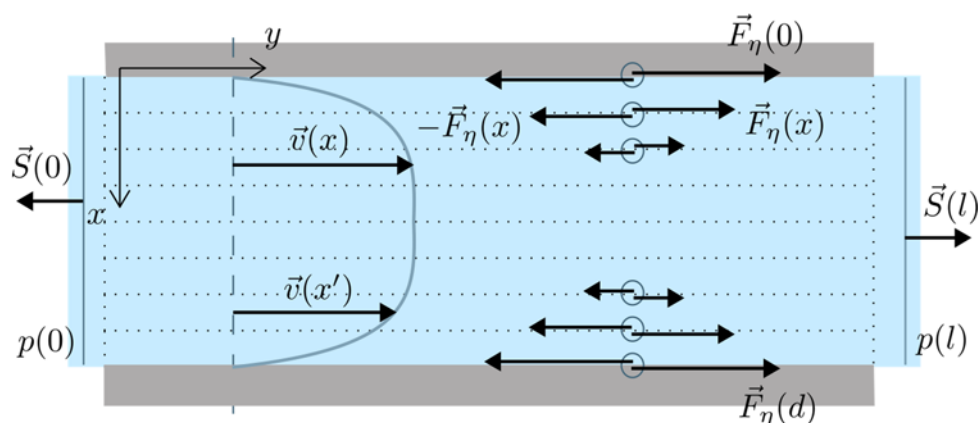
Konštanta úmernosti η charakterizuje kvapalinu, nazýva sa **dynamická viskozita** a jej fyzikálna jednotka je $\text{Pa} \cdot \text{s}$.

Ak by sa v kvapaline nachádzali malé viditeľné čiastočky, tak by sme pozorovali, že kvapalina pri pohybujúcej sa doske sa hýbe rýchlosťou blízkou v_0 , a naopak kvapalina pri doske v pokoji sa hýbe len veľmi malou rýchlosťou, pričom nárast od jednej rýchlosti k druhej je približne lineárny (Graf $\vec{v}(x)$ na Obr. 5.2.8.1). Rozoberieme túto situáciu z hľadiska pôsobenia síl. Uvažujme element vody dV_1 , hraničiaci s pohybujúcou sa doskou (Obr. 5.2.8.1). Ten pôsobí na dosku silou $\vec{F}_\eta$, a v zmysle 3. Newtonovho zákona teda doska pôsobí naň silou $-\vec{F}_\eta$. Keďže jeho rýchlosť je nemenná, musí naň pôsobiť od nasledovného elementu dV_2 druhá sila $\vec{F}_\eta$, ktorá túto silu vykompenzuje. Takto môžeme prechádzať cez elementy kvapaliny až k spodnej doske, ktorá je v pokoji. Nájdenu silu (5.2.8.1) pôsobiacu na povrch každého elementu kvapaliny možno vzhľadom na lineárny priebeh rýchlosti v kvapaline v smere osi y vyjadriť aj pomocou lokálnej zmeny rýchlosti s nárastom súradnice x v tvare:

$$\frac{F_\eta(x)}{lh} = \eta \frac{\Delta v_y}{\Delta x} \rightarrow \frac{F_\eta(x)}{lh} = \eta \frac{dv_y}{dx}. \quad (5.2.8.2)$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že ak by rýchlosť prúdenia kvapaliny bola všade rovnaká, viskózne sily v nej by museli byť nulové.

Predstavme si kvapalinu prúdiacu medzi dvoma nepohyblivými doskami. Ak by v celom priereze mala rovnakú rýchlosť, viskózne sily v nej by boli nulové. Znamená to, že by viskózna kvapalina prúdila bez trenia? Nie, rýchlosti nemôžu byť v celom



Obr. 5.2.8.2 Pri prúdení kvapaliny v potrubí klesá v dôsledku viskozity rýchlosť prúdenia pri (nepohybujúcich sa) stenách na nulu. Sily viskózneho trenia pôsobiace na protiľahlé plochy každého objemového elementu nie sú rovnako veľké, a preto naň pôsobí nenulová výsledná sila trenia. Táto je maximálna pri stene potrubia. Celkový súčet síl viskózneho trenia pôsobiacich na kvapalinu nachádzajúcu sa v potrubí s dĺžkou l sa rovná len viskózne sile pri stene, ostatné príspevky sa vzájomne zrušia. Táto výsledná sila musí byť kompenzovaná nenulovým rozdielom tlakov na konci a na začiatku potrubia.

priereze rovnaké, lebo, ako sme videli v opise experimentu s hornou pohyblivou doskou, pri stene je rýchlosť kvapaliny rovnaká ako rýchlosť steny. Preto pri nepohyblivých doskách bude rýchlosť kvapaliny nulová a jej nárast smerom do stredu bude spojený s nenulovými viskóznymi silami, a teda aj s nenulovým vnútorným trením (Obr. 5.2.8.2). Aby takéto prúdenie neustalo je potrebné, aby tlak v kvapaline narastal proti smeru rýchlosti prúdenia. Celková sila pôsobiaca na kvapalinu pohybujúcu sa stálou rýchlosťou musí byť nulová. Pre kvapalinu tečúcu prierezom $S = hd$, nachádzajúcu sa medzi doskami s dĺžkou l , šírkou h potom platí:

$$0 = [p(0) - p(l)]hd - l2h\eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \quad (5.2.8.3)$$

z čoho nájdeme vzťah pre pokles tlaku v kvapaline na dĺžke l :

$$\Delta p = \frac{2l}{d} \eta \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} \quad (5.2.8.4)$$

Silové pôsobenia medzi jednotlivými elementmi kvapaliny sa navzájom vyrušia v dôsledku 3. Newtonovho zákona. Rozdiel tlakov teda kompenzuje pôsobenie trecích síl na hornú a spodnú dosku.

Príklad 5.2.8.1 Odhadneme, na akej vzdialenosti od okraja narastie rýchlosť prúdenia v potrubí na svoju priemernú hodnotu. Potrubie nech má priemer $D = 1\text{ cm}$ a priemerná rýchlosť prúdenia v ňom nech je $v_{av} = 1\text{ m/s}$. Predpokladajme, že pokles tlaku na 1 m dĺžky je $\Delta p = 1,7\text{ kPa}$ a viskozita vody pri $\theta = 10\text{ }^\circ\text{C}$ je $\eta = 1,3 \times 10^{-3}\text{ Pa} \cdot \text{s}$.

Riešenie: Celkovú viskóznú silu odhadneme zo vzťahu (5.2.8.1), pričom pre vnútorný obvod použijeme vzťah πD :

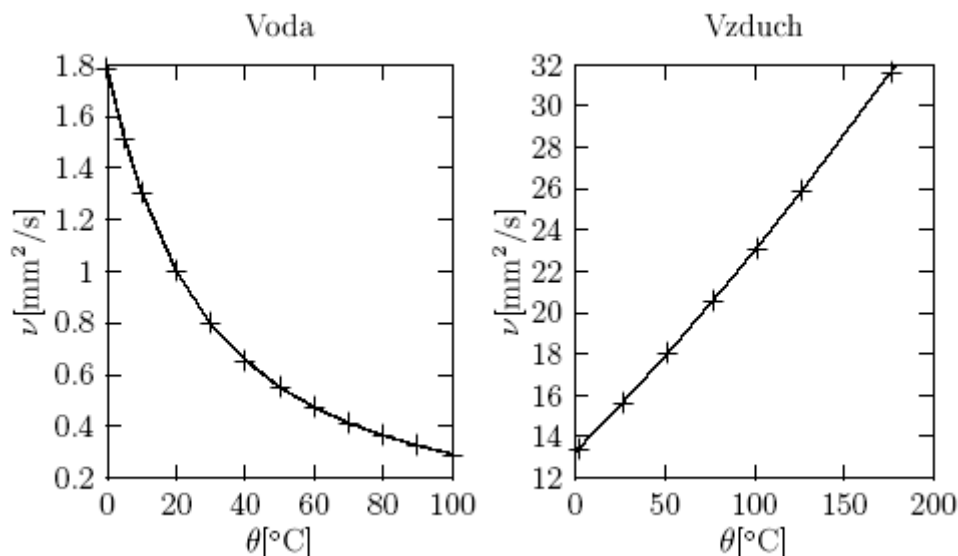
$$F_\eta = S\eta \frac{\Delta v}{\Delta r} = l\pi D\eta \frac{v_{av}}{\Delta r}$$

kde Δr je radiálna vzdialenosť od okraja potrubia na ktorej rýchlosť narástla z nuly (na stene) na priemernú rýchlosť. Sčítaním sily pretlaku a viskóznej sily podobne ako v (5.2.8.3) nájdeme:

$$l\pi D\eta \frac{v_{av}}{\Delta r} = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2 \Delta p$$

$$\Delta r = \frac{4l\eta v_{av}}{D\Delta p} = 0,3\text{ mm}$$

Odhadujeme teda, že pokles rýchlosti pri stene bude značne rýchly. Prípadná drsnosť povrchu môže preto viskóznú silu výrazne navyšovať.



Obr. 5.2.8.3 Graf kinematickej viskozity pre vodu a vzduch pri atmosférickom tlaku. Pri $\theta = 100\text{ °C}$ dochádza k varu, voda mení skupenstvo na paru, ktorej kinematická viskozita je už podobná kinematickej viskozite vzduchu, a teda je približne 100-krát väčšia.

Okrem dynamickej viskozity sa často používa aj **kinematická viskozita** $\nu = \eta/\rho$, ktorej fyzikálna jednotka je m^2/s .

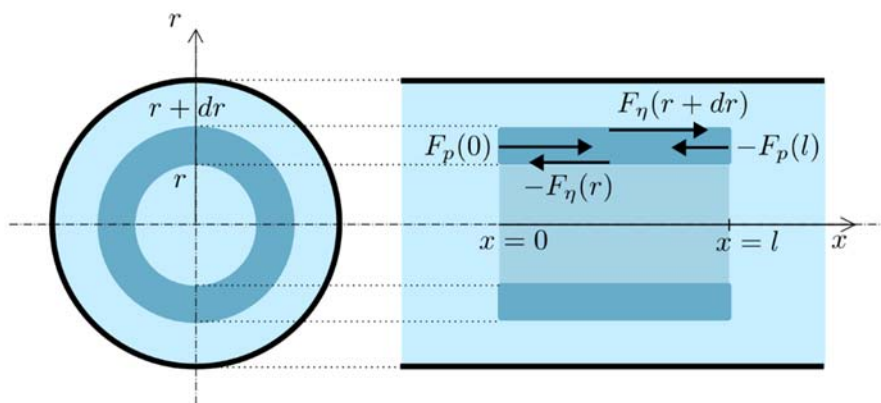
Viskozita pre väčšinu kvapalín výrazne klesá s rastúcou teplotou, a naopak viskozita plynov s teplotou rastie (Obr. 5.2.8.3). Jej hodnoty sa určujú experimentálne, aj keď pre plyny jej hodnoty dostatočne dobre vysvetľuje kinetická teória plynov a pre kvapalinu je možné jej hodnotu určiť pomocou simulácií molekulárnej dynamiky.

Kontrolné otázky

1. Ako je definovaný koeficient dynamickej viskozity?
2. Aký je fyzikálny rozmer koeficientu dynamickej viskozity?
3. Prečo je dobré nevytáčať nezohriaty spaľovací motor do vysokých otáčok?
4. Aké sú hodnoty kinematickej a dynamickej viskozity vody a vzduchu pri 20 °C ?

5.2.9 Laminárne prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny

Pri odvodení Bernoulliho rovnice sme neuvažovali viskózne sily, predpokladali sme, že energia objemovej jednotky kvapaliny sa zachováva. V súvislosti s výpočtom toku sme zase predpokladali, že rýchlosť kvapaliny je v celom priereze potrubia rovnaká. Výklad viskózneho trenia v predchádzajúcej časti ukázal, že ani jeden z týchto



Obr. 5.2.9.1 Na cylindrický element kvapaliny vyznačený tmavšou farbou pôsobí okolitá kvapalina tlakovými silami a silami viskózneho trenia.

predpokladov nie je celkom správny. V nasledovnom uvažíme vplyv viskozity na prúdenie kvapaliny v priamom vodorovnom potrubí s nemenným prierezom pri malých rýchlostiach. Pri takýchto rýchlostiach je prúdenie laminárne, t. j. prúdnicie tvoria priamky idúce paralelne so stenami potrubia.

Za element kvapaliny s jednoznačnou rýchlosťou, rovnobežnou so stenami potrubia, vezmeme objem medzi dvoma súosovými valcovými plochami s dĺžkou l a s polomeri r a $r + dr$ (Obr. 5.2.9.1). Nakoľko tento element sa pohybuje konštantnou rýchlosťou, je súčet všetkých naň pôsobiacich síl nulový. Na jeho prednej a zadnej podstave pôsobia tlakové sily od okolitej kvapaliny:

$$F_p(0) = p(0)2\pi r dr, \quad F_p(l) = p(l)2\pi r dr$$

a na plášťoch viskózne sily od okolitej kvapaliny:

$$F_\eta(r) = \eta 2\pi r l \frac{dv}{dr}, \quad F_\eta(r + dr) = F_\eta(r) + \frac{dF_\eta(r)}{dr} dr$$

Súčet týchto štyroch síl, s patričnými znamienkami podľa Obr. 5.2.9.1, sa musí rovnať nule:

$$0 = 2\pi r[p(0) - p(l)]dr + \frac{dF_\eta(r)}{dr} dr = 2\pi r \Delta p dr + \eta 2\pi l \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) dr$$

takže po úprave:

$$0 = \frac{\Delta p}{l} + \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right) \quad (5.2.9.1)$$

Posledný vzťah predstavuje diferenciálnu rovnicu pre rýchlostné pole $v(r)$. Táto rovnica predstavuje špeciálny prípad Navierovej-Stokesovej rovnice (Dodatok D3), pohybovej rovnice pre rýchlostné pole kvapaliny, zjednodušenej pre stacionárne prúdenie, malé rýchlosti a cylindrickú geometriu.

Dvojnásobným integrovaním v rovnici (5.2.9.1) podľa r nájdeme:

$$v(r) = v(0) - \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} r^2,$$

kde $v(0)$ predstavuje maximálnu rýchlosť prúdenia v strede potrubia, a smerom k jeho okrajom klesá kvadraticky. Hodnotu maximálnej rýchlosti nájdeme z podmienky, že na stene potrubia musí byť rýchlosť prúdenia nulová:

$$v(R) = v(0) - \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2 = 0 \rightarrow v(0) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} R^2.$$

Z toho vyplýva že rýchlostný profil má tvar:

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2). \quad (5.2.9.2)$$

Celkový objemový tok kvapaliny môžeme vhodne vyjadriť pomocou priemernej rýchlosti kvapaliny v_{av} (5.2.5.2):

$$v_{av} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi r v(r) dr = \frac{2}{R^2} \frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} \int_0^R r (R^2 - r^2) dr,$$

t. j.

$$v_{av} = \frac{R^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}. \quad (5.2.9.3)$$

Porovnaním s rovnicou (5.2.9.2) vidíme, že maximálna rýchlosť v strede je dvakrát väčšia než priemerná rýchlosť. V prípade laminárneho prúdenia teda nachádzame, že pokles tlaku v potrubí zapríčinený viskozitou je daný vzťahom:

$$\Delta p = \frac{8\eta}{R^2} l v_{av} = \frac{8\eta}{\pi R^4} l J_V, \quad (5.2.9.4)$$

t. j. je úmerný dĺžke potrubia l , toku alebo priemernej rýchlosti v_{av} a prudko narastajúci so zmenšujúcim sa priemerom potrubia R . Z týchto dôvodov je pri opise prúdenia viskóznej kvapaliny Bernoulliho rovnicou (5.2.7.7) potrebné pridať na jej pravú stranu výraz (5.2.9.4), predstavujúci pokles tlaku zapríčinený viskozitou.

Príklad 5.2.9.1 Nájdeme pokles tlaku na vzdialenosti $l = 1$ m v potrubí s priemerom $d = 1$ cm, pri celkovom toku vody zodpovedajúcom priemernej rýchlosti $v_{av} = 1$ m/s, za predpokladu, že prúdenie má laminárny charakter. Podľa rovnice (5.2.9.4):

$$\Delta p = \frac{8\eta}{R^2} l v_{av} = \frac{8 \times 1,3 \times 10^{-3}}{0,005^2} \times 1 \text{ m} \times \frac{1 \text{ m}}{\text{s}} = 416 \text{ Pa}$$

čo je podstatne menej ako uvádzaný pokles tlaku v tomto prípade v príklade 5.2.8.1, $\Delta p = 1700 \text{ Pa}$! Predpoklad o laminárnom prúdení v tomto prípade nebol správny, ako uvidíme v nasledujúcej časti.

Okrem uváženia viskózných strát, je potrebné modifikovať aj tvar vzťahu vyjadrujúceho hustotu kinetickej energie:

$$\frac{1}{2} \rho v_{av}^2 \rightarrow \zeta \frac{1}{2} \rho v_{av}^2, \quad (5.2.9.5)$$

ak sa používa na jej výpočet priemerná rýchlosť prúdenia v_{av} . Symbol ζ reprezentuje **koeficient kinetickej energie** a súvisí s nekonštantným rýchlostným profilom (5.2.9.2). Ukážeme si, že pre laminárne prúdenie platí $\zeta = 2$.

Ak budeme uvažovať potrubie s prierezom S a dĺžkou l , tak na jeho vstupe doň vteká za jednotku času kinetická energia:

$$\begin{aligned} \frac{dE_{k1}}{dt} &= \iint v_1(r) \frac{1}{2} \rho v_1^2(r) dS \\ &= \frac{1}{2} \rho \int 2\pi r \left[\frac{1}{4\eta} \frac{\Delta p}{l} (R^2 - r^2) \right]^3 dr \\ &= \frac{\pi \rho (\Delta p)^3}{128 \eta^3 l^3} \left[-\frac{1}{4} (R^2 - r^2)^4 \right]_0^R \\ &= \frac{\pi \rho (\Delta p)^3 R^8}{64 \times 8 \eta^3 l^3} = \rho \pi v_{av}^3 R^2 \end{aligned} \quad (5.2.9.6)$$

Prepočítaním na jednotku plochy dostaneme priemernú hustotu toku kinetickej energie:

$$j_{e,av} = \frac{1}{\pi R^2} \frac{dE_{k1}}{dt} = \rho v_{av}^3,$$

a teda priemernú objemovú hustotu kinetickej energie:

$$e_{av} = \frac{j_{e,av}}{v_{av}} = \zeta \frac{1}{2} \rho v_{av}^2, \quad \zeta = 2 \quad (5.2.9.7)$$

tak ako sme uviedli.

Kontrolné otázky

1. Kde sa pri odvodení vzťahu (5.2.9.2) pre rýchlostný profil použil predpoklad o laminárnom prúdení?
2. Prečo musíme počítať priemernú rýchlosť prúdenia integrovaním?

3. Koľko krát treba navýšiť pretlak v potrubí, ak chceme zachovať objemový prietok kvapaliny ak v dôsledku poklesu teploty vzrástla jej viskozita na dvojnásobok svojej pôvodnej hodnoty?

5.2.10 Turbulentné prúdenie nestlačiteľnej kvapaliny

V praxi sa s laminárnym prúdením stretávame len málokedy. Pri vyšších rýchlostiach prúdenia prúdnicie prestávajú byť rovnobežné so stenami potrubia a vytvárajú víry na malých a/alebo veľkých priestorových škálach. Tieto víry nie sú stacionárne, môžu vznikať, zanikať a presúvať sa. Takýto režim nazývame **prechodné** a neskôr **plne rozvinuté turbulentné prúdenie**.

Pri výpočtoch používame v čase ustrednené rýchlostné pole, ktoré už má stacionárny, t. j. od času nezávislý charakter. Pri stenách potrubia sa vytvára **hraničná vrstva**, v ktorej rýchlosť prúdenia kvapaliny klesá na nulu. Celkom v blízkosti steny je rýchlosť malá, a tu má prúdenie opäť laminárny charakter – hovoríme o **laminárnej podvrstve**. Nakoľko šírka hraničnej vrstvy nebýva veľká, profil ustrednenej rýchlosti prúdenia má podstatne menší gradient ako pri laminárnom prúdení. Preto koeficient kinetickej energie býva pri turbulentnom prúdení menší ako 2, typicky $\zeta \approx 1,4$.

Vzhľadom na kvalitatívne zmeny v prúdení je potrebné zmeniť aj vzťah vyjadrujúci pokles tlaku podmienený viskóznym trením, opísaný v predchádzajúcej časti. Na tento účel sa zavádza **koeficient trenia** v potrubí λ pomocou Darcyho-Weisbachovho vzťahu:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho v_{av}^2 \quad (5.2.10.1)$$

kde D je priemer potrubia. Porovnaním so vzťahom (5.2.9.4) nájdeme, že pre laminárne prúdenie platí:

$$\lambda = \frac{64}{Re}, \quad Re = \frac{v_{av} D}{\nu}. \quad (5.2.10.2)$$

kde Re je **Reynoldsovo číslo** a $\nu = \eta/\rho$ je kinematická viskozita kvapaliny.

Výhodnosť zápisu poklesu tlaku pomocou Darcyho-Weisbachovho vzťahu spočíva práve v tom, že λ , respektíve Re sú bezrozmerné čísla a preto nemôžu závisieť ľubovoľne od rýchlosti, rozmeru a viskozity, ale len v takej kombinácii, v akej tieto veličiny vystupujú v Reynoldsovom čísle. Pri charakterizácii prúdenia kvapaliny v potrubí, laminárneho, turbulentného alebo akéhokoľvek iného, potrebujeme poznať len závislosť koeficienta trenia od Reynoldsovho čísla $\lambda(Re)$, pričom táto závislosť je univerzálna pre akékoľvek kvapaliny prúdiace potrubím, a teda možno ju určiť experimentálne a tabelovať. Jeden z často používaných predpisov má tvar:

$$\lambda(\text{Re}) = \begin{cases} 64/\text{Re} & \text{pre } \text{Re} \in (0 - 3 \times 10^3) \quad (\text{laminárne}) \\ 0,3164 \cdot \text{Re}^{-1/4} & \text{pre } \text{Re} \in (3 \times 10^3 - 1 \times 10^5) \quad (\text{turbulentné}) \end{cases} \quad (5.2.10.3)$$

Zmena tejto závislosti pri $\text{Re} \sim 2300$ indikuje kvalitatívnu zmenu prúdenia z laminárneho na turbulentné pri tejto hodnote Reynoldsovho čísla.

Príklad 5.2.10.1 Nájdeme pokles tlaku na vzdialenosti $l = 1$ m vo vodnom potrubí s priemerom $D = 1$ cm, pri celkovom toku zodpovedajúcom priemernej rýchlosti $v_{\text{av}} = 1$ m/s. Ide o tú istú situáciu, pri ktorej sme v príklade 5.2.8.1 pri experimentálne danom poklese tlaku $\Delta p = 1700$ Pa odhadli šírku hraničnej vrstvy na 0,3 mm, a v príklade 5.2.9.1 za predpokladu laminárneho prúdenia našli pokles tlaku len $\Delta p \sim 400$ Pa.

V prvom rade teda vyhodnotíme Reynoldsovo číslo, aby sme určili charakter prúdenia:

$$\text{Re} = \frac{D v_{\text{av}} \rho}{\eta} = 7700$$

a teda ide o turbulentný režim. Predpoklad laminárneho prúdenia nebol správny, a preto aj pokles tlaku vyšiel oveľa nižší ako experimentálna hodnota.

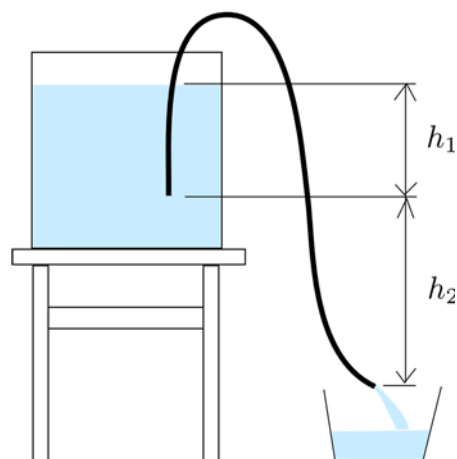
Použitím koeficientu trenia pre túto hodnotu Reynoldsovho čísla nájdeme:

$$\lambda = 0,3164 \times 7700^{-1/4} = 0,0338$$

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho v_{\text{av}}^2 = 0,0338 \frac{1}{0,01} \frac{1}{2} \times 1000 \times 1^2 = 1690 \text{ Pa}$$

v súlade s príkladom 5.2.8.1.

Príklad 5.2.10.2 Pri čistení kalu z dna akvária použijeme hadicu s dĺžkou 2,15 m a s priemerom 1 cm. Výškový rozdiel medzi vstupom vody do hadice v akváriu (tesne nad dnom) a výstupom vody nad kýblom je 45 cm, hladina vody v akváriu je 25 cm nad vstupom do hadice (Obr. 5.2.10.1). Akou priemernou rýchlosťou bude voda vytekať hadicou, ak (a) zanedbáme viskozitu, (b) predpokladáme laminárne prúdenie v hadici a (c) budeme predpokladať turbulentné prúdenie v hadici? Rozhodnite, ku ktorému z týchto režimov dochádza na základe hodnoty Reynoldsovho čísla.



Obr. 5.2.10.1 Pri čistení kalu v akváriu preteká voda do vedra samospádom. Viskózný odpor kvapaliny v hadici výrazne znižuje rýchlosť, ktorou voda z hadice vyteká.

Riešenie: Použijeme modifikovanú Bernoulliho rovnicu, uvažujúcu aj koeficient kinetickej energie aj Darcyho-Weisbachov vzťah pre pokles tlaku kvôli viskozite:

$$h_1 \rho g - \left(\frac{1}{2} \zeta \rho v^2 - h_2 \rho g \right) = \Delta p_\eta = \lambda \frac{l}{D} \frac{1}{2} \rho v^2,$$

kde v je priemerná rýchlosť prúdenia v hadici, h_1 vertikálna vzdialenosť hladiny od vstupu kvapaliny do hadice, h_2 vertikálna vzdialenosť medzi vstupom do hadice a výstupom z nej, l dĺžka hadice a D jej vnútorný priemer. Úpravou poslednej rovnice nájdeme vzťah:

$$v = \sqrt{\frac{2(h_1 + h_2)g}{\zeta + \lambda l/D}}.$$

Závislosť koeficientu trenia λ od rýchlosti nie je veľmi výrazná, a preto pre prvý odhad použijeme priamo výtokovú rýchlosť ideálnej kvapaliny. Pre ideálnu kvapalinu ($\zeta = 1$, $\eta = 0$) nájdeme (a):

$$v_{id} = \sqrt{2(h_1 + h_2)g} = 3,71 \text{ m s}^{-1}.$$

Ak z tejto hodnoty vypočítame Reynoldsovo číslo, nájdeme:

$$Re = \frac{D v_{id}}{\nu} = 28500 \gg 2300$$

t. j. sme presvedčivo v turbulentnom režime. Preto použijeme $\zeta = 1,4$ a vzťah pre koeficient trenia pre turbulentný režim s rýchlosťou odhadnutou podľa ideálneho prúdenia $\lambda = 0,3164 \times 28500^{-1/4} = 0,02435$. Pre výtokovú rýchlosť tak nájdeme:

$$v_{turb,0} = \sqrt{\frac{2(h_1 + h_2)g}{\zeta + \lambda l/D}} = 1,44 \text{ m s}^{-1}.$$

Ak teraz znovu prepočítame Reynoldsovo číslo, a následne koeficient trenia, a opakovali by sme tento proces v niekoľkých iteráciách nájdeme nakoniec výsledok:

$$v_{turb} = 1,29 \text{ m s}^{-1},$$

čomu zodpovedá Reynoldsovo číslo $Re = 9900$ (c).

Použitím vzťahov pre laminárne prúdenie ($\lambda = 64/Re$, $\zeta = 2$) nájdeme obdobným postupom výtokovú rýchlosť $v_{lam} = 2,01 \text{ m s}^{-1}$ (b).

Experimentálna hodnota výtokovej rýchlosti pre túto situáciu je $1,14 \text{ m s}^{-1}$. Vidíme, že použitie vzťahu pre turbulentné prúdenie sa líši od meranej hodnoty asi o 10 %. Na druhej strane, použitie modelu ideálnej kvapaliny alebo laminárneho prúdenia by viedlo k podstatne väčšej chybe.

Pre veľmi tenké hraničné vrstvy, vstupuje do úvahy aj drsnosť steny potrubia. Na tento účel je potrebné použiť koeficient trenia λ zodpovedajúci drsnosti vnútorného povrchu, ktorý možno vyhľadať v špecializovanej literatúre a tabuľkách.

V dynamike hmotných bodov, pri pojednávaní o trení v časti 3.2.4 sme sa stretli so silou Stokesovho trenia, ktorá bola úmerná rýchlosti telesa, a s aerodynamickým odporom, kde bola sila úmerná kvadrátu rýchlosti. Aj na rozhodnutie, ktorý z týchto modelov trenia použiť, slúži ako kritérium veľkosť určitého Reynoldsovho čísla. Napríklad, ak uvažujeme pohyb guľôčky v tekutine, je geometrický parameter vstupujúci do definície Reynoldsovho čísla priemer guľôčky, a jej obtekanie tekutinou prestáva byť laminárnym už pri jeho hodnotách $Re \approx 10$.

V súčasnosti sa stále viac využívajú numerické metódy, špeciálne metódy konečných prvkov a konečných elementov pri výpočte prúdenia v realistických systémoch. Aj v týchto výpočtoch je ale potrebné modelovať hraničné vrstvy prúdenia okolo telies pomocou efektívnych modelov uvažujúcich rôzne režimy turbulentného charakteru prúdenia v nich, ktoré sú založené na dôsledných meraniach alebo špeciálnych výpočtoch vo veľmi zjednodušených geometriách.

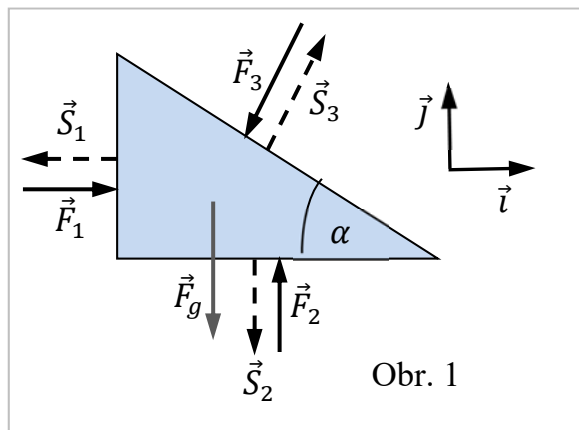
Kontrolné otázky

1. *Ako sa líši turbulentné prúdenie od laminárneho?*
2. *Aký význam má Reynoldsovo číslo a aká je jeho kritická hodnota pre prúdenie vo vodorovnom potrubí?*
3. *Platí tvrdenie, že s klesajúcou viskozitou kvapaliny sa blížíme k turbulentnému režimu?*

DODATKY

D1 Pascalov zákon

Ukážeme, že Pascalov zákon vyplýva z nezávislosti veľkosti sily pôsobiacej na plošku od orientácie tejto plošky. Uvažujme malý objem V kvapaliny v tvare trojbokého hranolčeka. Hranolček je ohraničený uzavretou plochou, poskladanou z rovinných plôšok S_i (Obr. 1).



Normálovú silu pôsobiacu na plošku S_i vyjadrujeme vzťahom:

$$\vec{F}_i = -p_i \vec{S}_i$$

kde p_i je konštanta úmernosti s rozmerom tlaku, určujúca veľkosť sily, ktorá pôsobí v mieste plošky $\vec{S}_i$, a môže teda nadobúdať rôzne hodnoty pre rôzne orientované plošky. Ďalším predpokladom je, že sily pôsobia vždy kolmo na plošky, t. j. že tangenciálne sily v kvapaline sú nulové. Okrem tlakových síl pôsobiacich na plochy, pôsobí na zvolený objem kvapaliny aj tiažová sila:

$$\vec{F}_g = \rho V \vec{g}.$$

Ak je kvapalina v pokoji, potom súčet síl pôsobiacich na zvolený objem musí byť nulový. V smere vektora $\vec{i}$ potom platí vzťah:

$$(-p_1 \vec{S}_1 - p_2 \vec{S}_2 - p_3 \vec{S}_3) \cdot \vec{i} = -p_1 S_1 + p_3 S_3 \sin \alpha = (-p_1 + p_3) S_1,$$

lebo $S_1 = S_3 \sin \alpha$ a $\vec{S}_2 \cdot \vec{i} = 0$. Pre kvapalinu v pokoji musí byť tento súčet nulový a preto musí platiť $p_1 = p_3$. Do súčtu síl pôsobiacich na uvažovaný element v smere vektora $\vec{j}$ musíme zahrnúť aj tiažovú silu:

$$p_2 S_2 - p_3 S_3 \cos \alpha - \rho V g = (p_2 - p_3) S_2 - \rho V g = 0. \quad (a)$$

Zvolený objem, hoci malý, má konečnú veľkosť, takže tlaky p_2 a p_3 sa môžu líšiť o príspevok od tiaže kvapaliny. Ak nás ale zaujíma len fakt, či prakticky v tom

istom mieste, ale v rôznom smere môže pôsobiť rôzna sila, potom možno uvažovať o postupnom až limitnom zmenšovaní zvoleného malého objemu. Dĺžku všetkých troch rozmerov zvoleného objemu zmenšíme tak, že ich vynásobíme malým číslom $\epsilon \rightarrow 0$. V takomto prípade sa veľkosti plôšok zmenšia ϵ^2 -krát a veľkosť objemu ϵ^3 -krát. To znamená, že napríklad pri $\epsilon = 10^{-3}$ bude tiažová sila vystupujúca v rovnici (a) asi 1000-krát menšia než príspevok plošných síl a teda ju môžeme voči veľkosti tlakovej sily zanedbať. V smere vektora $\vec{j}$ bude potom platiť rovnosť tlakov: $p_2 = p_3$.

Vo všeobecnosti môžeme teda konštatovať, že plošná hustota veľkosti silového pôsobenia v kvapaline v pokoji, čiže tlak, nezávisí od orientácie plôšky. Uvažujme kvapalinu v pokoji, v nádobe s ľubovoľným tvarom. Ak na vybranú plôšku steny nádoby začneme pôsobiť dodatočnou silou $d\vec{F} = -\Delta p d\vec{S}$, potom o hodnotu Δp sa navýši tlak vo všetkých objemových elementoch kvapaliny nachádzajúcich sa za plôškou $d\vec{S}$, aby celková sila naň pôsobiaca v tomto smere bola nulová, a teda aby boli v pokoji. Keďže tlak pôsobí v každom smere rovnako, musí sa o tú istú hodnotu Δp navýšiť aj vo všetkých elementoch nad a pod vyššie uvažovanými elementmi, a teda v konečnom dôsledku v celom objeme kvapaliny. Tým sme dokázali platnosť Pascalovho zákona vychádzajúc z predpokladu absencie tangenciálnych zložiek síl pôsobiacich na plôšky v kvapaline v pokoji.

D2 Rovnica spojitosti toku v integrálnom a diferenciálnom tvare

Pri odvodení sa vychádza zo zákona zachovania hmotnosti, ktorý sa v tomto prípade formuluje s ohľadom na objem V ohraničený uzavretou plochou S . Hmotnosť tekutiny, ktorá za jednotku času opustí tento objem (prejde cez uzavretú plochu), musí sa rovnať úbytku hmotnosti tekutiny nachádzajúcej sa v objeme – tiež za jednotku času. S cieľom vyjadriť túto slovnú formuláciu matematicky, najprv zapíšeme hmotnosť tekutiny prostredníctvom integrálu jej hustoty ρ : $m = \iiint \rho dV$. Skalárny súčin $\vec{j}_m \cdot d\vec{S}$ hustoty hmotnostného toku $\vec{j}_m$ s vektorom elementárnej plôšky $d\vec{S}$ predstavuje hmotnosť tekutiny, ktorá za jednotku času pretečie cez túto plôšku (vektor $d\vec{S}$ je orientovaný z vnútra uzavretej plochy von). Cez celú uzavretú plochu S pretečie za jednotku času tekutina s hmotnosťou $\oiint \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$ – a o toľko sa zmenší hmotnosť tekutiny uzavretej v objeme V , takže musí platiť rovnica:

$$\oiint \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = -\frac{dm}{dt}, \quad (a)$$

čo je **rovnica spojitosti toku v integrálnom tvare**.

Rovnicu (a) možno ďalej upraviť pomocou Gaussovej-Ostrogradského vety ($\rightarrow$ kapitola o vektoroch, dodatok D4), keď sa plošný integrál cez uzavretú plochu nahradí objemovým integrálom cez objem uzavretý plochou. Ľavá strana rovnice sa potom zmení takto:

$$\oint \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = \iiint \operatorname{div} \vec{j}_m dV = \iiint \operatorname{div} (\rho \vec{v}) dV.$$

Hmotnosť na pravej strane rovnice vyjadríme ako objemový integrál objemovej hustoty tekutiny, takže pravá strana nadobudne tvar:

$$-\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint \rho dV = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Zmena totálnej derivácie pred integrálom na parciálnu za integrálom je zdôvodnená tým, že hustota tekutiny v uvažovanom objeme sa môže od miesta k miestu meniť, takže je funkciou viacerých premenných. Po úprave oboch strán rovnice dostaneme:

$$\iiint \operatorname{div} (\rho \vec{v}) dV = -\iiint \frac{\partial \rho}{\partial t} dV,$$

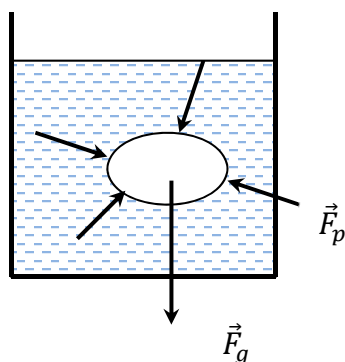
odkiaľ vyplýva – vzhľadom na ľubovoľný výber polohy a veľkosti uzavretej plochy a tým aj objemu – nasledujúca rovnosť:

$$\operatorname{div} (\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

čo je **rovnica spojitosti toku v diferenciálnom tvare**.

D3 Základná pohybová rovnica hydrodynamiky

Zákonitosti pohybu kvapalín, v ktorých sa neuvažuje s vnútorným trením (viskozitou) sa opisujú tzv. Eulerovou rovnicou, z ktorej sa dá odvodiť jednak Bernoulliho rovnica, jednak základná rovnica hydrostatiky.



Pri odvodení Eulerovej rovnice sa vychádza z pohybovej rovnice platnej pre istý objem kvapaliny, ohraničenej uzavretou plochou. Na vybraný objem kvapaliny pôsobí gravitačná sila $\vec{F}_g$ a tlakové sily $\vec{F}_p$, ktoré naň pôsobia zo všetkých strán. Gravitačná sila pôsobí na každý objemový element kvapaliny, pričom výsledná sila $\vec{F}_g$ predstavuje vektorový súčet síl pôsobiacich na

jednotlivé hmotné elementy v elementárnych objemoch dV . Výsledná gravitačná sila sa vypočíta integrálom:

$$\vec{F}_g = \iiint \rho \vec{g} dV ,$$

v ktorom $\vec{g}$ je gravitačné zrýchlenie, ρ hustota kvapaliny v danom mieste a dV element objemu tekutiny. Aj výsledná tlaková sila sa počíta pomocou integrálu, pričom treba integrovať cez celú uzavretú plochu ohraničujúcu zvolený objem:

$$\vec{F}_p = - \oint p d\vec{S} .$$

Znamienko mínus pred integrálom súvisí s dohodou, že vektory $d\vec{S}$ smerujú vždy z uzavretej plochy von, ale tlaková sila v danom mieste uzavretej plochy pôsobí na tekutinu smerom dovnútra.

Súčet síl pôsobiacich na objem kvapaliny sa podľa druhého Newtonovho zákona rovná súčinu hmotnosti kvapaliny a zrýchlenia $\vec{a}$ jej ťažiska:

$$- \oint p d\vec{S} + \iiint \rho \vec{g} dV = \vec{a} \iiint \rho dV . \quad (a)$$

Hmotnosť kvapaliny nachádzajúcej sa v objeme V je v tomto vzťahu zapísaná ako integrál $m = \iiint \rho dV$. V rovnici (a) vystupujú dva objemové a jeden plošný integrál, ktorý v záujme ďalšieho postupu treba tiež premeniť na objemový. Postup premeny je pre jeho zdĺhavosť uvedený je v dodatku D6, výsledkom premeny je vzťah:

$$\oint p d\vec{S} = \iiint \text{grad } p dV \quad (b)$$

Pri úprave druhého integrálu z ľavej strany rovnice (a) využijeme skutočnosť, že gravitačné zrýchlenie je vlastne intenzitou gravitačného poľa (pozri vzťah 5.1.5.5), ktorá sa rovná gradientu potenciálu gravitačného poľa: $\vec{g} \equiv \vec{E} = - \text{grad } \varphi$ (vzťah 5.1.5.9), takže

$$\iiint \rho \vec{g} dV = - \iiint \rho \text{grad } \varphi dV . \quad (c)$$

Po dosadení rovníc (b) a (c) do rovnice (a) dostaneme výsledok:

$$- \iiint \text{grad } p dV - \iiint \rho \text{grad } \varphi dV = \vec{a} \iiint \rho dV$$

ktorý ešte upravíme:

$$- \iiint (\text{grad } p + \rho \text{grad } \varphi) dV = \vec{a} \iiint \rho dV .$$

Vo všeobecnosti zrýchlenie ťažiska kvapaliny $\vec{a}$ závisí od voľby objemu V , ktorý kvapalina zaberá. Ak sa ale zameriame na dostatočne malý objem V , zrýchlenie bude nezávislé od tejto voľby, a bude predstavovať zrýchlenie ťažiska vybraného malého elementu kvapaliny. Pre malý objemový element V môžeme pomocou vety o strednej hodnote upraviť ľavú stranu poslednej rovnice, a po predelení objemom V nájsť:

$$\text{grad } p + \rho \text{ grad } \varphi = -\vec{a}\rho, \quad (\text{d})$$

alebo v inom tvare

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p - \text{grad } \varphi, \quad \text{resp.} \quad \vec{a} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

kde ρ , p a φ predstavujú podobne ako zrýchlenie $\vec{a}$ lokálne hodnoty hustoty, tlaku a gravitačného potenciálu v mieste $\vec{r}$, kde sa nachádza malý objemový element kvapaliny V .

D4 Eulerova a Navierova-Stokesova rovnica

Z rovnice (d) z predchádzajúceho dodatku sa odvodzuje základná hydrodynamická rovnica, pomenovaná po švajčiarskom vedcovi Leonardovi Eulerovi. Z nej sa potom odvodí aj Bernoulliho rovnica. Ako východiskový použijeme tvar rovnice:

$$\vec{a} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p, \quad (\text{a})$$

v ktorej zrýchlenie $\vec{a}$ predstavuje zrýchlenie ťažiska malého hmotnostného elementu kvapaliny. Zmena rýchlosti tohto elementu za časový okamžik dt , z ktorej vypočítame jeho zrýchlenie, musí zahŕňať aj zmenu polohy elementu za tento čas. Preto zrýchlenie vyjadríme ako totálnu deriváciu rýchlosti podľa času:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{r}(t+dt), t+dt) - \vec{v}(\vec{r}(t), t)}{dt}$$

Použitím pravidla o derivácii zloženej funkcie viacerých premenných nájdeme:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(x, y, z, t)}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} \quad (\text{b})$$

lebo výraz

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

je skalárnym súčinom vektora rýchlosti

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

a gradientu rýchlosti, čo je tenzorová veličina, vyjadrená vzťahom:

$$\text{grad } \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \vec{k}.$$

Po dosadení zrýchlenia vyjadreného vzťahom (b) do rovnice (a), dostaneme **Eulerovu rovnicu**, platnú pre vírové aj nevírové prúdenie:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (\text{c})$$

Navierova–Stokesova rovnica zahŕňa aj vplyv síl viskózneho trenia pre nestlačiteľné kvapaliny:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \eta \nabla^2 \vec{v}, \quad (\text{d})$$

kde η je dynamická viskozita a ∇^2 je Laplaceov operátor. V cylindrických súradniciach, vhodných pre popis prúdenia v potrubí, nadobúda Laplaceov operátor tvar:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Pre rýchlostné pole, ktoré závisí len od vzdialenosti hmotného elementu kvapaliny od osi potrubia, $\vec{v}(r)$, sú derivácie podľa premenných φ a z nulové. Pre ustálené prúdenie sú nulové aj derivácie rýchlosti podľa času, takže Navierova-Stokesova rovnica pre ustálené prúdenie vo vodorovnom cylindrickom potrubí nadobudne tvar:

$$\vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \right).$$

Výraz na ľavej strane je úmerný druhej mocnine amplitúdy rýchlosti, a preto ho možno pri malých rýchlostiach zanedbať. Výsledná rovnica pre malé rýchlosti, t. j. laminárne prúdenie, je zhodná s rovnicou pre rýchlostný profil prúdenia vo valcovom potrubí, odvodenou elementárnejším postupom v časti 5.2.9.

D5 Bernoulliho rovnica

Formálne odvodenie tejto rovnice vychádza z Eulerovej rovnice pre prípad, že ide o ustálené izentropické prúdenie. Vyjdeme z integrálu rovnice pozdĺž prúdnic z miesta $\vec{r}_1$ na miesto $\vec{r}_2$:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{v} \cdot (\text{grad } \vec{v}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(-\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \cdot d\vec{r} \quad (\text{a})$$

Využijeme definíciu hmotnostnej hustoty entalpie:

$$di = T ds + \frac{dp}{\rho},$$

z ktorej pre izentropický dej ($ds = 0$) vyplýva:

$$\text{grad } i = \frac{\text{grad } p}{\rho}.$$

Pravá strana rovnice (a) sa teda rovná rozdielu gravitačného potenciálu a hmotnostnej hustoty entalpie medzi polohami $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$: $\varphi(\vec{r}_1) + i(\vec{r}_1) - [\varphi(\vec{r}_2) + i(\vec{r}_2)]$. Integrál na ľavej strane rovnice (a) upravíme v prvom kroku substitúciou; pomocou rýchlostného poľa kvapaliny prejdeme k integrovaniu podľa času:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{v} \cdot (\text{grad } \vec{v}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v} \cdot (\text{grad } \vec{v}) \cdot \vec{v} dt.$$

Prepísaním do zložiek vieme integrant upraviť nasledovne:

$$\sum_{i,j=1}^3 v_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v_j \right) v_j = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 \frac{1}{2} v_j v_j \right) = \vec{v} \cdot \text{grad } \left(\frac{1}{2} v^2 \right),$$

Spätnou substitúciou k integrovaniu po prúdnicí nájdeme:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad } \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} v(\vec{r}_2)^2 - \frac{1}{2} v(\vec{r}_1)^2.$$

Použitím výsledkov získaných úpravou ľavej a pravej strany rovnice (a) nakoniec nachádzame Bernoulliho rovnicu platnú pre ustálené izentropické prúdenie nestlačiteľnej aj stlačiteľnej kvapaliny:

$$\left(i_1 + \frac{1}{2} v_1^2 + \varphi_1 \right) - \left(i_2 + \frac{1}{2} v_2^2 + \varphi_2 \right) = 0.$$

D6 Premena plošného integrálu $\oint p \, d\vec{S}$ na objemový

Na túto transformáciu sa použije Gaussova - Ostrogradského integrálna veta ($\rightarrow$ kapitola o vektoroch, dodatok D4), ale vyžaduje si to komentár. Plošný integrál (je to vektorová veličina!) vynásobíme skalárne konštantným vektorom $\vec{k}$ (nezávisí od priestorových súradníc) a tento vektor priradíme k tlaku p :

$$\vec{k} \cdot \oint p \, d\vec{S} = \oint (p\vec{k}) \cdot d\vec{S}. \quad (a)$$

Pod integrálom teraz vystupuje vektorová funkcia, takže plošný integrál po uzavretej ploche môžeme teraz na základe Gaussovej-Ostrogradského vety premeniť na objemový:

$$\begin{aligned} \oint (p\vec{k}) \cdot d\vec{S} &= \iiint \operatorname{div}(p\vec{k}) \, dV = \iiint \nabla \cdot (p\vec{k}) \, dV = \vec{k} \cdot \iiint \nabla p \, dV = \\ &= \vec{k} \cdot \iiint \operatorname{grad} p \, dV, \end{aligned} \quad (b)$$

lebo skalárny súčin sa uplatní len medzi operátorom nabla a vektorom $\vec{k}$. Derivácie podľa priestorových súradníc, ktoré predpisuje operátor nabla, sa však vzťahujú na skalárnu funkciu $p(x, y, z)$, čo vedie na jej gradient. Porovnaním rovníc (a) a (b) dostaneme výsledný vzťah:

$$\oint p \, d\vec{S} = \iiint \operatorname{grad} p \, dV.$$

SÚHRN VZŤAHOV

Gravitačné pole

plošná rýchlosť

$$\mathbf{v}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$$

tretí Keplerov zákon

$$T^2 = ka^3, \quad \text{resp.} \quad \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

newtonov gravitačný zákon

$$\mathbf{F} = -Gm_1m_2 \frac{1}{r^3} \mathbf{r}$$

gravitačná potenciálna energia

$$W_p(r) = -G \frac{m_1m_2}{r}$$

definícia intenzity gravitačného poľa

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_g}{m}$$

intenzita v okolí bodového telesa

$$\mathbf{E} = -G \frac{m}{r^3} \mathbf{r}$$

definícia potenciálu gravitačného poľa

$$\varphi = \frac{W_p}{m}$$

potenciál v okolí bodového telesa

$$\varphi = -G \frac{m}{r}$$

prvá kozmická rýchlosť

$$v_I = \sqrt{g \frac{R^2}{R+h}}$$

druhá kozmická rýchlosť

$$v_{II} = \sqrt{2gR}$$

Hydromechanika

tlak	$p = \frac{F}{S}$
hydrostatický tlak	$p = \rho g h$
rovnica spojitosti toku nestlačitelné kvapaliny	$S_1 v_1 = S_2 v_2$
rovnica spojitosti toku stlačitelné tekutiny	$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$
Bernoulliho rovnica	$\frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g y_1 + p_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g y_2 + p_2$
základná rovnica hydrostatiky	$p = b + \rho g h$
Torricelliho vzorec – rýchlosť vytekajúcej kvapaliny	$v = \sqrt{2gh}$
Eulerova rovnica	$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$
rovnica spojitosti toku, integrálny tvar	$\oiint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dm}{dt}$
rovnica spojitosti toku, diferenciálny tvar	$\text{div}(\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

SLOVNÍK

Gravitačné pole

druhá kozmická rýchlosť – rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu na povrchu Zeme vo zvislom smere, aby sa už na Zem nevrátilo, t. j. aby uniklo z jej gravitačného pôsobenia (pri určovaní jej veľkosti sa neráta s odporom vzduchu)

druhý Keplerov zákon – „plochy opísané za jednotku času spojnicou Slnko – planéta sú stále rovnako veľké, t. j. plošná rýchlosť každej planéty je konštantná“

geostacionárna družica – družica obiehajúca okolo Zeme v rovine rovníka v takej výške, že jej obežná doba sa zhoduje s dobou otočenia Zeme o 360° ; preto zotrváva nad jedným bodom rovníka. Využíva sa na telekomunikačné účely

gravitačná hmotnosť – miera gravitačných vlastností telies; získava sa vážením, t. j. porovnávaním gravitačných síl pôsobiacich na teleso a na závažie

gravitačná konštanta – konštanta $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$, vystupujúca v Newtonovom gravitačnom zákone. Jej veľkosť sa zhoduje s veľkosťou sily, ktorou by na seba pôsobili telesá s hmotnosťami 1 kg zo vzdialenosti 1 meter

gravitačná potenciálna energia – vzájomná potenciálna energia dvoch telies, ktoré na seba pôsobia iba gravitačnými silami. S rastúcou vzdialenosťou medzi telesami sa zväčšuje; jednotka – joule (J)

gravitačná sila – sila pôsobiaca na fyzikálny objekt, nachádzajúci sa len v gravitačnom poli

gravitačné pole – fyzikálne pole sprostredkujúce gravitačné pôsobenie medzi telesami

gravitačné zrýchlenie – zrýchlenie, ktoré telesu udeľuje gravitačná sila; jednotka m/s^2 ; rovná sa intenzite gravitačného poľa

gravitačný potenciál → potenciál gravitačného poľa

gravitačný zákon → Newtonov gravitačný zákon

intenzita gravitačného poľa – vektorová veličina určená podielom sily pôsobiacej v danom bode poľa na časticu a hmotnosti tejto častice; má rozmer zrýchlenia, jednotka m/s^2

kozmicke rýchlosti → prvá, druhá kozmická rýchlosť

Newtonov gravitačný zákon – zákon vyjadrujúci závislosť veľkosti gravitačnej sily, ktorou na seba pôsobia dva hmotné body (dve malé telesá): sila je úmerná súčinu ich hmotností a nepriamo úmerná druhej mocnine ich vzdialenosti

plošná rýchlosť planéty – podiel plošného obsahu vytvoreného sprievodičom planéty (spojnicou Slnko – planéta) a príslušného časového intervalu – plošný obsah vytvorený za jednotku času

potenciál gravitačného poľa – skalárna veličina určená podielom gravitačnej potenciálnej energie častice v danom bode poľa a hmotnosti tejto častice; jednotka J/kg

potenciálna energia → gravitačná potenciálna energia

princíp ekvivalencie – princíp, podľa ktorého nedokážeme rozlíšiť účinok gravitačného poľa od zrýchlenia neinerciálnej sústavy; pre každý bod priestoru v danom okamihu možno nájsť neinerciálnu sústavu, v ktorej účinky gravitačného poľa vymiznú

prvá kozmická rýchlosť – rýchlosť, ktorú treba udeliť telesu tesne nad povrchom Zeme v horizontálnom smere, aby sa pohybovalo po kružnici okolo stredu Zeme (pri určovaní jej veľkosti sa neráta s odporom vzduchu)

prvý Keplerov zákon – „planéty sa okolo Slnka pohybujú po elipsách, málo sa odlišujúcich od kružníc, pričom Slnko leží v ich spoločnom ohnisku“

tiažové zrýchlenie, zrýchlenie voľného pádu – zrýchlenie telesa, ktoré vo vákuu voľne padá vzhľadom na Zem; rovná sa veľkosti vektorového súčtu gravitačného zrýchlenia s inými zrýchleniami pozorovanými v neinerciálnej vzťažnej sústave viazanej na Zem, najmä s odstredivým zrýchlením

tretí Keplerov zákon – „pomer druhých mocnín obežných dôb ľubovoľných dvoch planét sa rovná pomeru tretích mocnín dĺžok hlavných polosí ich obežných dráh“

úniková rýchlosť → druhá kozmická rýchlosť

zotrvačná hmotnosť – miera zotrvačných vlastností telies; prejavuje sa pri zmenách ich pohybového stavu v inerciálnych vzťahných sústavách tým, že telesá s väčšou hmotnosťou dosahujú menšie zrýchlenie ako telesá s menšou hmotnosťou, pri pôsobení rovnako veľkej sily

zrýchlenie voľného pádu → tiažové zrýchlenie

Hydromechanika

Archimedov zákon – zákon o nadľahčovaní telies v tekutinách: „Teleso ponorené do tekutiny je nadľahčované silou, rovnajúcou sa tiaži tekutiny nahradenej telesom“

bar – jednotka tlaku; $1 \text{ bar} = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ (pascalov); $\cong$ atmosférický tlak

Bernoulliho rovnica – rovnica vyjadrujúca zákon zachovania mechanickej energie v laminárne prúdiacej kvapaline – „súčet kinetickej a potenciálnej energie jednotky objemu kvapaliny a jej tlaku je v každom bode prúdnice rovnaký

dokonalá kvapalina = ideálna kvapalina – nestlačiteľná kvapalina, bez prejavov vnútorného trenia (viskozity) pri prúdení

dynamická viskozita (η) $\rightarrow$ viskozita

hmotnostný prietok (q_m) – podiel hmotnosti kvapaliny ktorá pretiekla danou plochou (prierezom) a príslušného časového intervalu; jednotka kg/s

hustomer – prístroj na meranie hustoty kvapalín založený na meraní vztlakovej sily pôsobiacej na ponorený hustomer

hydrodynamická sila – sila pôsobiaca na teleso v kvapaline pri ich vzájomnom pohybe.

hydrodynamický tlak – tlak v prúdiacej kvapaline zmenšený o statický tlak; vyjadruje sa kinetickou energiou jednotky objemu prúdiacej kvapaliny

hydrodynamika – disciplína zaoberajúca sa dynamikou prúdiacich kvapalín a využitím zákonitostí ich prúdenia

hydromechanika – mechanika kvapalín, deliaca sa na hydrostatiku a hydrodynamiku

hydrostatický tlak – tlak pod hladinou nepohybujúcej sa kvapaliny, vyvolaný tiažou kvapaliny

hydrostatika = statika kvapalín – náuka o kvapalinách v pokoji, zaoberajúca sa tlakom v kvapalinách, vztlakovými silami a pod.

ideálna kvapalina $\rightarrow$ dokonalá kvapalina

kinematická viskozita (ν) – veličina zavedená ako podiel dynamickej viskozity a hustoty (objemovej hmotnosti) kvapaliny; jednotka m^2/s

koeficient viskozity $\rightarrow$ viskozita

kvapalina – látka v stave vyznačujúcom sa veľkou objemovou, ale takmer žiadnou tvarovou stálosťou, prispôsobujúca sa tvaru nádoby

laminárne prúdenie – prúdenie, pri ktorom sú prúdnice časovo stále, v malom objeme prakticky rovnobežné

medzná vrstva – tenká vrstva viskózne kvapaliny nehybne spojená s povrchom obtekaného telesa

nestacionárne prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa rýchlosť a tlak v kvapaline s časom menia

objemový prietok (q_v) – podiel objemu kvapaliny ktorá pretiekla danou plochou (prierezom) a príslušného časového intervalu; jednotka m^3/s

odpor prostredia – silové pôsobenie proti pohybu telesa v kvapalnom alebo plynnom prostredí

odporová sila – sila (brzdíaca sila) pôsobiaca proti pohybu telesa v kvapaline alebo plyne

pascal – jednotka tlaku; predstavuje tlak vytvorený silou veľkosti 1 newton, rovnomerne rozdelenou po ploche s obsahom 1 m^2 ; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Pascalov zákon – zákon o šírení sa vonkajšieho tlaku v kvapaline: „zmena tlaku v kvapaline nachádzajúcej sa v uzavretej nádobe vyvolaná vonkajším pôsobením, je vo všetkých miestach kvapaliny rovnako veľká“

plyn – látka v stave, v ktorom nemá tvarovú, ani objemovú stálosť, ľahko stlačiteľná

podtlak – rozdiel medzi vonkajším tlakom a tlakom v kvapaline, keď tlak v kvapaline je menší než vonkajší tlak

pretlak – rozdiel medzi tlakom v kvapaline a vonkajším tlakom, keď je vonkajší tlak menší

prúdnica = prúdová čiara – myslená čiara v prúdiacej kvapaline, ktorej dotyčnice sú v každom jej bode rovnobežné so smerom prúdenia kvapaliny

prúdová trubica – myslená trubica v laminárne prúdiacej kvapaline, tvorená prúdovými čiarami. Častice kvapaliny neprechádzajú stenami trubice

reálna kvapalina – kvapalina, v ktorej sa pri prúdení prejavuje vnútorné trenie

rovnica kontinuity → rovnica spojitosti toku

rovnica spojitosti toku = rovnica kontinuity – rovnica vyjadrujúca skutočnosť, že hmotnostný prietok každým prierezom prúdovej trubice je rovnaký

statický tlak v kvapaline – tlak v kvapaline na plochu, ktorá je vzhľadom na kvapalinu v pokoji

tekutina – látka v plynnom alebo kvapalnom stave

tlak v tekutine – podiel veľkosti sily pôsobiacej v tekutine kolmo na uvažovanú plochu a obsahu tejto plochy

Torricelliho vzorec – vzťah vyjadrujúci závislosť rýchlosti vytekajúcej ideálnej kvapaliny z otvoru v nádobe od výšky hladiny kvapaliny nad otvorom; platí, keď kvapalina vyteká len vplyvom svojej tiaže

turbulentné prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa tvar prúdnic rýchlo a nepravidelne mení

ustálené prúdenie – prúdenie, pri ktorom sa rýchlosť a tlak v ľubovoľnom mieste kvapaliny nemenia

Venturiho trubica – trubica v jednom mieste zúžená, slúžiaca na meranie objemového prietoku na základe rozdielu tlakov kvapaliny v miestach trubice s rozličnými prierezmi

viskozita – a) vlastnosť kvapalín a plynov, prejavujúca sa ich vnútorným trením
b) veličina (značka η) definovaná ako podiel tangenciálneho napätia medzi vrstvami prúdiacej kvapaliny a veľkosti gradientu rýchlosti v kolmom smere na smer prúdenia; jednotka Pa·s; pre túto veličinu sa používa aj názov *dynamická viskozita*

vnútorné trenie kvapaliny – vzájomné silové pôsobenie medzi susednými, vzájomne sa pohybujúcimi vrstvami viskózne kvapaliny; vedie k stratám mechanickej energie prúdiacej kvapaliny

vonkajší tlak – časť statického tlaku v kvapaline (alebo plyne), spôsobená vonkajšími silami, nie vlastnou tiažou kvapaliny

vztlaková sila – výslednica tlakových síl vyvolaných hydrostatickým tlakom na povrch telesa ponoreného do kvapaliny

ÚLOHY

Gravitačné pole

Údaje potrebné pri riešení úloh

gravitačná konštanta	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$
normálne gravitačné zrýchlenie	$g = 9,806 \text{ m/s}^2$
hmotnosť Zeme	$m_Z = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$
polomer Zeme	$R_Z = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$
hmotnosť Slnka	$m_S = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$
polomer Slnka	$R_S = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$
hmotnosť Mesiaca	$m_M = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg}$
polomer Mesiaca	$R_M = 1,74 \times 10^6 \text{ m}$
vzdialenosť Zem - Mesiac	$3,82 \times 10^8 \text{ m}$
hmotnosť Marsu	$6,4 \times 10^{23} \text{ kg}$
hmotnosť Venuše	$4,87 \times 10^{24} \text{ kg}$

1. Porovnajte dostredivé zrýchlenie Venuše, Zeme a Marsu na ich približne kruhových obežných dráhach, pri pohybe okolo Slnka. Počítať môžete jednak pomocou gravitačného zákona, jednak pomocou parametrov obežných dráh.

Výsledok: $a_V \cong 1,13 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$, $a_Z \cong 5,95 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$, $a_M \cong 2,56 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$.

2. Vypočítajte, medzi ktorými telesami pôsobí väčšia gravitačná sila – či medzi Slnkom a Zemou, alebo medzi Zemou a Mesiacom. Počítajte a) na základe gravitačného zákona, b) pomocou zákona sily a parametrov obežných dráh.

Výsledok: $F_{S-Z} \cong 3,6 \times 10^{22} \text{ N}$, $F_{Z-M} \cong 2 \times 10^{20} \text{ N}$.

3. Dve rovnako veľké homogénne telesá guľového tvaru sa dotýkajú a priťahujú gravitačnou silou F_1 . a) Aká veľká by bola príťažlivá sila F_2 , keby sa hmotnosť každej z guľí zdvojnásobila, pri zachovaní hustoty materiálu? b) Aká by bola príťažlivá sila F_3 , keby sa pri zachovaní hustoty zdvojnásobili polomery guľí?

Výsledok: $F_2 = \sqrt[3]{16} F_1$, $F_3 = 16 F_1$.

4. Vypočítajte veľkosť gravitačnej sily medzi útvarom s tvarom kružnice (hmotnosť M , polomer R) a časticou s hmotnosťou m , ležiacou vo vzdialenosti a od roviny kružnice na jej osi. Posúďte ako sa zmení výsledný vzťah, keď polomer kružnice R bude podstatne menší ako vzdialenosť a .

Výsledok: $F_g = (GmMa)/(a^2 + R^2)^{3/2}$

5. Vypočítajte hmotnosť Zeme z doby obehu (27,3 dňa) a polomeru kruhovej trajektórie Mesiaca okolo Zeme.

Výsledok: $m_Z = 5,93 \times 10^{24}$ kg.

6. V špičkovom metrologickom laboratóriu majú rovnoramenné váhy, ktoré dokážu zaznamenať rozdiel hmotností 1×10^{-9} kg. Na ramená takýchto váh zavesíme dokonale rovnaké závažia s hmotnosťami po 1 kg, pričom závesy sú rovnako ťažké, ibaže jeden z nich o 1 m dlhší. Nižšie položené závažie je k Zemi priťahované väčšou silou. Dokážeme týmito váhami rozlíšiť rozdiel tiaží závaží?

Výsledok: Dokážeme.

7. Aká by musela byť minimálna uhlová rýchlosť Zeme, aby sa telesá na rovníku neudržali gravitačnou silou, ale zotrvačnosťou by sa od Zeme odtrhli?

Výsledok: $\omega \cong 1,24 \times 10^{-3}$ rad/s = 256°/h.

8. Vypočítajte veľkosť gravitačnej sily F_g medzi homogénnou tyčou (dĺžka L , hmotnosť M) a telieskom s hmotnosťou m nachádzajúcim sa vo vzdialenosti a od konca tyče na priamke, ktorá je predĺžením tyče. Posúďte ako sa zmení výsledný vzťah, keď vzdialenosť a bude podstatne väčšia než dĺžka tyče L .

Výsledok: $F_g = GmM/[a(a + L)]$.

9. Medzi tyčou (dĺžka L , hmotnosť M_1) a telieskom s hmotnosťou m ležiacimi na jednej priamke, pôsobí gravitačná sila F_1 (úloha 8). Teliesko leží vo vzdialenosti a od konca tyče. Tyč nahradíme bodovým telesom s hmotnosťou M_2 a umiestnime ho na miesto, kde ležal stred tyče. Aká musí byť hmotnosť M_2 , aby sa gravitačná sila pôsobiaca na teliesko s hmotnosťou m nezmenila?

Výsledok: $M_2 = M_1(a + L/2)^2/[a(a + L)]$.

10. Vypočítajte veľkosť vzájomnej potenciálnej energie homogénneho útvaru s tvarom kružnice (hmotnosť M , polomer R) a častice s hmotnosťou m , ktorá leží na osi kružnice vo vzdialenosti a od roviny kružnice. Výsledok posúďte pre prípad, že R je podstatne menšie než a .

Výsledok: $W_p = -GmM/\sqrt{a^2 + R^2}$.

11. Do akej výšky h by vo vákuu vyletelo teleso vystrelené začiatočnou rýchlosťou $v_1 = 1,2$ km/s zvislo nahor? Počítajte

a) použitím vzťahu gravitačnej polohovej energie,

b) použitím zjednodušeného vzťahu $W_p = mgh$.

Výsledok: a) $h \cong 75,9$ km, b) $h \cong 73,4$ km.

12. Vypočítajte vzájomnú gravitačnú potenciálnu energiu tyče (hmotnosť M , dĺžka L) a telieska s hmotnosťou m , ktoré sa nachádza vo vzdialenosti a od konca tyče na priamke, ktorá je jej predĺžením.

Výsledok: $W_p = -G[mM/L] \ln[(a + L)/a]$.

13. Vypočítajte veľkosť energie E , ktorú by bolo potrebné dodať Mesiacu, aby sa odpútal od Zeme (vzdialil do nekonečna).

Výsledok: $E = 7,76 \times 10^{28} \text{ J} = 2,16 \times 10^{22} \text{ kWh}$.

14. Porovnajte absolútne hodnoty kinetickej W_k a potenciálnej W_p energie družice obiehajúcej vo výške h nad zemským povrchom po kruhovej trajektórii.

Výsledok: $W_k = (1/2)|W_p|$.

15. Aká veľká práca W je potrebná na umiestnenie geostacionárnej družice s hmotnosťou $m = 1000 \text{ kg}$ na obežnú dráhu? S odporom vzduchu pri štarte neuvažujte. Prácu vypočítajte ako rozdiel príslušných energií družice.

Výsledok: $W \cong 17 \text{ MWh}$.

16. V akej vzdialenosti x od stredu Zeme leží bod na spojnici Zem – Mesiak, v ktorom sa gravitačné pôsobenie týchto telies navzájom ruší?

Výsledok: $x = (9/10) d$.

17. Aké veľké je gravitačné zrýchlenie na povrchu planéty Mars, ktorej hmotnosť je iba 0,107 hmotnosti Zeme a má polomer $R = 3400 \text{ km}$?

Výsledok: $g = 3,7 \text{ m/s}^2$.

18. V akej vzdialenosti d od stredu Zeme je gravitačné zrýchlenie rovnaké ako na povrchu Mesiaca?

Výsledok: $d \cong 2,45 R$, $R = 6370 \text{ km}$.

19. Aká veľká je úniková rýchlosť z povrchu planéty Mars? (potrebné údaje sú uvedené v úlohe 17).

Výsledok: $v_u = 5 \text{ km/s}$.

20. Vo výške zodpovedajúcej trajektórii geostacionárnej družice je úniková rýchlosť v_u menšia než na povrchu Zeme. Aký je pomer tejto rýchlosti v_u a obežnej rýchlosti v_o geostacionárnej družice?

Výsledok: $v_u/v_o = \sqrt{2}$.

21. Vypočítajte obežnú dobu stanice ISS (International Space Station) lietajúcej po kruhovej trajektórii vo výške 345 km nad povrchom Zeme.

Výsledok: $T \cong 91,4 \text{ min}$.

Hydromechanika

Údaje potrebné pri riešení úloh

normálny atmosférický tlak	$1,013\,25 \times 10^5 \text{ Pa}$
normálne gravitačné zrýchlenie	$g = 9,806 \text{ m/s}^2$
hustota vody	1000 kg/m^3
hustota ľadu	$917,6 \text{ kg/m}^3$
hustota ortuti	$13\,546 \text{ kg/m}^3$
hustota suchého vzduchu pri $0\,^\circ\text{C}$	$1,293\,2 \text{ kg/m}^3$

22. Akou tiažovou silou F pôsobí vzduch na podlahu miestnosti, ktorá má rozmery $(3 \text{ m} \times 4 \text{ m} \times 2,4 \text{ m})$?

Výsledok: $F \cong 12 \times 10^5 \text{ N}$.

23. Pod hladinou vody, vplyvom jej tiaže, stúpa tlak s rastúcou hĺbkou. V akej hĺbke h dosiahne tlak dvojnásobok atmosférického tlaku?

Výsledok: $h \cong 10 \text{ m}$.

24. Trubica s tvarom písmena U (spodná časť je vodorovná) je čiastočne naplnená dvomi nemiešajúcimi sa kvapalinami s hustotami ρ_1 a ρ_2 , pričom každá z nich zaplní rovnakú dĺžku v trubici (označme ju $\ell/2$). Aký veľký je rozdiel výšok hladín medzi ramenami trubice, ak spodná – vodorovná časť trubice – má dĺžku $d < \ell/2$?

Výsledok: $h_2 - h_1 = (\ell - d)(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$.

25. V ortuťovom barometri mal stĺpec dĺžku 741 mm , teplotu $-5\,^\circ\text{C}$. Aký bol atmosférický tlak v mieste barometra, ak je tam lokálne tiažové zrýchlenie $g = 9,790 \text{ m/s}^2$ a hustota ortuti pri uvedenej teplote je $\rho = 13,608 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$?

Výsledok: $p = 0,9872 \text{ bar}$.

26. Hustota morskej vody s teplotou tesne nad $0\,^\circ\text{C}$ je $\rho_1 = 1024 \text{ kg/m}^3$, hustota ľadu ktorý na nej pláva $\rho_2 = 917 \text{ kg/m}^3$. Aká časť V_1 celkového objemu V ľadovej kryhy vyčnieva nad vodu?

Výsledok: $V_1/V = 0,1045$.

27. Vyjadrite polomer prúdovej trubice vody vytekajúcej z vodovodu, ako funkciu vzdialenosti y od ústia vodovodu (polomer ústia vodovodu r_o , rýchlosť vody v ústí v_o).

Výsledok: $r_y^2 = (r_o^2 v_o) / \sqrt{v_o^2 + 2gy}$.

28. Do valcovej nádoby sme naliali liter vody (hustota $\rho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3$) a liter čistého liehu ($\rho_2 = 780 \text{ kg/m}^3$). Akým hydrostatickým tlakom p_h pôsobí zmes týchto kvapalín na dno nádoby, ktorého plošný obsah je 100 cm^2 ?

Výsledok: $p_h \cong 1617 \text{ Pa}$.

29. Tlak krvi sa udáva v jednotkách mmHg a u zdravého jedinca dosahuje hodnotu $p_1 = 120 \text{ mmHg}$. Vyjadrite tento tlak v jednotkách pascal a bar.

Výsledok: $\cong 15\,998 \text{ Pa} = 0,15998 \text{ bar}$.

30. Vypočítajte veľkosť sily F_1 , ktorá by začala pôsobiť na okno výkladu s rozmermi $2 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, pri náhlom zväčšení atmosférického tlaku z vonkajšej strany o 1 %. Akú hmotnosť m_1 by muselo mať teleso, aby sa jeho tiaž vyrovnala sile F_1 ?

Výsledok: $F_1 \cong 6 \cdot 10^3 \text{ N}$, $m_1 \cong 611 \text{ kg}$.

31. Vypočítajte rozdiel tlakov Δp vo vodnom stĺpci medzi dvomi miestami vertikálne navzájom vzdialenými o 175 cm (výška človeka) a porovnajte so systolickým tlakom krvi zdravého človeka (120 mmHg).

Výsledok: $\Delta p = 2 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 150 \text{ mmHg}$.

32. V roku 2005 uviazla v hĺbke 150 m pod hladinou mora experimentálna ponorka. Akou silou F_1 by musela posádka ponorky tlačiť na únikový poklop s rozmermi $40 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$, aby ho dokázala v tejto hĺbke otvoriť? Akú hmotnosť m_1 má teleso, ktorého tiaž sa rovná sile F_1 ?

Výsledok: $F_1 = 2,94 \times 10^5 \text{ N}$, $m_1 \cong 30 \text{ ton}$.

33. Kvapalina s hustotou ρ zaplňa nádobu do výšky h . Akým tlakom p_1 pôsobí kvapalina na dno nádoby, ak sa táto pohybuje zrýchlením a zvislo nahor?

Výsledok: $p_1 = \rho(g + a)h$.

34. Dve rovnaké nádoby stoja na stole a v dolnej časti sú prepojené rúrkou s ventilom. Obsah základne každej z nich je S . Jedna nádoba je naplnená vodou do výšky h , druhá do výšky $h/3$. Akú prácu W vykonajú gravitačné sily od otvorenia ventilu až po vyrovnanie hladín? Hustota vody je ρ .

Výsledok: $W = (1/9)S\rho gh^2$.

35. Aký podtlak Δp musíte pľúcami vyvinúť na hornom konci 15 cm dlhej slamky, aby ste cez ňu mohli z hrnčeka piť čaj? Podtlak vyjadrite ako zlomok atmosférického tlaku p_b .

Výsledok: $\Delta p \cong 0,0147 p_b$.

36. Plný drevený hranol pláva na vode, pričom nad vodou je 30 % jeho objemu. Koľko percent objemu bude vyčnievať, ak ho položíme na ortuť?

Výsledok: pribl. 95 %.

37. Dutá guľa s vonkajším polomerom $r_1 = 10$ cm a vnútorným polomerom $r_2 = 9,7$ cm pláva na vode tak, že je ponorená do polovice. Aká je hustota ρ_m materiálu, z ktorého je guľa zhotovená? Hustotu vyjadrite ako násobok hustoty vody ρ_v .

Výsledok: $\rho_m \cong 5,73 \rho_v$.

38. Skúšobné teliesko s hustotou ρ_t na vzduchu pôsobilo na pružinové váhy silou F_1 . Ponorené do kvapaliny pôsobilo na ne silou F_2 . Vypočítajte hustotu ρ_k kvapaliny. Počítajte aj so vztlakovou silou vzduchu, ktorý má hustotu ρ_v .

Výsledok: $\rho_k = \rho_t - (F_2/F_1)(\rho_t - \rho_v)$.

39. Vodorovným potrubím, ktorého vnútorný prierez $S_1 = 1$ m², tečie voda rýchlosťou $v_1 = 50$ cm/s, pričom v istom mieste sa potrubie zužuje na prierez $S_2 = 0,2$ m². Aký výkon P musí mať čerpadlo, aby dokázalo vodu pretláčať do užšieho prierezu?

Výsledok: $P = 1500$ W.

40. V suteréne obytného domu je horizontálne potrubie na rozvod vody, pričom rúra má vnútorný polomer $r_1 = 10$ cm, v potrubí je tlak $p_1 = 5$ bar. Na poschodí o 9 metrov vyššie otvoríme kohútik vodovodu, ktorým začne tiecť voda s objemovým prietokom $q_v = 3$ l/min. Vnútorný polomer vertikálnej rúry k vodovodu je $r_2 = 1,5$ cm. Vypočítajte rýchlosť v_1 prúdenia vody v horizontálnom rozvode, ako aj tlak p_2 vody vo vodovodnom kohútiku pred jeho otvorením, a tlak p_3 po otvorení, ak predpokladáme, že sa pritom tlak vo vodorovnom potrubí nezmenil.

Výsledok: $v_1 \cong 0,16$ cm/s, $p_2 \cong 4,12$ bar, $p_3 \cong p_2$ (pokles tlaku je zanedbateľný).

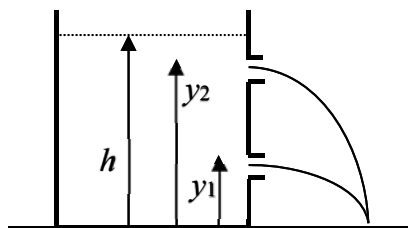
41. Vo veľkej uzavretej cisterne s vodou, na jej bočnej stene v hĺbke $h = 2$ m pod hladinou vody, je ventil s prierezom $S_1 = 6$ cm². Nad hladinou je ešte voľný priestor naplnený vzduchom, v ktorom je tlak $p_1 = 3 \times 10^5$ Pa. Aký bude objemový prietok q_v vody ventilom hneď po jeho otvorení?

Výsledok: $q_v = 12,6$ l/s.

42. Vypočítajte, akou silou F pôsobí víchrica s rýchlosťou vetra $v_1 = 108$ km/h na stenu domu s rozmermi 10 m $\times$ 6 m. Predpokladajme, že pri nápore na stenu vzduch stráca celú svoju kinetickú energiu.

Výsledok: $F = 3 \times 10^4 \text{ N}$.

43. Do zvislej bočnej steny veľkej nádoby položenej na stole navrtáme dva otvory vo výškach y_1, y_2 nad dnom nádoby, pričom hladina vody je vo výške h . Aký musí byť vzťah medzi výškami y_1 a y_2 , aby voda striekajúca z otvorov dopadla na stôl v rovnakej vzdialenosti od steny nádoby?



Výsledok: $y_1 + y_2 = h$.

44. V akej výške y_1 nad dnom nádoby treba navrtáť otvor do jej zvislej bočnej steny, aby voda striekajúca z otvoru dopadla v najväčšej vzdialenosti na stôl, na ktorom je nádoba postavená. Hladina vody je vo výške h nad dnom nádoby.

Výsledok: $y_1 = h/2$.

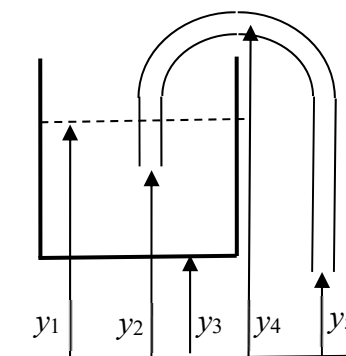
45. Popri jednej zo železníc bol v XIX. storočí vytvorený kanál naplnený vodou, z ktorého sa do parných lokomotív mohla za jazdy čerpať voda ponorením rúry, ktorá bola na dolnom konci zahnutá v smere jazdy, takže do nej prúdila voda. Vodu bolo treba dopraviť do výšky $h = 5 \text{ m}$ rúrou, ktorá mala vnútorný priemer 20 cm . Akou rýchlosťou v_1 sa musel vlak pohybovať, aby sa pri prejení vzdialenosti $d = 1 \text{ km}$ podarilo načerpať objem $V = 3 \text{ m}^3$ vody?

Výsledok: $v_1 \cong 36 \text{ km/h}$.

46. Na vozíku je umiestnená nádoba naplnená vodou do výšky $h = 50 \text{ cm}$ nad dnom. Tesne nad dnom v bočnej stene je umiestnený ventil s prierezom $S = 25 \text{ cm}^2$. Hmotnosť vozíka spolu s naplnenou nádobou $m = 20 \text{ kg}$. Akým zrýchlením a_1 sa začne vozík pohybovať, ak ventil otvoríme a začne z neho vodorovným smerom striekať voda?

Výsledok: $a_1 = 1,25 \text{ m/s}^2$.

47. Akou rýchlosťou v_1 bude vytekať voda z násosky nakreslenej na obrázku? Hladina vody sa nachádza vo vzdialenosti y_1 nad rovinou zvolenou za základ odčítavania výšky, horné ústie násosky vo výške y_2 , dno nádoby vo výške y_3 , horný ohyb násosky – y_4 . Spodné ústie násosky je nižšie ako dno nádoby vo výške y_5 . Aký je objemový prietok q_v násoskou, ak jej prierez je S ?



Výsledok: $v_1 = \sqrt{2g(y_1 - y_5)}$, $q_v = Sv_1$.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

- Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovits V., Mařar J.: Mechanika a molekulová fyzika,
ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do štatistickej fyziky a termodynamiky,
ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

- Friš S. E., Timoreva A. V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Příručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I. V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski-Krakau-Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

- Sacharov D. I., Kosminkov I. S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Příklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

- Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

Ivan Červeň, Peter Bokes

Fyzika po kapitolách, časť 5.
Gravitačné pole, Hydromechanika

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo vydavateľstve STU SPEKTRUM v roku 2023

Rozsah 82 strán, 27 obrázkov, 1 tabuľka,
4,165 AH, 4,313 VH

85 – 223 – 23

ISBN 978-80-227-5350-0