

FYZIKA PO KAPITOLÁCH

Magnetické pole

Ivan Červeň, Peter Bokes

Slovenská technická univerzita v Bratislave

2023

Druhé, upravené a doplnené vydanie publikácie bolo realizované
s podporou KEGA v rámci projektu 006STU-4/2022
„Digitálna podpora predmetov fyzikálneho inžinierstva“

© Ivan Červeň, Peter Bokes

Recenzenti:

prof. Ing. Július Cirák, CSc.

doc. Ing. Ján Vajda, CSc.

ISBN 978-80-227-5353-1

MAGNETICKÉ POLE

Magnetické pole sa prejavuje silovým pôsobením na elektricky nabitú časticu, ktoré sa vzhľadom na pozorovateľa pohybujú. Takéto častice vytvárajú elektrický prúd. Na nepohybujúcu sa nabitú časticu (stručne na elektrický náboj) magnetické pole nepôsobí. Zo skúsenosti však vieme, že dva magnety na seba pôsobia silou aj vtedy, ak sa vzájomne, ani vzhľadom na pozorovateľa nepohybujú. Ale aj tento prípad možno vysvetliť pomocou elementárnych elektrických prúdov na atomárnej úrovni. Pohybujúce sa elektricky nabitú častice, teda elektrický prúd, nielen že podliehajú pôsobeniu magnetického poľa, ale sami vo svojom okolí vytvárajú magnetické pole. Na dôkladný kvalitatívny, ale najmä kvantitatívny opis týchto javov treba zaviesť veličiny, ktorými sa magnetické pole charakterizuje. To je predmetom *prvej podkapitoly – o silách v magnetickom poli*. *Druhá podkapitola* opisuje vznik magnetického poľa v okolí vodičov elektrického prúdu, zavádza magnetický tok a končí uvedením príslušnej Maxwellovej rovnice. *Tretia podkapitola* opisuje vlastnosti magnetického dipólu a poľa v jeho okolí. Posledná – *štvrtá podkapitola* je venovaná opisu magnetického poľa v prostredí, na rozdiel od predchádzajúcich podkapitol, ktoré opisujú pole vo vákuu, ktoré je prakticky zhodné s poľom vo vzduchu.

Potrebné vedomosti

Treba poznať základné pojmy zavedené v mechanike, ako sila, práca, energia. Treba ovládať základné definície a vzťahy týkajúce sa elektrického prúdu, rovnicu kontinuity. Opis magnetického poľa je dôsledne vektorový, preto vedomosti aj z tejto oblasti sú potrebné, vrátane použitia nabla operátora opísaného v kapitole o vektoroch (gradient, divergencia, rotácia). Znalosť diferenciálneho a integrálneho počtu je rovnako nevyhnutná, vrátane jeho aplikácií na vektorové funkcie, ako derivácia skalárnej i vektorovej funkcie viacerých premenných.

OBSAH

TEXTY

10.1	Sily v magnetickom poli	
10.1.1	Sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj	5
10.1.2	Sila pôsobiaca na vodič elektrického prúdu	7
10.1.3	Moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku	10
10.2	Magnetické pole v okolí vodičov prúdu	
10.2.1	Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah	13
10.2.2	Magnetické pole v okolí dlhého priameho vodiča	15
10.2.3	Magnetické pole na osi kruhového závit	17
10.2.4	Cirkulácia vektora magnetickej indukcie	19
10.2.5	Magnetický tok, 2. Maxwellova rovnica	22
10.2.6	Definícia jednotky elektrického prúdu	26
10.3	Magnetický dipól	
10.3.1	Magnetický moment	28
10.3.2	Potenciálna energia dipólu	30
10.3.3	Magnetické pole v okolí dipólu	31
10.3.4	Magnetomechanické javy, precesia dipólu	34
10.4	Magnetické pole v prostredí	
10.4.1	Vektory magnetizácie a magnetickej polarizácie	37
10.4.2	Intenzita magnetického poľa	39
10.4.3	Zákon celkového prúdu	41
10.4.4	Magnetická susceptibilita, magnetické látky	42

DODATKY

D1	Objasnenie vzťahu (10.3.4.1)	45
D2	Rovnica pre vektorový potenciál	46
D3	Magnetické pole v rovine prúdovej slučky	47
D4	Vektorový potenciál a pole prúdovej slučky	48
D5	Magnetizácia a magnetické pole	50
D6	Súvis magnetizácie s povrchovými prúdmi	51
SÚHRN VZŤAHOV		52
SLOVNÍK		54
ÚLOHY		58

10.1 Sily v magnetickom poli

Kľúčové slová

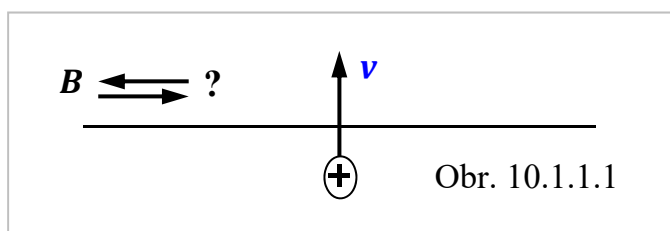
Magnetické pole, magnetická sila, magnetická indukcia, Lorentzova sila

10.1.1 Sila pôsobiaca na pohybujúci sa náboj, vektor magnetickej indukcie

Na kvantitatívny opis magnetického poľa sa používa vektorová veličina **magnetická indukcia** (značka $\mathbf{B}$). V magnetickom poli má podobný význam ako vektor intenzity $\mathbf{E}$ v elektrickom poli. Na časticu s nábojom Q pôsobí v elektrickom poli sila $\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$. V magnetickom poli, vo vzťahu vyjadrujúcom **magnetickú silu** $\mathbf{F}_m$, vystupuje rýchlosť častice (náboja) $\mathbf{v}$, lebo veľkosť sily závisí od jej rýchlosti:

$$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (10.1.1.1)$$

Pre silu $\mathbf{F}_m$ sa používa aj pomenovanie **Lorentzova sila**. Tento vzťah, vyplývajúci z pokusov, sa všeobecne považuje za definičný pre magnetickú indukciu $\mathbf{B}$. Na určenie vektora $\mathbf{B}$ na základe vzťahu (10.1.1.1) treba vykonať experimenty, v ktorých sa zmeria veľkosť a smer sily pôsobiacej na časticu s nábojom Q pohybujúcu sa rýchlosťou $\mathbf{v}$. Napríklad smer zemského magnetického poľa určíme postupnou zmenou smeru vektora rýchlosti častice. Ten smer vektora rýchlosti, pri ktorom sila pôsobiaca na časticu je nulová, je podľa definičného vzťahu rovnobežný (súhlasne, či nesúhlasne) so smerom vektora $\mathbf{B}$. Ak necháme časticu pohybovať sa kolmo na tento smer, pre veľkosť sily platí $F = QvB$, čo tiež vyplýva z definičného vzťahu. Ak poznáme rýchlosť častice a veľkosť jej náboja, zmeraním veľkosti sily dokážeme určiť



veľkosť vektora magnetickej indukcie. Na obrázku je nakreslená horizontálna priamka, s ktorou je vektor $\mathbf{B}$ rovnobežný, vektor rýchlosti $\mathbf{v}$ častice (nesúcej kladný elektrický náboj) smeruje nahor. Vektor sily pôsobiacej na časticu je v tomto prípade kolmý na nákresňu, lebo podľa definičného vzťahu je kolmý na rýchlosť častice i na vektor $\mathbf{B}$. Ak sila smeruje za nákresňu, vektor magnetickej indukcie musí smerovať vpravo. Ak sila smeruje pred nákresňu, vektor $\mathbf{B}$ smeruje vľavo. Zmenou náboja častice na záporný, zmení sa smer sily na opačný, čo však neovplyvní smer vektora magnetickej indukcie.

Jednotka magnetickej indukcie v SI má názov **tesla** (značka T). Je to odvodená jednotka a jej fyzikálny rozmer vyjadrený pomocou základných jednotiek SI získame z definičného vzťahu:

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot (\text{m/s})} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \frac{1}{\text{A} \cdot \text{s}} \frac{\text{s}}{\text{m}} = 1 \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} . \quad (10.1.1.2)$$

Spojením vzťahov vyjadrujúcich sily pôsobiace na nabitú časticu v elektrickom a v magnetickom poli, získame všeobecný vzťah vyjadrujúci silu pôsobiacu na nabitú časticu v elektromagnetickom poli:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (10.1.1.3)$$

V niektorých prameňoch sa uvádza pod názvom **Lorentzova sila**, ale v mnohých iných prameňoch sa za Lorentzovu silu považuje len jej „magnetická“ časť.

Sila $\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ má pozoruhodnú vlastnosť v tom, že nekoná prácu, takže nemôže zmeniť kinetickú energiu pohybujúcej sa častice. Častica, ktorá sa pohybuje rýchlosťou $\mathbf{v}$, za elementárny časový interval dt sa premiestni o $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$. Dosadením do vzťahu vyjadrujúceho prácu dostaneme

$$dW = \mathbf{F}_m \cdot d\mathbf{r} = (Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt . \quad (10.1.1.4)$$

Vo vzťahu vystupuje zmiešaný súčin s dvomi rovnakými vektormi $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v}$, ktorý sa rovná nule. Magnetická sila pôsobí kolmo na vektor rýchlosti častice, takže nemení veľkosť rýchlosti, ale len jej smer. Preto Lorentzova sila nemení kinetickú energiu častice.

Príklad 10.1.1.1 Akou maximálnou magnetickou silou môže na elektrón v televíznej obrazovke pôsobiť magnetické pole vychýľovacej cievky (pribl. 10^{-2} T), keď elektrón bol urýchlený elektrickým napätím 5 kV? Aké zrýchlenie udelí elektrónu magnetická sila?

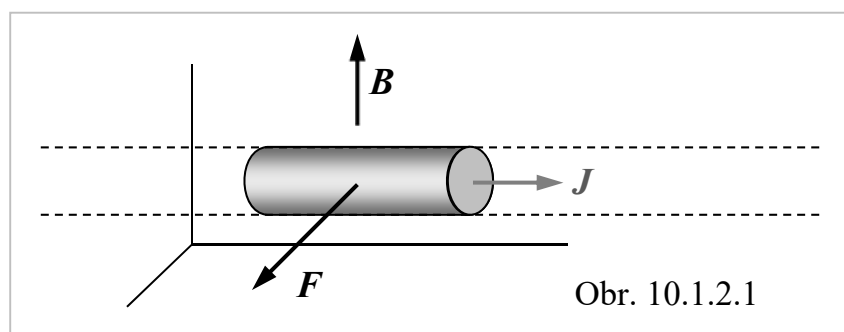
Riešenie: Pri urýchlení elektrónu napätím nie väčším ako $U = 5$ kV možno na výpočet jeho rýchlosti použiť klasický vzťah $eU = (1/2)mv^2$, odkiaľ $v = (2eU/m)^{1/2}$. Dosadením do vzťahu pre magnetickú silu dostaneme $F_m = eB(2eU/m)^{1/2}$ a po dosadení hodnôt $F_m \cong 6,4 \times 10^{-14}$ N. Táto sila udelí elektrónu zrýchlenie $a = F_m/m \cong (6,4 \times 10^{-14} \text{ N}) / (10^{-30} \text{ kg}) = 6,4 \times 10^{16} \text{ m/s}^2$. Zrýchlenie je teda obrovské, z hľadiska makroskopických dejov pre človeka nepredstaviteľné, ale naznačuje, ako rýchlo možno usmerniť pohyb elektrónov obrazovke.

Kontrolné otázky

1. Pri akom vzájomnom smere vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$ je sila pôsobiaca na elektricky nabitú časticu najväčšia?
2. Pri akom vzájomnom smere vektorov $\mathbf{v}$ a $\mathbf{B}$ je sila pôsobiaca na časticu nulová?
3. Ako sa nazýva veličina a jednotka v SI, ktorou charakterizujeme magnetické pole?
4. Závisí smer magnetickej sily pôsobiacej na letiacu časticu od znamienka jej elektrického náboja?

10.1.2 Sila pôsobiaca na vodič elektrického prúdu

Elektrický prúd vo vodiči je vytváraný pohybom obrovského počtu elektrónov. Elektróny, ktoré sú pri izbových teplotách v tepelnej rovnováhe so svojim okolím (atómami vodiča, jeho kryštálovou mriežkou), pohybujú sa náhodnými smermi aj bez pôsobenia elektrického poľa a to veľkými rýchlosťami, ktorých stredná hodnota je rádovo 10^5 m/s. Narážajú do atómov vodiča, odovzdávajú im časť svojej hybnosti, a tak pôsobia silami na vodič. Vektorový súčet týchto síl, aj ich impulzov pôsobiacich hoci v pomerne malej časti vodiča, je vzhľadom na náhodný smer pohybu veľkého počtu elektrónov nulový. Pokiaľ vodičom neprechádza elektrický prúd a vodič sa nachádza v magnetickom poli, nulový je aj vektorový súčet magnetických síl pôsobiacich na chaoticky sa pohybujúce elektróny. Keď však vodičom prechádza elektrický prúd, celý súbor elektrónov sa pohybuje vodičom jedným smerom priemernou transportnou rýchlosťou. Napriek tomu, že táto rýchlosť je malá (predstavuje iba zlomky milimetra za sekundu), podmieňuje vznik pozorovateľnej magnetickej sily pôsobiacej na vodič v magnetickom poli. Elektróny sú magnetickým poľom vychyľované z pôvodného smeru transportnej rýchlosti, narážajú do atómov, ale už nie iba chaoticky, ale čiastočne aj usmernené jedným smerom. To vyvoláva makroskopicky pozorovateľnú silu pôsobiacu na vodič.



Pri kvantitatívnom opise pôsobenia magnetického poľa na vodič prúdu budeme predpokladať, že vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ je kolmý na vektor hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}$, ktorý s transportnou rýchlosťou $\mathbf{v}_d$ súvisí vzťahom $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_d$ (vzťah (9.2.1.3)). V tomto vzťahu vystupuje objemová hustota ρ elektrického náboja

voľných elektrónov, ktorá je záporná, takže vektor hustoty prúdu má opačný smer ako transportná rýchlosť elektrónov. V záujme zjednodušenia úvah, aby sme výpočet nekomplikovali znamienkami, budeme dočasne predpokladať, že elektrický prúd je vytváraný pohybom voľných kladne nabitých častíc, ktoré majú hmotnosť m_e a nesú elementárny elektrický náboj e . Na základe uvedených predpokladov môžeme pre veľkosť magnetickej sily pôsobiacej na každú takúto časticu napísať vzťah (v súlade so vzťahom (10.1.1.1)):

$$F = e v_d B . \quad (10.1.2.1)$$

Ak sa v jednotkovom objeme vodiča nachádza n voľných častíc, potom na častice nachádzajúce sa v objeme veľkosti V pôsobí celková sila

$$F_V = V n e v_d B . \quad (10.1.2.2)$$

Súčin ne predstavuje objemovú hustotu elektrického náboja voľných častíc sprostredkujúcich prúd – $\rho = ne$, a súčin $nev_d = J$ hustotu elektrického prúdu nimi vytváranú. Podiel celkovej sily F_V pôsobiacej na častice v objeme V a tohto objemu (t. j. sila pripadajúca na jednotkový objem) sa potom vyjadruje vzťahom:

$$F_V / V = JB . \quad (10.1.2.3)$$

Takže platí vzťah $F_V = JB V$, na základe ktorého sila pôsobiaca na vodič s prierezom S a elementárnou dĺžkou $d\ell$ má veľkosť:

$$dF_V = JB dV = JB S d\ell = (JS)B d\ell = I B d\ell . \quad (10.1.2.4)$$

Sila $\mathbf{F} = e\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ pôsobiaca na kladne nabitú časticu vo vodiči je kolmá na vektor transportnej rýchlosti, a teda aj na priamy vodič (obrázok 10.1.2.1). Počas krátkeho časového intervalu Δt táto sila vyvolá zmenu hybnosti častice

$$\Delta \mathbf{p} = m_e \Delta \mathbf{v}_d ,$$

pričom zmena rýchlosti $\Delta \mathbf{v}_d$ a teda aj zmena hybnosti $\Delta \mathbf{p}$, má smer pôsobiacej sily, je kolmá na transportnú rýchlosť, čiže na pozdĺžnu os vodiča. Častica nesúca elektrický náboj pri náraze na najbližší atóm časť tejto hybnosti atómu odovzdá. Obrovský počet voľných častíc v objemovej jednotke vyvolá makroskopicky pozorovateľnú silu.

Vzťah (10.1.2.4) sa zvyčajne uvádza vo vektorovom tvare, ako sila $d\mathbf{F}$ pôsobiaca na vodič elementárnej dĺžky $d\ell$, pričom tejto dĺžke sa pridáva vektorový charakter tak, že sa smer elementu $d\ell$ stotožňuje so smerom vektora hustoty elektrického prúdu $\mathbf{J}$. Ak zavedieme jednotkový vektor $\boldsymbol{\eta}$ tak, aby bol s nimi súhlasne rovnobežný, môžeme napísať vzťahy:

$$d\ell = d\ell \boldsymbol{\eta} , \quad \mathbf{v}_d = v_d \boldsymbol{\eta} ,$$

čo využijeme pri úprave výrazu vyjadrujúceho prúdový element $I d\ell$:

$$I d\ell = I d\ell \boldsymbol{\eta} = JS d\ell \boldsymbol{\eta} = \rho v_d S d\ell \boldsymbol{\eta} = v_d \boldsymbol{\eta} (\rho S d\ell) = \mathbf{v}_d dQ .$$

Sila pôsobiaca na náboj elementárnej veľkosti dQ , pohybujúci sa rýchlosťou $\mathbf{v}_d$ v magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B}$ je

$$d\mathbf{F} = dQ \mathbf{v}_d \times \mathbf{B}, \quad (10.1.2.5)$$

z čoho vyplýva, že na úsek vodiča s elementárnou dĺžkou $d\ell$, ktorým prechádza prúd I , pôsobí sila

$$d\mathbf{F} = I d\ell \times \mathbf{B}. \quad (10.1.2.6)$$

To je korektná vektorová formulácia tzv. **Ampérovej sily** pôsobiacej na element prúdovodiča.

Keby sme namiesto kladne nabitých častíc urobili celú úvahu so záporne nabitými elektrónmi, na výslednom vzťahu (10.1.2.6) by sa nič nezmenilo. Elektróny sa vo vodiči síce pohybujú opačným smerom ako hypotetické kladné častice, takže vo vzťahu (10.2.1.5) sa zmení smer transportnej rýchlosti na opačný, ale súčasne sa zmení aj znamienko náboja. Preto sa smer sily $d\mathbf{F}$ nezmení.

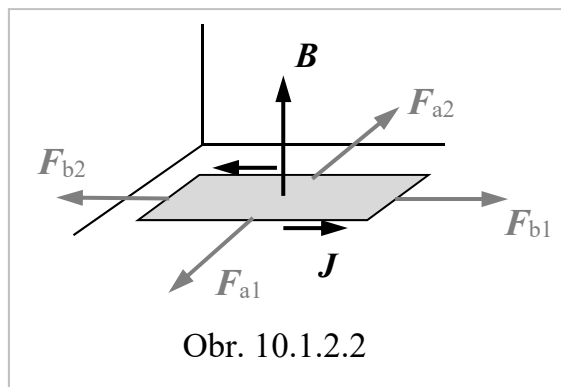
Príklad 10.1.2.1 Priamy vodič, ktorým prechádza elektrický prúd I , je horizontálne uložený v homogénnom magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B}$, ktorá má tiež horizontálny smer, ale súčasne je kolmá na priamy vodič. Vodič má dĺžku ℓ a hmotnosť m . Aký veľký prúd musí prechádzať vodičom, aby sa jeho tiaž kompenzovala magnetickou silou? Po vyjadrení všeobecného vzťahu vypočítajte silu pre hodnoty $B = 0,01$ T, $m = 0,1$ kg, $\ell = 2$ m, $g = 10$ m/s².

Riešenie $mg = \int_0^\ell I d\ell B = IB\ell, \Rightarrow I = \frac{mg}{B\ell} = \frac{0,1 \times 10}{2 \times 0,01} = 50$ A.

Príklad 10.1.2.2 Voľný vodič s dĺžkou $\ell = 1$ m a hmotnosťou $m = 0,5$ kg sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,01$ T. Prechádza ním prúd $I = 10$ A. Akým zrýchlením sa vodič začne pohybovať, keď priamy vodič je uložený kolmo na vektor $\mathbf{B}$?

Riešenie: $dF = Id\ell B$, resp. $F = I\ell B$, zrýchlenie $a = F/m = (10 \times 1 \times 0,01)/0,5 = 0,2$ m/s².

Príklad 10.1.2.3 Vypočítajte výslednú silu pôsobiacu na uzavretú prúdovú slučku, ktorá má tvar obdĺžnika so stranami ktoré majú dĺžky a resp. b . Slučkou prechádza prúd I (hustota prúdu $\mathbf{J}$) a rovina slučky je kolmá na vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ homogénneho magnetického poľa.



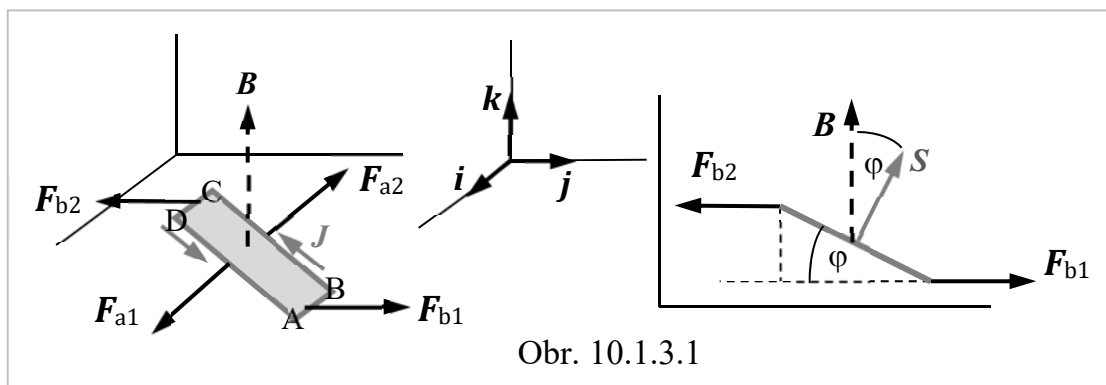
Riešenie: Využijeme vzťah (10.1.2.6), na základe ktorého zistíme, že sily pôsobiace na jednotlivé strany obdĺžnikovej slučky, čo do smeru, sú na obrázku správne nakreslené. Sily pôsobiace na protiľahlé strany sú rovnako veľké, ale majú opačný smer, takže ich vektorový súčet sa rovná nule. Preto sa výsledná sila pôsobiaca na slučku rovná nule.

Kontrolné otázky

1. Opíšte mikroskopický mechanizmus pôsobenia sily na vodiče prúdu v magnetickom poli.
2. Napíšte vzťah, ktorým sa vyjadruje sila pôsobiaca na elementárnu dĺžku vodiča v magnetickom poli.
3. Pri akom vzájomnom smere vodiča a magnetickej indukcie je sila maximálna?
4. Aká sila pôsobí na uzavretú prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli?

10.1.3 Moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku

Ako vyplynulo z výsledku príkladu 10.1.2.3, v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor $\mathbf{B}$ bol kolmý na rovinu slučky, výsledná sila pôsobiaca na prúdovú slučku (uzavretý elektrický obvod) sa rovnala nule. V spomenutom príklade všetky sily ležali v jednej rovine, lebo vektor magnetickej indukcie bol na rovinu slučky kolmý, t. j. vektor $\mathbf{B}$ a normála na rovinu slučky boli rovnobežné (bol medzi nimi nulový uhol).



Ak tento uhol nie je nulový, na slučku pôsobí dvojica síl. Tá má tendenciu slučku pootočiť do polohy, v ktorej moment dvojice prestane pôsobiť, t. j. do polohy, keď je uhol nulový – teda keď plocha slučky je kolmá na vektor $\mathbf{B}$. Na obrázku je nakreslená obdĺžniková slučka, ako v príklade 10.1.2.3, t. j. slučka so stranami veľkosti a , b , pričom predpokladáme, že ňou prechádza prúd veľkosti I a to od vrcholu A k vrcholu B atď. Sily $\mathbf{F}_{a1}$ a $\mathbf{F}_{a2}$ sa navzájom rušia, ale sily $\mathbf{F}_{b1}$ a $\mathbf{F}_{b2}$ tvoria dvojicu, ktorej moment M_F sa rovná súčinu veľkosti jednej z nich a vzdialenosti ich vektorových priamok:

$$M_F = \mathbf{F}_{b1} a \sin \varphi = IBb a \sin \varphi = ISB \sin \varphi. \quad (10.1.3.1)$$

Pritom boli použité vzťahy – pre silu $\mathbf{F}_{b1} = IBb$, a pre plošný obsah slučky $S = ab$. Moment dvojice síl podľa obrázku má smer jednotkového vektora $\mathbf{i}$, takže rovnicu (10.1.3.1) vo vektorovom tvare môžeme zapísať takto:

$$\mathbf{M}_F = ISB \sin \varphi \mathbf{i}.$$

Slučke možno priradiť vektor $\mathbf{S}$, ktorého veľkosť sa rovná plošnému obsahu slučky ab , pričom jeho smer sa určí na základe pravidla pravej ruky, teda súvisí so "smerom prúdu" v slučke (pozri poznámku v článku 9.1.1 kapitoly o elektrickom prúde). Vektor $\mathbf{S}$ zvierá s vektorom $\mathbf{B}$ uhol φ , ktorý vystupuje vo vzťahu (10.1.3.1). To umožňuje vyjadriť moment dvojice síl $\mathbf{M}_F$ ako vektorový súčin:

$$\mathbf{M}_F = I \mathbf{S} \times \mathbf{B}, \quad (10.1.3.2)$$

lebo výsledkom vektorového súčinu $\mathbf{S} \times \mathbf{B}$ je vektor, ktorý má smer jednotkového vektora $\mathbf{i}$.

Tento výsledok platí pre uzavretý obvod ľubovoľného tvaru, pokiaľ sa celý nachádza v homogénnom poli. Toto tvrdenie uvádzame bez dôkazu, dôkaz je matematicky náročný.

Príklad 10.1.3.1 Cievkou s $n = 50$ závitmi a polomerom $R = 3$ cm, prechádza prúd veľkosti $I = 4$ A. Aký maximálny moment síl (krútiaci moment) môže pôsobiť na cievku v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,02$ T?

Riešenie: Na výpočet veľkosti krútiaceho momentu použijeme vzťah (10.1.3.2), pričom využijeme predpoklad, že momenty všetkých závitov sú čo do veľkosti aj smeru rovnaké: $M_F = nISB \sin \varphi$. Maximálna veľkosť momentu M sa dosiahne pri $\sin \varphi = 1$, t. j. keď vektory $\mathbf{S}$ a $\mathbf{B}$ sú na seba kolmé. Vtedy $M_F = 1 \times 10^{-2}$ N·m.

Príklad 10.1.3.2 Elektromotor má pri frekvencii 3000 min^{-1} zabezpečiť prenos výkonu $P = 25$ kW. Aký krútiaci moment M_F je na to potrebný? Cievka elektromotora sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,1$ T a prechádza ňou

prúd $I = 20 \text{ A}$ a každý jej závit má efektívnu plochu s obsahom 400 cm^2 . Koľko závitov musí cievka mať?

Riešenie: a) Medzi výkonom P , krútiacim momentom M_F a uhlovou frekvenciou ω platí vzťah $P = M_F \omega$, odkiaľ vyplýva, že krútiaci moment musí mať hodnotu $M_F = (25 \times 10^3 \text{ W}) / (2\pi \times 50 \text{ s}^{-1}) \cong 80 \text{ N}\cdot\text{m}$.

b) Pre maximálny krútiaci moment cievky platí $M_F = nISB$, odkiaľ vypočítame $n = 1000$ závitov.

Kontrolné otázky

1. Napíšte vzťah, ktorým sa vyjadruje moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli.
2. Závisí veľkosť momentu sily pôsobiaceho na prúdovú slučku od jej tvaru?
3. V akej polohe slučky – vzhľadom na magnetické pole – je moment sily na ňu pôsobiaci maximálny?

10.2 Magnetické pole v okolí vodičov prúdu

Kľúčové slová

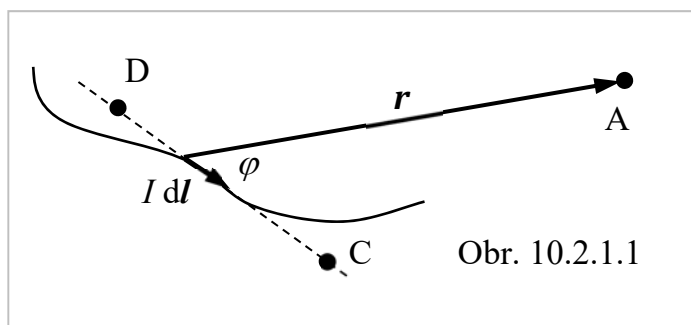
Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah, cirkulácia vektora magnetickej indukcie, magnetická konštanta, permeabilita vákua, magnetický tok, druhá Maxwellova rovnica.

10.2.1 Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah, magnetická konštanta

Keď cez vodič necháme prechádzať elektrický prúd, v jeho okolí vznikne magnetické pole. Prejaví sa pôsobením na magnetku (kompas), alebo na pohybujúcu sa elektricky nabitú časticu. Veľkosť i vlastnosti magnetického poľa vytvoreného elektrickým prúdom preskúmali v roku 1820 francúzski vedci J. Biot a F. Savart. Ich experimentálne výsledky zovšeobecnil a matematicky sformuloval P. S. Laplace, a možno ich sformulovať takto: dĺžkový element $d\ell$, ktorým prechádza elektrický prúd I , prispieva k indukcii magnetického poľa elementárnym príspevkom

$$dB = k \frac{I d\ell}{r^2} \sin \varphi, \quad (10.2.1.1)$$

kde r je vzdialenosť prúdového elementu $I d\ell$ od bodu, v ktorom sa určuje veľkosť magnetickej indukcie a φ je uhol medzi dĺžkovým elementom $d\ell$ a spojnicou elementu s týmto bodom; k je konštanta úmernosti.



Príspevok prúdového elementu k magnetickej indukcii sa znižuje s druhou mocninou vzdialenosti a je úmerný veľkosti elektrického prúdu. Podľa vzťahu (10.2.1.1) prúdový element $I d\ell$ neprispieva k magnetickému poľu v bodoch ležiacich na priamke, ktorá je jeho

predĺžením (napr. body C a D na obrázku). Biot a Savart určili aj smer elementárneho príspevku $d\mathbf{B}$ a zistili, že je kolmý na rovinu určenú vektormi $d\mathbf{l}$ a $\mathbf{r}$ (vektor $d\mathbf{l}$ má smer vektora hustoty prúdu vo vodiči). V prípade podľa obrázku, vektor $d\mathbf{B}$ predstavujúci príspevok prúdového elementu $I d\ell$ v bode A, smeruje pred obrázok k čitateľovi. Má smer zhodný so smerom vektora, ktorý je výsledkom vektorového súčinu $I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$. Príspevok $d\mathbf{B}$ ako vektorovú veličinu možno preto vyjadriť vzťahom

$$d\mathbf{B} = k \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (10.2.1.2)$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor začínajúci v prúdovom elemente $I d\mathbf{l}$ a končiaci v bode, v ktorom určujeme magnetickú indukciu. Pre veľkosť príspevku $d\mathbf{B}$ odtiaľ vyplýva vzťah (10.2.1.1), v súlade s definíciou vektorového súčinu.

Ustálený prúd môže prechádzať iba uzavretým elektrickým obvodom, pričom každý prúdový element obvodu prispieva k výslednému magnetickému poľu vo všetkých bodoch okolo vodiča. Vektor magnetickej indukcie v ľubovoľnom bode v okolí vodiča preto získame integráciou cez celý uzavretý obvod:

$$\mathbf{B} = k \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (10.2.1.3)$$

Číselná hodnota konštanty k závisí od voľby jednotiek veličín vystupujúcich v tomto vzťahu a bola určená experimentálne. Zvolí sa vhodný tvar vodiča, podľa vzťahu (10.2.1.3) sa vypočíta veľkosť vektora $\mathbf{B}$ vo vhodnom bode a potom sa v tomto bode jeho veľkosť zmeria. Pri meraní veľkosti sa využije definičný vzťah magnetickej indukcie (10.1.1.1). Konfrontáciou vypočítanej a nameranej hodnoty sa získa veľkosť konštanty k . Pri používaní jednotiek sústavy SI pre konstantu (pri meraní vo vákuu) bola získaná hodnota

$$k = 1 \times 10^{-7} \text{ SI jednotiek}. \quad (10.2.1.4)$$

Konštanta sa však vyjadruje v tvare

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi},$$

kde μ_0 je tzv. **magnetická konštanta**, nazývaná aj ako **permeabilita vákuu**. Podľa vzťahu (10.2.1.4) má hodnotu

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} (\text{kg} \cdot \text{m})/(\text{A}^2 \cdot \text{s}^2). \quad (10.2.1.5)$$

Biotov-Savartov-Laplaceov (BSL) vzťah na výpočet magnetickej indukcie v okolí vodičov prúdu tak nadobudne tvar

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \quad (10.2.1.6)$$

Poznámka: Magnetická konštanta bola až do roku 2019 považovaná za fundamentálnu konstantu, od ktorej sa odvodzovala veľkosť jednotky ampér. Od 2019 sa ampér definuje pomocou elementárneho elektrického náboja a sekundy.

Kontrolné otázky

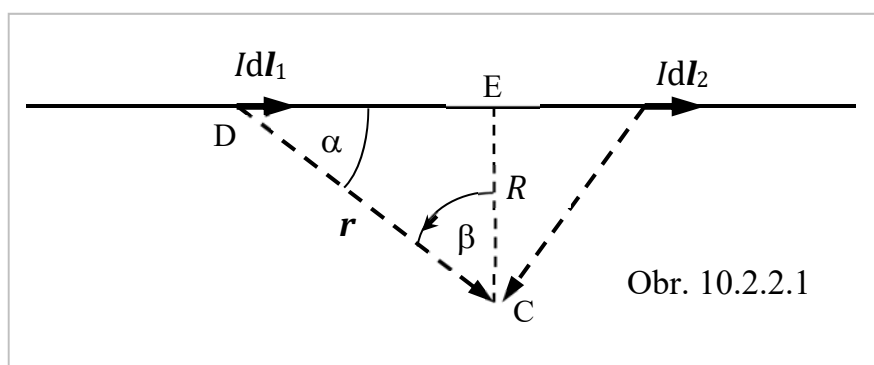
1. S ktorou mocninou vzdialenosti od vodiča sa zmenšuje magnetická indukcia?
2. Aký smer má vektor magnetickej indukcie v okolí dlhého priameho vodiča prúdu?
3. Akú veľkosť v SI má konštanta úmernosti v BSL vzťahu?
4. Čo je to magnetická konštanta a akú má veľkosť v SI?
5. Vyjadrite BSL vzťah vo vektorovom tvare.
6. Kde má začiatok a kde koniec polohový vektor vystupujúci v BSL vzťahu?

10.2.2 Magnetické pole v okolí veľmi dlhého priameho vodiča

Pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzťahu (10.2.1.6) možno pomerne ľahko vypočítať magnetickú indukciu v okolí vodičov jednoduchých tvarov. Veľmi dlhý vodič, ktorý možno považovať prakticky za nekonečne dlhý, je jedným z takýchto prípadov. BSL vzťah predpokladá súčet (integrál) veľmi malých elementov

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

ktoré treba sčítavať vektorovo, takže si treba všimnúť nielen ich veľkosť, ale aj vzájomný smer. Sčítanie sa zjednoduší, ak elementy majú rovnaký smer. Tak je tomu aj v prípade veľmi dlhého priameho vodiča. Keď počítame magnetickú indukciu v bode C, príspevky $d\mathbf{B}_1$ a $d\mathbf{B}_2$ od prúdových elementov $I d\mathbf{l}_1$ a $I d\mathbf{l}_2$ nakreslených na obrázku, sú rovnobežné, kolmé na rovinu náčrtu a smerujú za ňu.



Preto stačí sčítať veľkosti všetkých príspevkov (skalárnych)

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}. \quad (10.2.2.1)$$

V tomto vzťahu vystupujú premenné r , α , a navyše ako diferenciál vystupuje dl . Preto pred integráciou tohto vzťahu treba premenné zjednotiť. Ako najvhodnejšia premenná sa javí uhol β (obrázok). Pomocou tohto uhla a pomocou vzdialenosti R bodu C od vodiča vyjadríme ostatné premenné:

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad r = \frac{R}{\cos \beta}.$$

Aj diferenciál dl treba upraviť. Ak vzdialenosť medzi bodmi D a E označíme písmenom l , potom platí vzťah

$$l = R \tan \beta,$$

odkiaľ získame

$$\frac{dl}{d\beta} = \frac{R}{\cos^2 \beta} \Rightarrow dl = \frac{R}{\cos^2 \beta} d\beta.$$

Dosadením substitúcií do vzorca (10.2.2.1) dostaneme vzt'ah:

$$dB = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I \cos \beta}{\left(\frac{R}{\cos \beta}\right)^2} \frac{R}{\cos^2 \beta} d\beta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \beta d\beta . \quad (10.2.2.2)$$

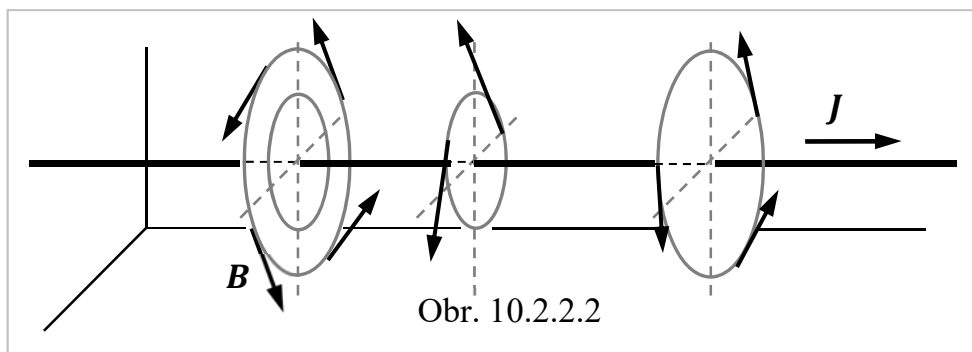
Výsledok závisí od integračných hraníc, t. j. môžeme vypočítať magnetickú indukciu vyvolanú ľubovoľne dlhým úsekom vodiča. Pre nekonečne dlhý vodič integračnými hranicami sú $-\pi/2$ a $+\pi/2$:

$$B = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I}{R} 2 ,$$

a po konečnej úprave

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi R} . \quad (10.2.2.3)$$

Vektor $\mathbf{B}$ má takúto veľkosť vo všetkých bodoch vzdialených o R od vodiča, teda na celej kružnici (dokonca celom valci) s týmto polomerom. Osobitný komentár si však zaslúži jeho smer. V bode C na obrázku 10.2.2.1 smeruje kolmo za nákresňu, ale na opačnej strane vodiča, v symetricky položenom bode, smeruje pred nákresňu, čo vyplýva z BSL vzt'ahu. Všeobecne vektor $\mathbf{B}$ má vždy smer dotýčnice kružnice, ktorej stred leží vo vodiči. Veľkosť vektora $\mathbf{B}$ sa s rastúcou vzdialenosťou od vodiča znižuje.



Na obrázku je nakreslených niekoľko vektorov magnetickej indukcie, v rôznych polohách vzhľadom na vodič, pri rôznych kružniciach. Kružnice predstavujú **indukčné čiary**, ktoré sú vo všeobecnosti definované ako krivky, ktorých dotýčnica v danom bode je rovnobežná s vektorom magnetickej indukcie. Nakreslenie indukčných čiar v okolí objektu vytvárajúceho magnetické pole slúži na zobrazenie tohto poľa.

Príklad 10.2.2.1 Aký veľký elektrický prúd musí prechádzať veľmi dlhým vodičom, aby vo vzdialenosti 10 cm od vodiča vzniklo magnetické pole s indukciou $B = 2 \times 10^{-5}$ T? (Takáto veľkosť indukcie približne zodpovedá zemskému magnetickému poľu.)

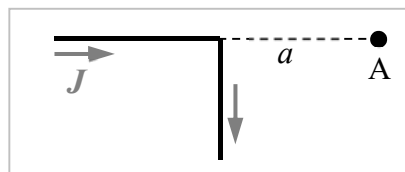
Riešenie: Prúd vypočítame zo vzt'ahu (10.2.2.3):

$$I = (B \cdot 2\pi R) / \mu_o = (2 \times 10^{-5} \times 2\pi \times 10^{-1}) / (4\pi \times 10^{-7}) \text{ A} = 10 \text{ A}.$$

Príklad 10.2.2.2 Priamy veľmi dlhý vodič, ktorým prechádza prúd $I = 10 \text{ A}$, je zalomený do pravého uhla. Aká je veľkosť a smer vektora magnetickej indukcie v predĺžení jednej časti vodiča (v bode A), vo vzdialenosti $a = 10 \text{ cm}$ od zalomenia?

Riešenie:

Časť vodiča ktorá smeruje k bodu A, neprispieva k magnetickému poľu v tomto bode, lebo vektory $I d\mathbf{l}$ v tejto časti sú rovnobežné s polohovými vektorm $\mathbf{r}$ vedenými od nich do bodu A. Zvyšnú časť vodiča možno považovať za polovicu nekonečne dlhého vodiča, takže vodič v bode A vytvára magnetické pole s indukciou



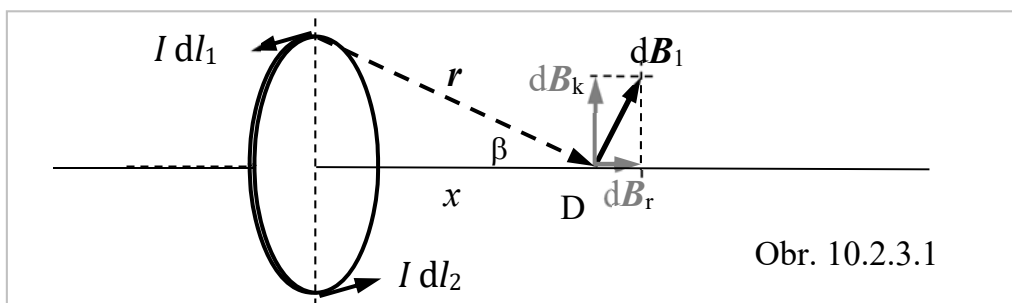
$$B = 0,5 (\mu_0 I) / (2\pi a) = (4\pi \times 10^{-7} \times 10) / (4\pi \times 10^{-1}) \text{ T} = 1 \times 10^{-5} \text{ T}.$$

Kontrolné otázky

1. Aký smer má vektor magnetickej indukcie v okolí veľmi dlhého priameho vodiča?
2. S ktorou mocninou vzdialenosti od veľmi dlhého vodiča sa znižuje magnetická indukcia?
3. Čo sú to indukčné čiary a na čo slúžia?

10.2.3 Magnetické pole na osi kruhového závit

V okolí kruhového závit možno jednoduchými matematickými prostriedkami vypočítať magnetickú indukciu iba na osi závit. Na výpočet indukcie mimo osi sú potrebné špeciálne matematické funkcie. Výpočet na osi závit poslúži pri ďalších výpočtoch, napríklad na výpočet magnetickej indukcie v solenoide. Aj v tomto prípade sa vychádza z BSL vzťahu (10.2.1.6), pričom treba vhodne vyjadriť premenné veličiny, ktoré v ňom vystupujú. Magnetickú indukciu budeme počítat vo vzdialenosti x od roviny závit, ktorý má polomer R a prechádza ním prúd I .



Prúdový element $I d\mathbf{l}_1$ vytvára v bode D magnetickú indukciu $d\mathbf{B}_1$, pričom tento elementárny vektor je kolmý na rovinu určenú vektormi $I d\mathbf{l}_1$ a $\mathbf{r}$, ktoré sú na seba kolmé. Pre jeho veľkosť podľa BSL vzťahu platí:

$$dB_1 = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dl}{r^2} \sin(\pi/2) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dl}{(x^2 + R^2)} . \quad (10.2.3.1)$$

Aj prúdový element $I d\mathbf{l}_2$, ktorý leží na protíľahlej strane kružnice, prispieva k magnetickému poľu, pričom príspevky oboch prúdových elementov majú zložky $d\mathbf{B}_r$ rovnobežné s osou, ktoré sa sčítajú, ale aj zložky $d\mathbf{B}_k$ na os kolmé, ktoré sa navzájom kompenzujú. Preto v bode D treba uvažovať iba so zložkami rovnobežnými s osou závitú, ktoré majú veľkosť

$$dB_r = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dl}{(x^2 + R^2)} \sin(\beta) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{I dl}{(x^2 + R^2)} \frac{R}{(x^2 + R^2)^{1/2}} . \quad (10.2.3.2)$$

Integráciou cez celý kruhový vodič získame veľkosť magnetickej indukcie v bode D:

$$B_r = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint dl = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \frac{\mu_o I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}} . \quad (10.2.3.3)$$

S rastúcou vzdialenosťou od závitú klesá veľkosť magnetickej indukcie s treťou mocninou vzdialenosti. Keď si uvedomíme, že platí $\sin \beta = R/(x^2 + R^2)^{1/2}$, môžeme veľkosť magnetickej indukcie vyjadriť vzťahom

$$B_r = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \beta . \quad (10.2.3.4)$$

Vektor $\mathbf{B}$ v bode D je rovnobežný s osou, pričom jeho smer je určený vektorovým súčinom v BSL vzťahu. Jeho smer závisí od toho, aký je smer prúdu vo vodiči. Podľa situácie na obrázku, vektor $\mathbf{B}$ smeruje vpravo. Keby však prúd vo vodiči mal opačný smer, aj smer vektora $\mathbf{B}$ by bol opačný. Dôležité je uvedomiť si, že vektor $\mathbf{B}$ má rovnaký smer pozdĺž celej osi, takpovediac – pred, i za závitom.

Uprostred kruhového závitú je veľkosť magnetickej indukcie najväčšia:

$$B_r = \frac{\mu_o I}{2R} , \quad (10.2.3.5)$$

lebo pre stred kružnice platí $\sin \beta = 1$.

Príklad 10.2.3.1 Dva kruhové závitú s polomermi $R_1 = R$, $R_2 = 2R$ sú uložené na spoločnej osi v jednej rovine. Prvým závitom prechádza prúd I_1 . Aký prúd I_2 musí prechádzať druhým závitom, aby magnetická indukcia vo vzdialenosti x od ich roviny bola nulová? Aký je pomer týchto prúdov pre $x = 0$ a pre $x \rightarrow \infty$?

Riešenie: Ak má byť magnetická indukcia nulová, vektory $\mathbf{B}_1$ a $\mathbf{B}_2$ vyvolané svojimi závitmi musia mať opačný smer, preto aj závitmi musia prúdy prechádzať opačnými smermi. Z rovnosti veľkostí magnetických indukcií - na základe vzťahu (10.2.3.3) - vyplýva

$$I_1 \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = I_2 \frac{4R^2}{(x^2 + 4R^2)^{3/2}} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{4} \frac{(x^2 + 4R^2)^{3/2}}{(x^2 + R^2)^{3/2}} I_1.$$

Ak $x = 0$, $I_2 = 2I_1$. Pre $x \rightarrow \infty$ vychádza $I_2 \rightarrow (1/4) I_1$.

Príklad 10.2.3.2 V akej vzdialenosti od roviny kruhového závitu s polomerom R je veľkosť magnetickej indukcie osemkrát menšia v porovnaní s indukciou uprostred závitu?

Riešenie: Výsledok získame porovnaním vzťahov pre indukciu uprostred závitu a vo vzdialenosti x :

$$\frac{1}{8} \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \Rightarrow x = \sqrt{3}R.$$

Kontrolné otázky

1. Aký smer má vektor magnetickej indukcie na osi kruhového závitu?
2. Má vektor indukcie na druhej strane závitu opačný smer?
3. V ktorom bode na osi závitu je magnetická indukcia najväčšia?
4. S ktorou mocninou vzdialenosti od roviny závitu sa znižuje veľkosť magnetickej indukcie?

10.2.4 Cirkulácia vektora magnetickej indukcie

Pod cirkuláciou vektorovej veličiny $\mathbf{A}(x, y, z) \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r})$, ktorá závisí od priestorových súradníc, sa rozumie jej krivkový integrál po uzavretej krivke

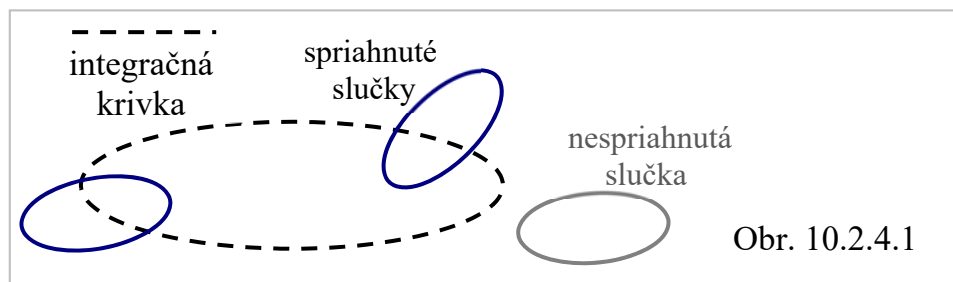
$$\oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.2.4.1)$$

kde $d\mathbf{r}$ predstavuje elementárne posunutie po integračnej krivke. Medzi vektorovou funkciou a elementárnym posunutím je skalárny súčin, čo znamená, že výsledkom cirkulácie vektorovej funkcie je skalárna veličina. Cieľom tohto článku je ukázať (nie dôsledne dokázať), že cirkulácia vektora magnetickej indukcie – stručne cirkulácia vektora $\mathbf{B}$ – súvisí s elektrickými prúdmi (prúdovými slučkami), ktoré sú s integračnou krivkou spriahnuté ako susedné ohnivé reťaze.

Všeobecný dôkaz je matematicky náročný, preto sa obmedzíme na dva špeciálne prípady, na ktorých si overíme platnosť všeobecného vzťahu

$$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pm \mu_o I, \quad (10.2.4.2)$$

v ktorom I je súčet všetkých elektrických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou a μ_o magnetická konštanta. Znamienko závisí od smeru integrácie – pri integrácii v opačnom smere, zmení sa aj znamienko výsledku na opačné. Ak je integračná krivka spriahnutá s viacerými prúdmi, na pravej strane vzťahu (10.2.4.2) vystupuje ich súčet.

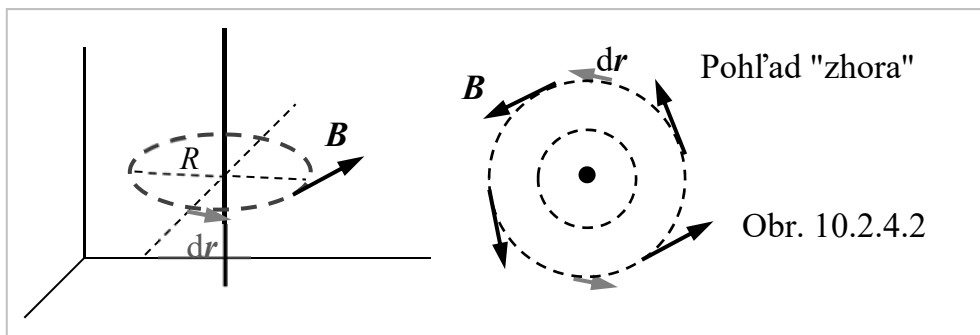


Cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$ budeme počítat' v prvom prípade po kružnici okolo veľmi dlhého priameho vodiča, v druhom prípade po osi kruhového závit, teda v prípadoch, ktoré boli opísané v predchádzajúcich článkoch.

Podľa výsledku (10.2.2.3), vo vzdialenosti R od dlhého priameho vodiča ktorým prechádza prúd I , vektor magnetickej indukcie má veľkosť

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi R}, \quad (10.2.4.3)$$

pričom vektor $\mathbf{B}$ má smer dotýčnice kružnice, ako je nakreslené na obrázku.



Ak za integračnú krivku zvolíme práve takúto kružnicu s polomerom R , potom cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$ možno vypočítat' pomerne jednoducho:

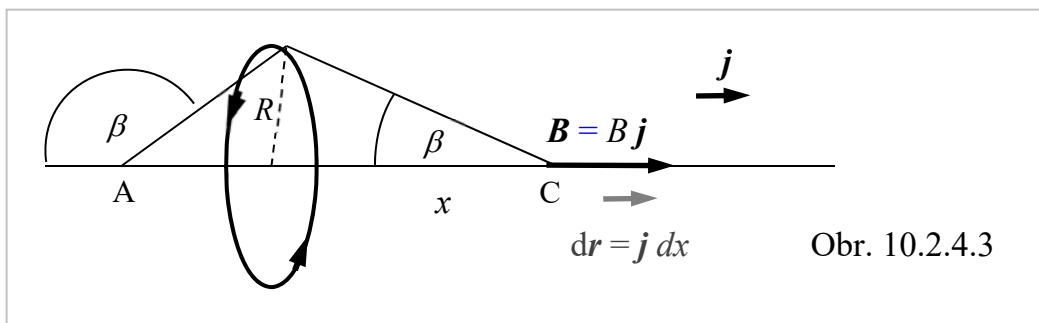
$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left(\frac{\mu_o I}{2\pi R} \boldsymbol{\tau} \right) \cdot (dl \boldsymbol{\tau}) = \frac{\mu_o I}{2\pi R} \oint dl = \frac{\mu_o I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_o I. \quad (10.2.4.4)$$

Kladné znamienko je výsledkom voľby smeru integrácie, lebo vektor $d\mathbf{r}$ mal v každom bode súhlasný smer s vektorom $\mathbf{B}$. Obidva vektory bolo možné vyjadriť pomocou spoločného jednotkového vektora $\boldsymbol{\tau}$ ($d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} dl$). Pri integrácii v opačnom smere má vektor $d\mathbf{r}$ opačný smer ako vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$, ich skalárny súčin, a tým aj výsledok integrácie, je záporný.

V druhom špeciálnom prípade budeme integrovať pozdĺž osi kruhového závit (od $-\infty$ do $+\infty$ nekonečna, t. j. akoby po uzavretej krivke), kde podľa vzťahu (10.2.3.4) magnetická indukcia má veľkosť

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta ,$$

pričom β predstavuje zorný uhol pod ktorým vidíme závit z bodu v ktorom určujeme indukciu B (t. j. uhol medzi osou závit a spojnicou bodu na osi s bodom na obode kruhového závit).



Dosadením do integrálu, ktorý vyjadruje cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$, dostaneme

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint \left(\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \beta \mathbf{j} \right) \cdot (\mathbf{j} dx) .$$

Premennú x je vhodné vyjadriť pomocou uhla β , čo dosiahneme na základe vzťahu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{R}{x} \Rightarrow x = R \frac{\cos \beta}{\sin \beta} \Rightarrow \frac{dx}{d\beta} = -\frac{R}{\sin^2 \beta} \Rightarrow dx = -\frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta$$

Dosadením substitúcie dostaneme výraz

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{\mu_0 I}{2R} \oint \sin^3 \beta \frac{R}{\sin^2 \beta} d\beta = -\frac{\mu_0 I}{2} \oint \sin \beta d\beta . \quad (10.2.4.5)$$

Na obrázku 10.2.4.3 smeruje vektor $\mathbf{B}$ na pravú stranu, rovnako ako jednotkový vektor $\mathbf{j}$. Ak chceme aby výsledok bol kladný, aj vektor $d\mathbf{r}$ musí mať rovnaký smer, teda integrovať musíme z ľavej strany doprava. Integrál po uzavretej krivke bude v tomto prípade z hľadiska premennej x znamenať integráciu od $-\infty$ po $+\infty$, a z hľadiska premennej β od π po 0 , lebo bodu A zodpovedá tupý uhol β , bodu C ostrý uhol. Pri takýchto integračných hraniciach dostaneme

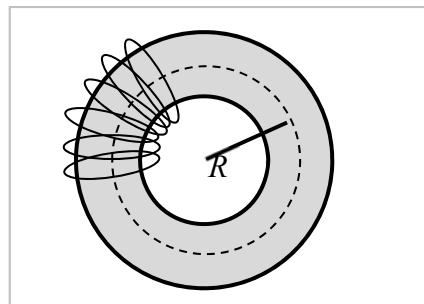
$$\int_{\pi}^0 \sin \beta d\beta = -2 ,$$

takže pre cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$ opäť dostávame výsledok zhodný so vzťahom (10.2.4.2). Zmenou smeru integrácie dostaneme výsledok s opačným znamienkom.

Na záver treba zdôrazniť, že tento vzťah platí všeobecne, pri integrácii po uzavretej krivke ľubovoľného tvaru. Vzťah možno výhodne využiť na výpočet magnetickej indukcie v rôznych prípadoch, najmä keď sa veľkosť magnetickej indukcie pozdĺž integračnej krivky nemení.

Príklad 10.2.4.1 Vypočítajte magnetickú indukciu v cievke s tvarom toroidu, ktorá má N závitov a prechádza ňou prúd I . Toroid má polomer R .

Riešenie: Cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$ budeme počítat' po kružnici vyznačenej na obrázku čiarkovane. Z dôvodov symetrie magnetická indukcia má v každom bode rovnakú veľkosť B , a integrujeme po kružnici s obvodom $2\pi R$, takže výsledok integrálu je $B \cdot 2\pi R$. Tento súčin sa rovná N násobku prúdu pretekajúceho cievkou, takže pre magnetickú indukciu získame výsledok $B = (N \mu_0 I) / (2\pi R)$.



Kontrolné otázky

1. Kedy je integračná krivka spriahnutá s prúdovou slučkou?
2. Čo sa rozumie pod cirkuláciou vektorovej funkcie?
3. Čomu sa rovná cirkulácia vektora magnetickej indukcie?
4. Čomu sa rovná cirkulácia vektora intenzity elektrického poľa v elektrostatickom poli?
5. Od čoho závisí znamienko výsledku cirkulácie vektorovej veličiny?

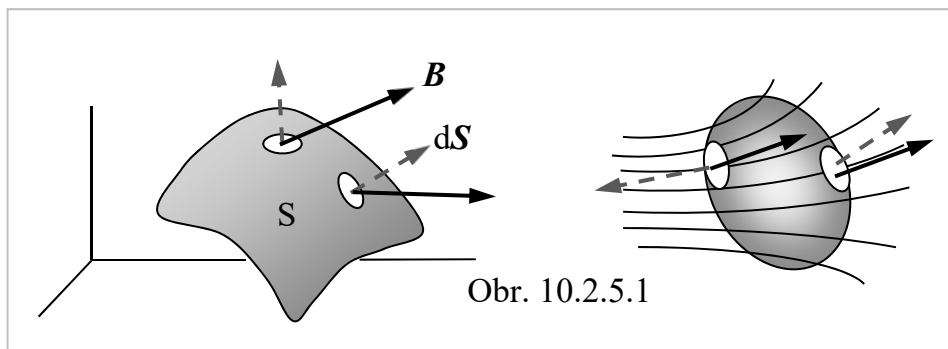
10.2.5 Magnetický tok, druhá Maxwellova rovnica

Cirkulácia vektora magnetickej indukcie, ktorej bol venovaný predchádzajúci článok, vystihuje jednu dôležitú stránku tejto veličiny, resp. magnetického poľa. Druhá významná vlastnosť súvisí s veličinou **magnetický tok**. **Magnetický tok** (značka Φ) je definovaný ako plošný integrál vektora magnetickej indukcie $\mathbf{B}$:

$$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} . \quad (10.2.5.1)$$

V integráli sa uplatňuje skalárny súčin vektora $\mathbf{B}$ s vektorom predstavujúcim elementárnu plošku $d\mathbf{S}$. To znamená, že ak sú tieto vektory na seba kolmé, magnetický tok cez plošku $d\mathbf{S}$ sa rovná nule. Indukčné čiary vtedy plošku nepretínajú.

Jednotkou magnetického toku je **weber** (značka Wb) .



Experimentálne bolo overené, že magnetický tok cez uzavretú plochu sa vždy rovná nule. Na pravej strane obrázku je znázornený vzájomný smer vektorov $d\mathbf{S}$ a $\mathbf{B}$ na protiľahlých stranách uzavretej plochy. Na jednej strane zvierajú ostrý uhol, ich skalárny súčin je kladný, na opačnej tupý uhol, a skalárny súčin je záporný. Súčet parciálnych magnetických tokov cez všetky elementárne plôšky uzavretej plochy sa rovná nule. Inými slovami – indukčné čiary nemajú začiatok ani koniec, koľko indukčných čiar do uzavretej plochy vojde, toľko musí z nej aj vyjsť. O poli takéhoto charakteru sa hovorí, že je **bezžriedlové**. Uvedenú skutočnosť vyjadruje vzťah

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 . \quad (10.2.5.2)$$

Je to ďalšia zo štyroch **Maxwellových rovníc**, ale vyjadrená v **integrálnom tvare**. Jej diferenciálny tvar sa získa pomocou Gaussovej integrálnej vety, t. j. premenou plošného integrálu na objemový:

$$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{B} \, d\tau = 0 . \quad (10.2.5.3)$$

Keďže táto rovnica platí pri ľubovoľnom tvare a veľkosti uzavretej plochy, teda pri ľubovoľných integračných hraniciach, nule sa musí rovnať skalárna funkcia $\operatorname{div} \mathbf{B}$:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 , \quad (10.2.5.4)$$

čo je **diferenciálny tvar (druhej) Maxwellovej rovnice**.

V súvislosti s touto rovnicou sa zavádza **vektorový potenciál** $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, ako vektorová funkcia priestorových premenných, ktorý s magnetickou indukciou súvisí vzťahom

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} . \quad (10.2.5.5)$$

Ďalšia aplikácia nabla operátora – a to formou divergencie na túto rovnicu – sa rovná nule, t. j. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ (pozri vzťah (1.3.6.3) v kapitole o vektoroch). To znamená, že takto zavedený vektorový potenciál automaticky spĺňa podmienku kladenú na vektor $\mathbf{B}$ Maxwellovou rovnicou (10.2.5.4).

Vektorový potenciál je paralelou skalárneho potenciálu φ elektrostatického poľa, ktorého intenzita sa vyjadruje pomocou gradientu (skalárneho) potenciálu

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = -\nabla \varphi,$$

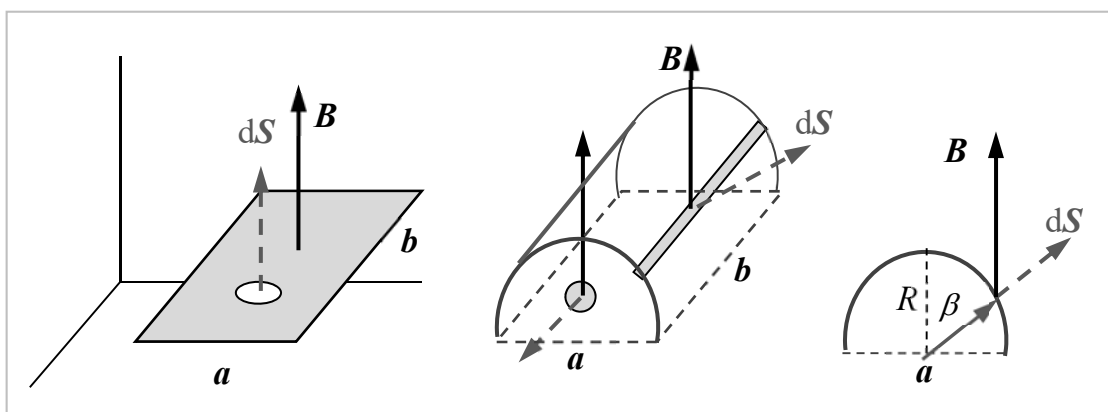
$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A}).$$

V okolí vodičov elektrického prúdu sa vektorový potenciál vyjadruje vzťahom

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I \, d\mathbf{l}}{r}, \quad (10.2.5.6)$$

ktorý je v dodatku D2 podrobne zdôvodnený. Aplikovaním nabla operátora formou rotácie na tento výraz dostaneme Biotov-Savartovov-Laplaceov vzťah.

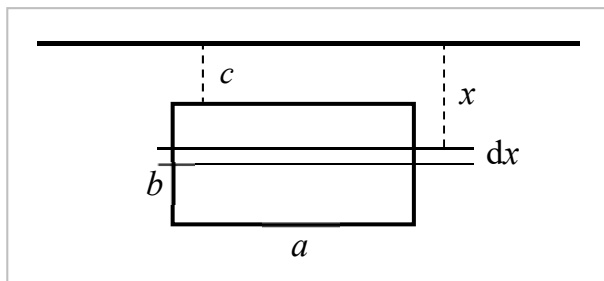
Príklad 10.2.5.1 Vypočítajte magnetický tok cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom so stranami a , b , ktorý sa nachádza v homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ je na rovinu závitú kolmý. Tok počítajte najprv cez rovinnú plochu preloženú závitom, potom cez valcovú plochu podľa obrázku. Výsledky porovnajte.



Riešenie: Magnetický tok v prvom prípade sa rovná súčinu veľkosti vektora magnetickej indukcie s plošným obsahom obdĺžnika: $\Phi_1 = BS_1 = Bab$. V druhom prípade tok cez základne (pol)valca sa rovná nule, lebo vektory $d\mathbf{S}$ a $\mathbf{B}$ sú tam na seba kolmé. Pri výpočte toku cez plášť vypočítame najprv elementárny tok cez pásik s plošným obsahom $dS = b R d\beta$, pričom si uvedomíme, že vektor $\mathbf{B}$ zvierá s vektorom $d\mathbf{S}$ uhol β . Preto $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B b R \cos\beta d\beta$. Integrovať treba v hraniciach od $-(\pi/2)$ po $+(\pi/2)$, pričom integrál z funkcie $\cos\beta$ v tomto intervale sa rovná číslu 2. Pre magnetický tok tak dostaneme výsledok $\Phi_2 = 2BbR = Bab$, lebo $R = a/2$.

Výsledky sú rovnaké, čo je v súlade so všeobecným tvrdením, že **v homogénnom poli pri výpočte magnetického toku cez plochu ohraničenú uzavretou krivkou výsledok nezávisí od tvaru tejto plochy, ale od ohraničujúcej krivky.**

Príklad 10.2.5.2 Vypočítajte magnetický tok cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom ležiacim v jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým prechádza prúd $I = 5$ A. Obdĺžnikový závit má strany s dĺžkami $a = 20$ cm, $b = 5$ cm, pričom dlhšia strana je rovnobežná s vodičom a vzdialená od neho $c = 5$ cm.



Riešenie: Vo vzdialenosti x od veľmi dlhého priameho vodiča má magnetická indukcia veľkosť $B = (\mu_o I)/(2\pi x)$. Elementárny magnetický tok $d\Phi = B dS$ cez elementárnu plošku s veľkosťou $dS = a dx$ sa rovná

$$d\Phi = \frac{\mu_o I}{2\pi x} a dx$$

Integráciou v hraniciach premennej x od c po $c + b$ dostaneme výsledok

$$\Phi = \frac{\mu_o I a}{2\pi} \ln \frac{c + b}{c}.$$

Výsledok príkladu ukazuje, že magnetický tok cez plochu ohraničenú závitom je priamoúmerný veľkosti elektrického prúdu prechádzajúceho dlhým vodičom: $\Phi = kI$, kde konštanta úmernosti

$$k = \frac{\mu_o a}{2\pi} \ln \frac{c + b}{c}$$

predstavuje dôležitú elektrotechnickú veličinu, ktorá má názov – **vzájomná indukčnosť** (v tomto prípade závit a dlhého vodiča). Táto veličina, ako aj veličina **vlastná indukčnosť**, bude dôsledne zavedená v kapitole *Elektromagnetické pole*.

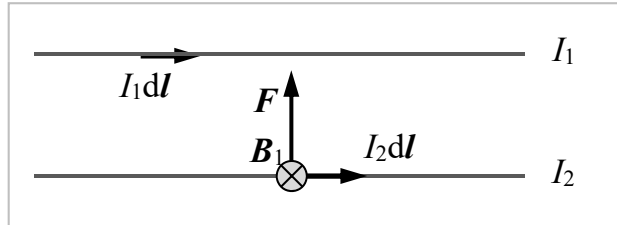
Kontrolné otázky

1. Ako je definovaný magnetický tok?
2. Aký je názov a rozmer jednotky magnetického toku?
3. Čomu sa rovná magnetický tok cez uzavretú plochu?
4. Napíšte integrálny a diferenciálny tvar druhej Maxwellovej rovnice.
5. Uveďte vzťah medzi vektorovým potenciálom a magnetickou indukciou.

10.2.6 Definícia ampéra

Ampér je jednou zo siedmich základných jednotiek sústavy SI. Až do roku 2019 bol definovaný na základe vzájomného silového pôsobenia dvoch veľmi dlhých priamych a vzájomne rovnobežných vodičov. Na obrázku sú znázornené takéto vodiče, pričom jedným z nich prechádza prúd I_1 , druhým prúd I_2 . Prvý z vodičov vytvára magnetické pole v mieste druhého vodiča, na ktorý pôsobí sila, lebo aj ním prechádza prúd.

Magnetické pole v okolí prvého, veľmi dlhého vodiča sa počíta pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzťahu. Využijeme výsledok článku 10.2.2, podľa ktorého v okolí veľmi dlhého priameho vodiča, ktorým prechádza prúd I_1 , má magnetická indukcia veľkosť



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}, \quad (10.2.6.1)$$

kde R je vzdialenosť od vodiča. Vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}_1$ je kolmý na rovinu v ktorej sa vodiče nachádzajú a v tomto prípade smeruje za obrázok. Silu pôsobiacu na vodič ktorým prechádza prúd I_2 , vypočítame pomocou vzťahu (10.1.2.6):

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1.$$

Ako vidno z obrázku, vektory $I_2 d\mathbf{l}$ a $\mathbf{B}_1$ sú na seba kolmé, a v prípade, že prúdy prechádzajú vodičmi jedným smerom, medzi vodičmi pôsobí príťažlivá sila. Pre veľkosť sily dF v takomto prípade dostaneme:

$$dF = I_2 dl B_1 = I_2 dl \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} dl.$$

Z tohto vzťahu vypočítame silu pripadajúcu na jednotku dĺžky:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}. \quad (10.2.6.2)$$

Výsledný vzťah sa používal na **definíciu ampéra**. Ak by každým z vodičov prechádzal prúd 1 A, a vodiče by boli od seba vzdialené 1 m, potom na meter dĺžky vodiča by pôsobila sila, ktorej hodnota sa rovná podielu $(\mu_0 / 2\pi)$, t. j. $2 \cdot 10^{-7}$ N/m.

Od mája 2019 je ampér definovaný na základe veľkosti elementárneho elektrického náboja e a sekundy, pričom sekunda je definovaná pomocou frekvencie ν_{Cs} žiarenia vznikajúceho pri kvantovom prechode v atóme Cs-133. Zjednodušene sa dá definícia ampéra sformulovať výrok, že prierezom vodiča tečie prúd 1 A, ak za sekundu jeho prierezom prejde náboj veľkosti jeden coulomb.

Kontrolné otázky

- 1. Akým smerom musia prechádzať prúdy dvomi rovnobežnými vodičmi, aby medzi nimi pôsobila príťažlivá sila?*
- 2. V čom je podstatný rozdiel medzi starou a novou definíciou ampéra?*

10.3 Magnetický dipól

V začiatočnom období náuky o magnetizme sa predpokladala existencia „severného“ a „južného“ magnetického množstva. Tyčový magnet bol analógiou elektrického dipólu, predstavoval **magnetický dipól**. Pripisoval sa mu magnetický moment, podobne ako elektrickému dipólu elektrický moment. Napriek tomu, že samostatné, od seba oddeliteľné magnetické množstvá nejestvujú, tyčový magnet, ale aj prúdová slučka (cievka) sa považujú za magnetický dipól. Cievka, aj tyčový magnet vytvárajú vo svojom okolí magnetické pole, ktorého indukčné čiary sú v priestore rozložené podobne, ako siločiar v okolí elektrického dipólu. Vzťahy opisujúce magnetické pole v okolí dipólu sú tým presnejšie, čím sú rozmery dipólu menšie v porovnaní so vzdialenosťou, v ktorej pole vyjadrujú. Aj v tom je magnetický dipól analógiou elektrického dipólu. V tejto súvislosti treba poznamenať, že podkovovitý magnet nie je typickým príkladom magnetického dipólu, lebo vytvára magnetické pole v podstate iba medzi svojimi pólami, takže v tomto ohľade sa podobá skôr kondenzátoru než elektrickému dipólu.

Kľúčové slová

Magnetický dipól, magnetický moment.

10.3.1 Magnetický moment

V článku 10.1.3 bol uvedený vzťah (10.1.3.2), vyjadrujúci moment síl pôsobiaci na prúdovú slučku v homogénnom magnetickom poli:

$$\mathbf{M}_F = I \mathbf{S} \times \mathbf{B}. \quad (10.3.1.1)$$

Skalárny násobok $(I \mathbf{S})$ – teda násobok vektora $\mathbf{S}$ (reprezentujúceho veľkosť a orientáciu plochy ohraničenej prúdovou slučkou) prúdom I ktorý ňou prechádza, sa nazýva **magnetický moment** ($\mathbf{m}_m$) prúdovej slučky:

$$\mathbf{m}_m = I \mathbf{S}. \quad (10.3.1.2)$$

Smer vektora $\mathbf{S}$ a tým aj smer magnetického momentu $\mathbf{m}_m$, súvisí so „smerom“ prúdu v slučke, presnejšie povedané smerom, ktorým by sa pri danom prúde vodičom pohybovali kladne nabité častice. Z konca vektora $\mathbf{S}$, ktorý je na rovinu slučky kolmý, sa pohyb kladne nabitých častíc javí proti chodu hodinových ručičiek (pohyb elektrónov, ktoré v skutočnosti prúd zabezpečujú, prebieha v opačnom smere). V tejto súvislosti sa preto uplatňuje „*pravidlo pravej ruky*“.

Po zavedení magnetického momentu prúdovej slučky možno vzťah (10.3.1.1) upraviť:

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{m}_m \times \mathbf{B}. \quad (10.3.1.3)$$

Pri tyčovom magnet, alebo feritovom magnet, ktorý má tvar kotúčika, ale aj pri podlhovastej cievke (solenoid) sa tento **vzťah používa ako definičný** na určenie ich magnetického momentu. Magnetický moment takýchto útvarov sa určí tak, že sa vložia

do homogénneho magnetického poľa so známou veľkosťou magnetickej indukcie B a zmeria sa maximálna hodnota momentu pôsobiacich síl. Vtedy platí tento vzťah $M_F = m_m B$, odkiaľ sa vypočíta magnetický moment.

Z definičného vzťahu (10.3.1.2) vyplýva, že **jednotkou magnetického momentu** v SI sústave je $A \cdot m^2$.

Magnetický moment majú aj elementárne častice – protón, elektrón, aj neutrón. Magnetický moment patrí k základným charakteristikám týchto častíc rovnako, ako ich hmotnosť a elektrický náboj. Aj na tieto častice pôsobí magnetické pole momentom síl. Pôsobenie magnetického poľa na protóny v ľudskom tele sa využíva v medicíne na diagnostiku poškodenia, resp. zmien v tkanivách a orgánoch (pozri článok 10.3.4). Magnetické momenty elementárnych častíc sú v porovnaní s momentmi makroskopických objektov malé. Magnetický moment elektrónu (tzv. Bohrov magnetón) $\mu_B = 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$, magnetický moment protónu (tzv. jadrový magnetón) $\mu_N = 5,05 \times 10^{-27} A \cdot m^2$. (Pozri aj dodatok D1).

Poznámka: Vzťahmi (10.3.1.2), resp. (10.3.1.3) zavedený magnetický moment sa v niektorých učebniciach nazýva **Ampérov magnetický moment**. Popri tomto momente sa používa aj μ_o -násobok tohto momentu $m_c = \mu_o m_m$, s názvom **Coulombov magnetický moment**.

Príklad 10.3.1.1 Vypočítajte magnetický moment prúdovej slučky s polomerom $R = 1$ cm, ktorou prechádza prúd $I = 10$ A, a porovnajte s orbitálnym magnetickým momentom elektrónu na prvej kvantovej dráhe atómu vodíka, ktorý vzniká obieháním elektrónu okolo jadra po kružnici s polomerom cca $0,5 \times 10^{-10}$ m, čomu zodpovedá prúd približne 1×10^{-3} A.

Riešenie: Magnetický moment slučky $m_s = IS = 10 \times \pi \times 10^{-4} A \cdot m^2 \cong 3 \times 10^{-3} A \cdot m^2$. Orbitálny magn. moment elektrónu $m_H = IS = 10^{-3} \times \pi \times (0,5 \times 10^{-10})^2 \cong 8 \times 10^{-24} A \cdot m^2$, čo je hodnota približne sa rovnajúca Bohrovmu magnetónu ($= 9,274 \times 10^{-24} A \cdot m^2$), t. j. veľkosti orbitálneho magnetického momentu elektrónu na prvej kvantovej dráhe v atóme vodíka; rovnako veľký je aj vlastný, tzv. spinový magnetický moment elektrónu.

Kontrolné otázky

1. Definujte magnetický moment prúdovej slučky.
2. Uveďte rozmer jednotky magnetického momentu.
3. Uveďte vzťah, ktorým sa definuje magnetický moment magnetického dipólu.
4. Aké experimentálne zariadenie by ste navrhli na meranie magnetického momentu?
5. Ktoré elementárne častice majú magnetický moment?

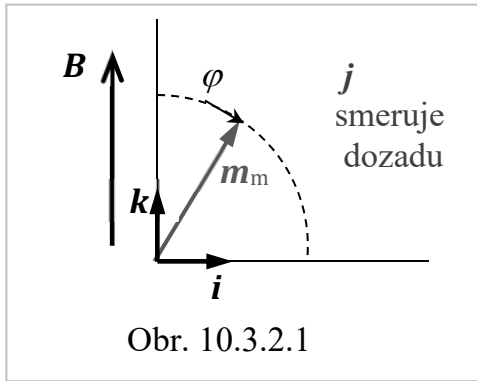
10.3.2 Potenciálna energia magnetického dipólu v homogénnom poli

Na magnetický dipól s momentom $\mathbf{m}_m$ v magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B}$ pôsobí moment síl $\mathbf{M}_F$ vyjadrený vzťahom (10.3.1.3)

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{m}_m \times \mathbf{B}. \quad (10.3.2.1)$$

Keď sú vektory $\mathbf{m}_m$ a $\mathbf{B}$ súhlasne alebo nesúhlasne rovnobežné, tento moment sa rovná nule, ak sú na seba kolmé, dosahuje najväčšiu hodnotu. Magnetický dipól má tendenciu zaujať v magnetickom poli rovnovážnu polohu, v ktorej sú tieto vektory súhlasne rovnobežné. Na vychýlenie dipólu z rovnovážnej polohy je potrebný moment vonkajších síl. Pri zmene uhla φ medzi vektormi $\mathbf{m}_m$ a $\mathbf{B}$ moment vonkajších síl $\mathbf{M}_V = -\mathbf{M}_F$ vykoná prácu (pozri vzťah 3.2.1.5 v dynamike):

$$W = \int_1^2 \mathbf{M}_V \cdot d\boldsymbol{\varphi}. \quad (10.3.2.2)$$



Medze integrálu – čísla 1 a 2 – predstavujú začiatkový a konečný uhol φ_1 resp. φ_2 . Pred výpočtom práce zvolíme vhodnú súradnicovú sústavu s jednotkovými vektormi, pomocou ktorých vyjadríme všetky vektory, ktoré pri výpočte použijeme. Podľa obrázku magnetický moment zvierá s vektorom magnetickej indukcie uhol φ , ktorý sa meria od smeru určeného vektorom $\mathbf{B}$, resp. vektorom $\mathbf{k}$. Vtedy na

magnetický dipól pôsobí magnetické pole momentom síl $\mathbf{M}_F$, ktorý ako vektor smeruje pred nákrešňu, má opačný smer ako jednotkový vektor $\mathbf{j}$. Moment vonkajších síl preto vyjadríme vzťahom $\mathbf{M}_V = M_V \mathbf{j}$, kde M_V , teda jeho veľkosť (absolútna hodnota), sa rovná $M_V = m_m B \sin \varphi$. Uhol φ ako vektor má tiež smer vektora $\mathbf{j}$, t. j. $d\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{j} d\varphi$, čo využijeme v skalárnom súčine, ktorý vystupuje v integráli (10.3.2.2):

$$\mathbf{M}_V \cdot d\boldsymbol{\varphi} = (M_V \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{j} d\varphi) = M_V d\varphi = m_m B \sin \varphi d\varphi.$$

Po dosadení do integrálu dostaneme výsledok (čísla ako medze integrálu znamenajú uhly φ_1 resp. φ_2):

$$W = \int_1^2 m_m B \sin \varphi d\varphi = -m_m B [\cos \varphi]_1^2 = -m_m B [\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1]. \quad (10.3.2.3)$$

Práca vonkajšieho momentu síl sa rovná prírastku potenciálnej energie magnetického dipólu, čo vyjadríme rovnicou

$$W = -m_m B [\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1] = +(E_{p2} - E_{p1}).$$

Na základe tohto vzťahu za potenciálnu energiu magnetického dipólu v magnetickom poli považujeme výraz

$$E_p = -m_m B \cos \varphi = -\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{B}, \quad (10.3.2.4)$$

ktorý je zvolený tak, aby potenciálna energia mala minimálnu hodnotu vtedy, keď vektory $\mathbf{m}_m$ a $\mathbf{B}$ sú súhlasne rovnobežné (zvierajú nulový uhol); maximálnu potom dosahuje, keď sú nesúhlasne rovnobežné, teda zvierajú uhol 180° .

Príklad 10.3.2.1 Cievkou, ktorá má tvar kružnice (polomer $R = 5 \text{ cm}$) a $N = 100$ závitov, prechádza prúd $I = 10 \text{ A}$. Cievka sa nachádza v homogénnom magnetickom poli s indukciou $B = 0,01 \text{ T}$. Akú prácu musí vykonať moment vonkajších síl, aby cievku vychýlil z rovnovážnej polohy do polohy s maximálnou potenciálnou energiou?

Riešenie: Magnetický moment cievky je $m_m = nIS \cong 1,57 \text{ Am}^2$. Práca sa rovná rozdielu maximálnej a minimálnej potenciálnej energie: $W = E_{p\max} - E_{p\min} = 2 m_m B \cong 3,14 \times 10^{-2} \text{ J}$.

Kontrolné otázky

1. Prečo môžeme magnetickému dipólu v homogénnom magnetickom poli prisúdiť potenciálnu energiu?
2. Kedy je potenciálna energia magnetického dipólu maximálna, kedy minimálna?
3. Akým vzťahom sa vyjadruje potenciálna energia magnetického dipólu?
4. Aký máte názor na možnosť využitia potenciálnej energie cievky v magnetickom poli na výpočet práce vykonanej elektromotorom?

10.3.3 Magnetické pole v okolí magnetického dipólu

Indukčné čiary majú v okolí magnetického dipólu podobný tvar ako siločiaru okolo elektrického dipólu. Preto aj vzťahy vyjadrujúce magnetickú indukciu okolo magnetického dipólu, resp. intenzitu elektrického poľa v okolí elektrického dipólu, sú prakticky rovnaké. Vzťah vyjadrujúci intenzitu elektrického poľa bol odvodený v elektrostatike (vzťah 8.2.3.6):

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right], \quad (10.3.3.1)$$

kde $\mathbf{p}$ je moment elektrického dipólu a $\mathbf{r}$ polohový vektor vynášaný zo začiatku súradnicovej sústavy, v ktorom je dipól umiestnený.

Pre magnetickú indukciu v okolí magnetického dipólu platí podobný vzťah:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right], \quad (10.3.3.2)$$

kde $\mathbf{m}_m$ je magnetický moment magnetického dipólu. Oba uvedené vzťahy správne vyjadrujú vektory $\mathbf{E}$ a $\mathbf{B}$ iba v dostatočnej vzdialenosti od dipólov, keď rozmery dipólov sú vzhľadom na veľkosť polohového vektora zanedbateľné. Zatiaľ čo vzťah (10.3.3.1) bolo možné odvodiť pomerne jednoduchým spôsobom, odvodenie vzťahu (10.3.3.2) je podstatne náročnejšie. Preto je odvodený len v dodatku D3, pričom v tejto časti textu je preukázaná jeho správnosť v dvoch špeciálnych prípadoch, v tzv. Gaussových polohách. Najprv bude vypočítaná magnetická indukcia v týchto polohách na základe vzťahu (10.3.3.2) a potom získame rovnaké výsledky použitím Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzťahu.

Prvá Gaussova poloha zodpovedá prípadu, keď polohový vektor $\mathbf{r}$ je súhlasne rovnobežný s magnetickým momentom $\mathbf{m}_m$. Je to výpočet magnetickej indukcie v bodoch ležiacich v predĺžení vektora magnetického momentu. Vzťah (10.3.3.2) sa v tomto prípade zjednoduší, pričom pri jeho úprave je vhodné zvoliť jednotkový vektor $\mathbf{j}$ rovnobežný s vektorom $\mathbf{m}_m$. Pomocou neho vyjadríme vektor magnetického momentu $\mathbf{m}_m = m_m \mathbf{j}$, aj polohový vektor $\mathbf{r} = r \mathbf{j}$. Po dosadení do vzťahu (10.3.3.2) môžeme vypočítať magnetickú indukciu v prvej Gaussovej polohe:

$$\mathbf{B}_{G1} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(m_m \mathbf{j} \cdot r \mathbf{j}) r \mathbf{j}}{r^5} - \frac{m_m \mathbf{j}}{r^3} \right] = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3m_m \mathbf{j}}{r^3} - \frac{m_m \mathbf{j}}{r^3} \right] = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{\mathbf{m}_m}{r^3}. \quad (10.3.3.3)$$

Druhá Gaussova poloha zodpovedá prípadu, keď vektory $\mathbf{m}_m$ a $\mathbf{r}$ sú na seba kolmé, čo znamená počítat magnetickú indukciu v rovine kolmej na magnetický moment. Skalárny súčin $\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r} = 0$, takže prvý člen v zátvorke sa rovná nule:

$$\mathbf{B}_{G2} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right] = -\frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_m}{r^3}. \quad (10.3.3.4)$$

Nasleduje výpočet magnetickej indukcie v Gaussových polohách pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzťahu. Vzťah (10.3.3.3) získame úpravou vzorca (10.2.3.3) vyjadrujúceho magnetickú indukciu na osi kruhového závit:

$$B_r = \frac{\mu_o I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (10.3.3.5)$$

Kruhový závit s polomerom R , ktorým prechádza prúd I má magnetický moment

$$m_m = I S = I \pi R^2,$$

čo využijeme pri úprave vzťahu (10.3.3.5):

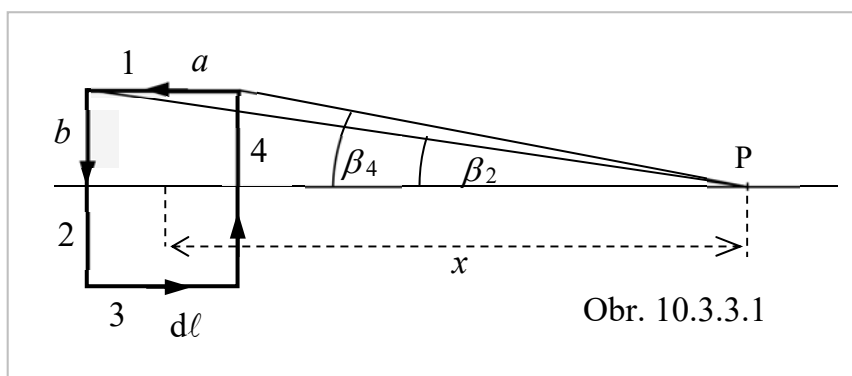
$$B_{G1} = \frac{\mu_o I}{2R} \frac{R^3}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{I \pi R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{m_m}{(x^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Vo veľkej vzdialenosti, keď $x \gg R$, v menovateli môžeme R zanedbať, čím dostaneme pre veľkosť magnetickej indukcie v prvej Gaussovej polohe výsledok

$$B_{G1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m_m}{x^3} \quad (10.3.3.6)$$

zhodujúci sa so vzťahom (10.3.3.3). V prvej Gaussovej polohe je vektor magnetickej indukcie rovnobežný s magnetickým momentom, takže súhlas platí aj vo vektorovej forme zápisu.

Druhej Gaussovej polohe zodpovedá výpočet indukcie nie na osi závit, ale v jeho rovine. V tomto prípade použijeme obdĺžnikovú slučku. Odvodenie vzťahu (10.3.3.4) pomocou kruhového závit by bolo matematicky veľmi náročné. Znamenalo by zložitú integráciu, takže v tomto prípade je jednoduchšie použiť závit s tvarom obdĺžnika, so stranami veľkosti a , b , ktorému sa pripisuje magnetický moment s veľkosťou $m_m = IS = Iab$. Smer príslušného vektora $\mathbf{m}_m$ závisí od smeru pohybu nábojov v závite, rovnako ako v prípade kruhového závit.



Výpočet je pomerne zdĺhavý, preto je uvedený v dodatku D2. Vedie k výsledku

$$\mathbf{B}_{G2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_m}{x^3}, \quad (10.3.3.9)$$

čím sa aj v tomto prípade dosiahla zhoda, konkrétne so vzťahom (10.3.3.4).

Zhoda výsledkov získaných pomocou Biotovho-Savartovho-Laplaceovho vzťahu s výsledkami ktoré sú špeciálnym prípadom vzorca (10.3.3.2) napovedá, že tento vzťah môže mať všeobecnú platnosť. Nie je to exaktný, ani úplný dôkaz jeho všeobecnej platnosti, ale môže poslúžiť na jeho akceptovanie. Odvođené vzťahy sa používajú v laboratórnych cvičeniach na meranie magnetických momentov cievok, alebo tyčových magnetov.

Príklad 10.3.3.1 Aký je vektor magnetickej indukcie v okolí magnetického dipólu v bode, ktorého polohový vektor zvierá 60° s vektorom magnetického momentu. Posúďte, či vektor $\mathbf{B}$ je rovnobežný s vektorom $\mathbf{r}$.

Riešenie
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(m_m r \cos \beta)\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right],$$

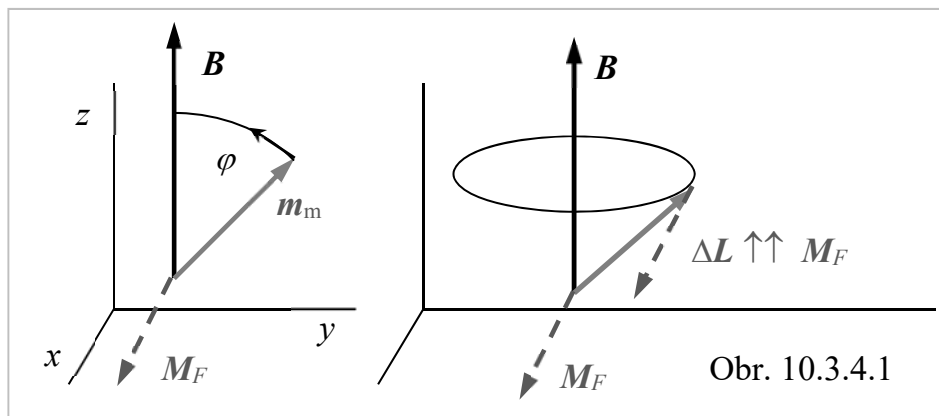
z čoho vyplýva, že vektor $\mathbf{B}$ má zložku rovnobežnú s $\mathbf{m}_m$ aj s $\mathbf{r}$, takže nemôže byť rovnobežný s vektorom $\mathbf{r}$.

Kontrolné otázky

1. Na základe vzťahu (10.3.3.2) nakreslite indukčné čiary okolo magnetického dipólu.
2. V ktorej z Gaussových polôh je magnetická indukcia väčšia (pri rovnakej vzdialenosti od dipólu) ?

10.3.4 Magnetomechanické javy, precesia magnetického dipólu

Keď sa magnetický dipól nachádza v homogénnom magnetickom poli, výsledná sila naň pôbiaca je nulová, podobne ako v prípade elektrického dipólu v elektrickom poli. Na magnetický dipól však pôsobí moment síl (10.4.1.3), ktorý má tendenciu orientovať ho tak, aby magnetický moment $\mathbf{m}_m$ bol súhlasne rovnobežný s vektorom magnetickej indukcie $\mathbf{B}$. Ak vektor $\mathbf{m}_m$ zvierá s vektorom $\mathbf{B}$ uhol φ , mal by začať meniť svoj smer tak, aby sa s vektorom $\mathbf{B}$ stotožnil po najkratšom oblúku. Podľa nákresu na ľavej časti obrázku by sa mal otáčať v rovine y, z . Inak sa však správa magnetický moment protónu či elektrónu, ktoré majú popri magnetickom momente



aj vlastný (spinový) moment hybnosti. Správajú sa ako zotrvačníky s jedným pevným bodom v gravitačnom poli – konajú precesný pohyb (pravá časť obrázku). Podmienkou takéhoto správania je zviazanosť vlastného momentu hybnosti $\mathbf{L}$ častice s jej magnetickým momentom $\boldsymbol{\mu}$, takže magnetický moment možno vyjadriť ako jeho skalárny násobok:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}, \quad (10.3.4.1)$$

kde γ je **gyromagnetický pomer** príslušnej častice. (Tento vzťah možno bližšie objasniť pomocou modelu atómu vodíka; pozri v dodatku D1.) Pohyb telesa s momentom hybnosti $\mathbf{L}$, na ktoré pôsobí moment síl, vyjadruje druhá pohybová rovnica

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_F . \quad (10.3.4.2)$$

kde $\mathbf{M}_F$ je moment síl pôsobiaci na teleso. V prípade, že moment hybnosti je zviazaný s magnetickým momentom a nachádza sa v magnetickom poli, tento moment síl sa rovná vektorovému súčinu magnetického momentu s magnetickou indukciou

$$\mathbf{M}_F = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} . \quad (10.3.4.3)$$

Spojením posledných troch rovníc dostaneme pohybovú rovnicu pre magnetický moment:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\gamma} \boldsymbol{\mu} \right) = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \gamma (\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}) . \quad (10.3.4.4)$$

Vyplýva z nej, že elementárna zmena momentu $d\boldsymbol{\mu}$ je kolmá na vektory $\mathbf{B}$ aj $\boldsymbol{\mu}$, pričom z kolmosti na vektor $\boldsymbol{\mu}$ vyplýva, že sa nemení veľkosť magnetického momentu, ale len jeho smer. Práve z tejto skutočnosti vyplýva precesný pohyb magnetického momentu. Ak sa mení iba jeho smer a nemení sa jeho veľkosť, otáča sa istou uhlovou rýchlosťou $\boldsymbol{\omega}$, pričom pre jeho deriváciu platí vzťah (pozri článok 2.2.2 v kinematike)

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\mu} . \quad (10.3.4.5)$$

Z porovnania vzťahov (10.3.4.5) a (10.3.4.4) vyplýva

$$\boldsymbol{\omega} = -\gamma \mathbf{B} . \quad (10.3.4.6)$$

Veľkosť uhlovej rýchlosti sa môže vyjadriť pomocou frekvencie f : $\omega = 2\pi f$, ktorá má názov **frekvencia Larmorovej precesie**, alebo jednoducho **Larmorova frekvencia**.

Protóny alebo elektróny nachádzajúce sa v látke, po vložení do homogénneho magnetického poľa začnú konať precesný pohyb. Tento pohyb však v dôsledku interakcie protónov či elektrónov s okolím pomerne rýchlo ustane, pokiaľ nie je podporovaný zvonku dodávaním energie. Ak sa k homogénnemu magnetickému poľu pridá vhodne orientované vysokofrekvenčné elektromagnetické pole s frekvenciou rovnajúcou sa Larmorovej frekvencii, toto podporuje precesiu, pričom dochádza k rezonančnej absorpcii jeho energie súborom protónov resp. elektrónov v látke. Tieto javy dostali názov elektrónová paramagnetická rezonancia (EPR), resp. jadrová magnetická rezonancia (NMR). Tá druhá sa využíva v medicíne ako diagnostická metóda s názvom NMR tomografia. Využíva sa v nej odlišnosť rezonančnej frekvencie protónov v rôznych tkanivách tela, resp. v zdravom a postihnutom tkanive.

Príklad 10.3.4.1 Vypočítajte Larmorovu frekvenciu protónov v magnetickom poli s indukciou $B = 0,01 \text{ T}$, keď gyromagnetický pomer protónov $\gamma = 2,675 \cdot 10^8 \text{ (A} \cdot \text{m}^2) / (\text{J} \cdot \text{s})$. Podľa vypočítanej frekvencie posúďte, do ktorej oblasti elektromagnetických vln patrí.

Riešenie: Frekvencia sa vypočíta podľa vzťahu (10.3.4.7): $f = (1/2\pi)\gamma B \cong 4,26 \cdot 10^5 \text{ Hz}$, čo je frekvencia zodpovedajúca stredným rozhlasovým vlnám.

Kontrolné otázky

1. *Prečo protóny konajú v homogénnom magnetickom poli precesný pohyb?*
2. *Čo je gyromagnetický pomer?*
3. *Čo je Larmorova frekvencia?*
4. *Ako súvisí veľkosť Larmorovej frekvencie s magnetickou indukciou vonkajšieho poľa?*

10.4 Magnetické pole v prostredí

V predchádzajúcich článkoch tejto kapitoly boli opísané vlastnosti magnetického poľa bez prihliadnutia na atómy prostredia, teda jeho vlastnosti vo vákuu, resp. v istom priblížení aj vo vzduchu. V technickej praxi sa často používajú látky, ktoré významne ovplyvňujú magnetické pole, preto treba venovať pozornosť aj takýmto javom. Na ich opis treba zaviesť ďalšie potrebné veličiny a rozlíšiť magnetické pole generované makroskopickými elektrickými prúdmi na jednej strane a magnetickými dipólmi, ktoré sú súčasťou prostredia, na druhej strane. Obsah podkapitoly končí stručným opisom paramagnetických a feromagnetických látok.

Kľúčové slová

Magnetizácia, magnetická polarizácia, intenzita magnetického poľa, magnetická susceptibilita, permeabilita, relatívna permeabilita, paramagnetické, feromagnetické a diamagnetické látky

10.4.1 Vektory magnetizácie a magnetickej polarizácie

Ide o vektorové veličiny, ktoré sú analógiou veličiny *elektrická polarizácia* z elektrostatického poľa. Elektrická polarizácia bola zavedená ako vektorový súčet elektrických momentov dipólov pripadajúci na jednotkový objem (t. j. ako podiel súčtu týchto momentov a objemu v ktorom sa nachádzajú). Elektrické dipóly vo svojom okolí vytvárajú elektrické pole, ktorého intenzita $\mathbf{E}$ sa sčítava s intenzitou elektrického poľa vytvoreného vonkajšími zdrojmi, pričom do vzťahu vyjadrujúceho výslednú intenzitu vstupuje vektor elektrickej polarizácie.

V magnetickom poli je situácia podobná. Atómy aj molekuly sa často vyznačujú spontánnym magnetickým momentom, ktorý pri jednotlivých molekulách označíme ako $\mathbf{m}_{mi}$. Vektorový súčet týchto momentov v určitom objeme $\Delta\tau$, vydelený týmto objemom, nazýva sa **magnetizácia** (značka $\mathbf{M}$) a predstavuje magnetický moment pripadajúci na jednotkový objem

$$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_{mi}}{\Delta\tau}. \quad (10.4.1.1)$$

Jednotkou magnetizácie v SI je ampér na meter, lebo $\text{A} \cdot \text{m}^2 / \text{m}^3 = \text{A/m}$.

Popri magnetizácii sa často používa veličina, ktorá má názov **magnetická polarizácia**, (značka $\mathbf{J}_m$) čo je skalárny násobok magnetizácie magnetickou konštantou (permeabilitou vákua):

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \mathbf{M}. \quad (10.4.1.2)$$

Keďže rozmer magnetickej konštanty je $(\text{kg}\cdot\text{m})/(\text{A}\cdot\text{s}^2)$, jednotka magnetickej polarizácie vyjadrená pomocou základných jednotiek SI má rozmer

$$\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{A}^2\cdot\text{s}^2}\cdot\frac{\text{A}}{\text{m}}=\frac{\text{kg}}{\text{A}\cdot\text{s}^2},$$

čo je rozmer zhodný s rozmerom magnetickej indukcie. Preto aj magnetická polarizácia sa meria v jednotkách **tesla**, čo prináša isté výhody pri opise magnetizačných procesov.

Pri opise procesov v látkach je výhodné magnetické momenty atómov (elementárnych magnetických dipólov) považovať za ekvivalenty elementárnych prúdových slučiek. Magnetický moment elementárnej slučky vyjadríme ako skalárny násobok $\mathbf{m}_m = I_e \mathbf{S}_e$, kde I_e predstavuje elementárny prúd prechádzajúci slučkou. Pritom $\mathbf{S}_e$ je vektor, ktorého veľkosť sa rovná plošnému obsahu slučky (zodpovedá rozmerom atómov) a je kolmý na rovinu slučky. Vektor $\mathbf{S}_e$ má začiatok v strede slučky a z jeho konca sa „smer prúdu“ javí proti chodu hodinových ručičiek. Ak by magnetické dipóly v objeme boli rovnaké, t. j. pre všetky by platilo $\mathbf{m}_{mi} = I_e \mathbf{S}_e$, a boli by usporiadané tak, že ich magnetické momenty by boli súhlasne rovnobežné, potom by sa vektor magnetizácie dal vyjadriť vzťahom:

$$\mathbf{M} = \frac{N I_e \mathbf{S}_e}{\Delta\tau} = n I_e \mathbf{S}_e, \quad (10.4.1.3)$$

kde N je celkový počet magnetických dipólov v objeme $\Delta\tau$ a n ich počet pripadajúci na objemovú jednotku. Pre magnetickú polarizáciu v takomto prípade dostaneme vzťah:

$$\mathbf{J}_m = \mu_0 \mathbf{M} = \mu_0 n I_e \mathbf{S}_e. \quad (10.4.1.4)$$

Kontrolné otázky

1. Definujte veličinu magnetizácia.
2. Čo je jednotkou magnetizácie?
3. Definujte veličinu magnetická polarizácia.
4. Čo je jednotkou magnetickej polarizácie?
5. Ktorá z týchto veličín má rovnakú jednotku ako magnetická indukcia?
6. Vyjadrite vektor magnetickej polarizácie pomocou elementárnych prúdov.

10.4.2 Intenzita magnetického poľa

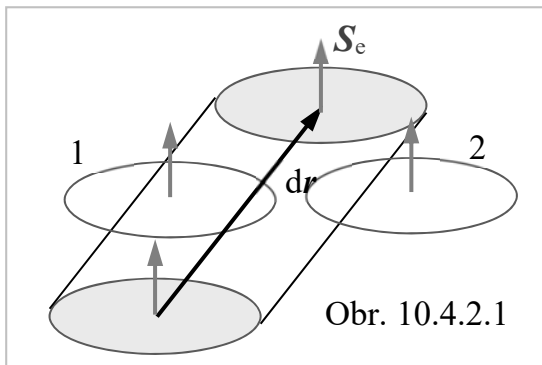
Intenzita magnetického poľa (značka $\mathbf{H}$) je vektorová veličina, ktorá mimo magnetických prostredí, teda vo vákuu súvisí s magnetickou indukciou $\mathbf{B}$ vzťahom $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$, kde μ_0 je magnetická konštanta. Tento vzťah sa zmení v magnetickom prostredí, v ktorom intenzita magnetického poľa je úmerná rozdielu magnetickej indukcie a magnetickej polarizácie. Jej zavedenie zjednodušuje výpočet magnetických polí vytváraných makroskopickými prúdmi. Veličina *intenzita magnetického poľa* je tak istou analógiou veličiny *elektrická indukcia* zavedenej na opis elektrostatických polí v prostredí.

Pri zavedení intenzity magnetického poľa v prostredí je vhodné vychádzať z cirkulácie vektora magnetickej indukcie, pričom spriahnuté prúdy rozdelíme na makroskopické prúdy I_M , podmienené pohybom voľných elektrických nábojov (v prostredí či mimo neho) a na mikroskopické prúdy I_μ , viazané na atómy, ktoré tam vytvárajú elementárne slučky a tým magnetické dipóly. Integračná krivka cirkulácie vektora $\mathbf{B}$ bude prechádzať takýmto prostredím, pričom istá časť elementárnych (mikroskopických) prúdových slučiek bude spriahnutá s integračnou krivkou, podobne ako makroskopické prúdové slučky. Preto cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$ vyjadríme vzťahom

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \left(\sum I_M + \sum I_\mu \right), \quad (10.4.2.1)$$

kde sumácie na pravej strane rovnice vyjadrujú súčty všetkých spriahnutých makroskopických aj mikroskopických prúdov.

Detailne zvážime, koľko mikroskopických (elementárnych) prúdov je v prostredí spriahnutých s integračnou čiarou na úseku $d\mathbf{r}$.



Predpokladáme, že v objemovej jednotke sa nachádza n magnetických dipólov, všetky s navzájom rovnobežnými magnetickými momentmi a teda rovnobežnými rovinami elementárnych prúdových slučiek, ktorým je priradený vektor $\mathbf{S}_e$. Na obrázku je znázornený šikmý valec, ktorého os tvorí elementárny vektor $d\mathbf{r}$, a základne majú veľkosť aj orientáciu plochy elementárnej

prúdovej slučky. Každá elementárna prúdová slučka, ktorej stred sa nachádza v šikmom valci, je spriahnutá s vektorom $d\mathbf{r}$. Na vedľajšom obrázku je to slučka s číslom 1, slučka s číslom 2 má stred mimo šikmého valca, preto jej prúd nepovažujeme za spriahnutý s vektorom $d\mathbf{r}$. Objem $d\tau$ šikmého valca vyjadríme skalárnym súčinom

$$d\tau = \mathbf{S}_e \cdot d\mathbf{r},$$

a teda počet spriahnutých slučiek je

$$n d\tau = n \mathbf{S}_e \cdot d\mathbf{r}.$$

Ak toto číslo vynásobíme elementárnym prúdom I_e slučiek, dostaneme súčet elementárnych prúdov spriahnutých s vektorom $d\mathbf{r}$:

$$dI_\mu = n I_e \mathbf{S}_e \cdot d\mathbf{r} .$$

Príspevok k cirkulácii vektora magnetickej indukcie je μ_o – násobkom tohto výrazu:

$$(\mathbf{B} \cdot d\mathbf{r})_\mu = \mu_o n I_e \mathbf{S}_e \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{r} , \quad (10.4.2.2)$$

kde $\mathbf{J}_m$ je vektor magnetickej polarizácie, ako vyplýva zo vzťahu (10.4.1.4) predošlého článku. Cirkuláciu vektora $\mathbf{B}$, keď integračná krivka prechádza prostredím s magnetickými dipólmi, vyjadríme vzťahom:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_o I_M + \oint \mathbf{J}_m \cdot d\mathbf{r} . \quad (10.4.2.2b)$$

pričom I_M v tomto vzťahu znamená súčet všetkých spriahnutých makroskopických prúdov. Rovnicu upravíme tak, aby na pravej strane zostali len makroskopické prúdy:

$$\oint \left(\frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}_m}{\mu_o} \right) \cdot d\mathbf{r} = I_M . \quad (10.4.2.3)$$

Cirkulácia vektorovej funkcie, ktorá je v integráli v zátvorke, závisí len od makroskopických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou. Považuje sa za novú veličinu, nazýva sa **intenzita magnetického poľa** a označuje písmenom $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}_m}{\mu_o} , \quad (10.4.2.4)$$

odkiaľ po úprave dostaneme rovnicu

$$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} + \mathbf{J}_m . \quad (10.4.2.5)$$

Mimo magnetického prostredia, kde $\mathbf{J}_m = \mathbf{0}$, sa uplatňuje vzťah uvedený na začiatku tohto článku: $\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H}$. Rovnica (10.4.2.5), ktorá charakterizuje magnetické prostredie (magnetické látky), je tak analógiou vzťahu $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E} + \mathbf{P}$ platného v dielektrikách. Mimo dielektrík, kde $\mathbf{P} = \mathbf{0}$, platí vzťah $\mathbf{D} = \varepsilon_o \mathbf{E}$.

Kontrolné otázky

1. Akým vzťahom sa zavádza intenzita magnetického poľa v prostredí?
2. Prispievajú k intenzite magnetického poľa v prostredí magnetické dipóly v látke?
3. Môžu magnetické dipóly prispievať k poľu vo vákuu (mimo prostredia)?
4. Ktoré veličiny prispievajú k magnetickej indukcii v prostredí?

10.4.3 Zákon celkového prúdu, cirkulácia vektora $\mathbf{H}$

Rovnica (10.4.2.3), po nahradení výrazu v zátvorke, dostane tvar:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_M \quad (10.4.3.1)$$

a je známa pod názvom **zákon celkového prúdu**, v elektrotechnike aj ako **zákon prietoku**. Je to vlastne **cirkulácia vektora intenzity magnetického poľa**.

Zo vzťahu (10.4.3.1) bezprostredne vyplýva, že jednotkou intenzity magnetického poľa je ampér na meter (A/m).

Rovnicu (10.4.3.1) prevedieme do diferenciálneho tvaru, pričom obidve strany najprv vyjadríme ako plošné integrály (ľavú stranu prostredníctvom Stokesovej vety; pozri aj dodatok D6):

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \iint \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}, \quad I_M = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S},$$

v ktorých sa integruje po ploche S ohraničenej integračnou krivkou zvolenou vo vzťahu (10.4.3.1). Vektor $\mathbf{J}$ predstavuje hustotu elektrického prúdu. Dosadením do tohto vzťahu dostaneme rovnosť:

$$\iint \text{rot } \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} = \iint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}.$$

Na obidvoch stranách rovnosti sa integruje cez rovnaké plochy, ale inak ľubovoľné, takže musí platiť:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (10.4.3.2)$$

Je to neúplná **Maxwellova rovnica**, pričom tento jej neúplný tvar platí len v stacionárnych magnetických poliach. V nestacionárnom poli na pravej strane vystupuje ďalší člen, ktorý bude zavedený v nasledujúcej kapitole o elektromagnetickom poli.

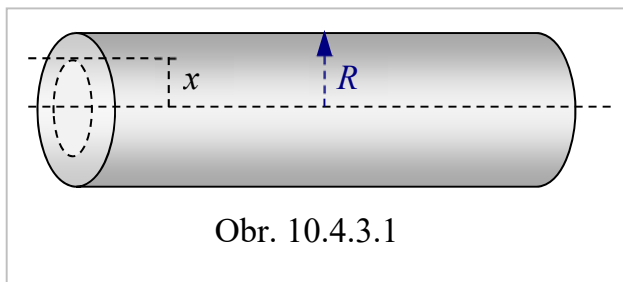
Okrem neúplnej Maxwellovej rovnice (10.4.3.2) sa často pracuje aj z analogickou rovnicou pre magnetickú indukciu, ktorú získame spätným dosadením vzťahu (10.4.2.4) do (10.4.3.2):

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_o (\mathbf{J} + \mathbf{J}_\mu) = \mu_o \mathbf{J}_c, \quad (10.4.3.2b)$$

kde $\mathbf{J}_\mu = \text{rot } \mathbf{M}$ predstavuje vyjadrenie pre mikroskopickú prúdovú hustotu pomocou magnetizácie (viď tiež Dodatok D5). Takéto vyjadrenie mikroskopickej prúdovej hustoty zodpovedá vyjadreniu nábojovej hustoty viazaného náboja pomocou polarizácie $\rho_d = -\text{div } \mathbf{P}$, a vyššie uvedená rovnica Poissonovej rovnici:

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o} (\rho_v + \rho_d).$$

Príklad 10.4.3.1 Pomocou zákona celkového prúdu vypočítajte závislosť intenzity magnetického poľa od vzdialenosti x , meranej od osi plného vodiča. Vodič má kruhový prierez (polomer R), a prechádza ním prúd I .



Riešenie: Pre kružnicu s polomerom x vo vodiči (stred kružnice je v osi vodiča) integrál intenzity magnetického poľa po jej obvode sa rovná $H 2\pi x$. Na pravej strane zákona celkového prúdu vystupuje iba prúd, prechádzajúci cez plochu ohraničenú touto kružnicou, ktorý je zlomkom celého prúdu I , a má hodnotu $I \cdot (\pi x^2) / (\pi R^2)$. Z rovnosti pravej a ľavej strany dostaneme výsledok $H = (I / 2\pi R^2) x$. Vnútri vodiča sa intenzita magnetického poľa so vzdialenosťou od osi lineárne zväčšuje.

Kontrolné otázky

1. Čomu sa rovná cirkulácia intenzity magnetického poľa?
2. Slovné formulujte zákon celkového prúdu.

10.4.4 Magnetická susceptibilita, magnetické látky

Vzťah $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_m$ (resp. $\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M})$) poukazuje na fakt, že magnetizácia prostredia prispieva k veľkosti indukcie magnetického poľa. Magnetické momenty atómov bývajú vo väčšine prípadov náhodne orientované, takže ich vektorový súčet v dostatočne veľkom objeme sa rovná nule. Vtedy aj vektor magnetickej polarizácie je nulový. Isté usporiadanie magnetických momentov nastáva vo vonkajšom magnetickom poli, vytvorené napríklad makroskopickými prúdmi. Čím silnejšie je toto pole, tým usporiadanejšie sú momenty a tým väčšia je aj hodnota magnetickej polarizácie (resp. magnetizácie $\mathbf{M}$). Táto závislosť sa vyjadruje vzťahom

$$\mathbf{J}_m = \chi \mu_0 \mathbf{H}, \quad (\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}), \quad 10.4.4.1)$$

kde χ je bezrozmerná veličina – **magnetická susceptibilita** (látky). Využitím tohto vzťahu získame tzv. materiálový vzťah:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{J}_m = \mu_0 \mathbf{H} + \chi \mu_0 \mathbf{H} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}, \quad (10.4.4.2)$$

pričom veličiny v ňom vystupujúce sú

$$\begin{aligned} \mu_r &= (1 + \chi) && \text{relatívna permeabilita (prostredia, resp.látky),} \\ \mu &= \mu_0 \mu_r && \text{permeabilita (prostredia, resp.látky).} \end{aligned}$$

Magnetická susceptibilita aj relatívna permeabilita sú bezrozmerné veličiny, ale permeabilita sa vyjadruje rovnakou jednotkou ako magnetická konštanta μ_0 . Materiálový vzťah $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ je analógiou vzťahu $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ z elektrostatiky. Jestvuje však rozdiel medzi hodnotami, ktoré dosahujú elektrická a magnetická susceptibilita. Elektrická susceptibilita χ v dielektriku nadobúda iba kladné hodnoty, takže vektor elektrickej polarizácie $\mathbf{P}$ je vždy súhlasne rovnobežný s vektorom celkovej intenzity elektrického poľa, lebo platí $\mathbf{P} = \chi \varepsilon_0 \mathbf{E}_c$. To znamená, že súhlasne rovnobežne so smerom intenzity sa orientujú aj elektrické dipóly. Keby elektrická susceptibilita bola záporná, orientovali by sa proti vonkajšiemu poľu. Také niečo sa v dielektrikách nepozoruje.

V magnetickom poli je však situácia odlišná. Ak atómy látky majú vlastné magnetické momenty, po vložení do magnetického poľa majú tendenciu orientovať sa v smere vonkajšieho magnetického poľa, čím sa magnetické pole v látke trochu zosilní. Ale v dôsledku elektromagnetickej indukcie sa v každom atóme po vložení do magnetického poľa indukuje slabý magnetický moment, orientovaný proti vonkajšiemu poľu (pozri Lenzov zákon v kapitole o elektromagnetickom poli). Tým sa magnetické pole trochu zoslabuje, pričom toto zoslabenie je vo všeobecnosti menšie ako zosilnenie v dôsledku orientácie vlastných magnetických momentov atómov. V látkach, ktorých atómy nemajú vlastné magnetické momenty, sa prejavuje iba zoslabenie poľa. Zo vzťahu $\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}$ potom priamo vyplýva, že ich magnetická susceptibilita musí byť záporná. Takéto látky sa nazývajú **diamagnetické** a patria medzi ne napríklad inertné plyny, zlato, zinok, kremík a mnohé organické látky. Diamagnetické látky sú od magnetu slabo odpudzované. Ako ideálne diamagnetiká sa správajú supravodiče, ktorých magnetická susceptibilita dosahuje hodnotu $\chi = -1$, čo znamená, že magnetická indukcia v nich je nulová. Relatívna permeabilita diamagnetických látok má hodnotu vždy menšiu ako 1, t. j. $\mu_r < 1$.

Atómy väčšiny prvkov majú vlastný magnetický moment, takže ich vložením do magnetického poľa sa pole mierne zosilní. Takéto látky sú **paramagnetické**. Magnetické pole má tendenciu magnetické momenty atómov usporiadať, orientovať ich do smeru vektora $\mathbf{H}$, ale tepelný pohyb pôsobí proti tomuto usporiadaniu. Jeden vplyv magnetickú polarizáciu látky zväčšuje, druhý znižuje. O magnetickej polarizácii preto môžeme (približne) povedať, že je priamoúmerná intenzite pôsobiaceho magnetického poľa, a nepriamo úmerná termodynamickej teplote, čo sa prejaví na vzťahu (10.4.4.1) tým, že magnetická susceptibilita je nepriamo úmerná termodynamickej teplote T :

$$\chi = C/T, \quad (10.4.4.3)$$

kde C je Curieho konštanta. Pre paramagnetické látky tak vzťah (10.4.4.1) nadobudne tvar

$$J_m = C \frac{\mu_0 H}{T}. \quad (10.4.4.4)$$

Medzi paramagnetické látky patria napríklad platina, alkalické kovy, niektoré plyny (kyslík). Relatívna permeabilita paramagnetík je iba o málo väčšia než 1.

Osobitnú skupinu látok, ktorých atómy majú vlastné magnetické momenty, tvoria **feromagnetiká**. Aj mimo magnetického poľa v nich existujú malé oblasti (feromagnetické domény), v ktorých sú magnetické momenty atómov usporiadané navzájom rovnobežne. Dokonalá rovnobežnosť všetkých magnetických momentov v doméne jestvuje iba v blízkosti absolútne nulovej teploty, s rastúcou teplotou sa narúša a pri tzv. Curieho teplote feromagnetizmus látky zaniká, látka prechádza do paramagnetického stavu. Feromagnetiká sa ľahko magnetujú, takže ich relatívna permeabilita nadobúda podstatne väčšie hodnoty ako 1. Patria medzi ne najmä železo, kobalt a nikel, ako aj ich početné zliatiny.

Podrobnejší opis vlastností magnetických látok nie je predmetom tohto textu.

Kontrolné otázky

1. *Definujte magnetickú susceptibilitu.*
2. *Ako súvisí magnetická susceptibilita s relatívnou permeabilitou?*
3. *Ako súvisí permeabilita s relatívnou permeabilitou?*
4. *Ako sa delia magnetické látky podľa veľkosti relatívnej permeability?*

DODATKY

D1 Objasnenie vzťahu (10.3.4.1)

Vzťah (10.3.4.1) možno priblížiť pomocou zjednodušeného modelu atómu vodíka. Predpokladajme, že okolo protónu obieha elektrón rýchlosťou v po kružnici s polomerom R . Veľkosť hybnosti elektrónu je vyjadrená súčinom jeho hmotnosti m_e a rýchlosti v : $p = m_e v$, a veľkosť momentu hybnosti vzhľadom na stred kružnice

$$L = R m_e v .$$

Elektrón nesúci elementárny elektrický náboj e predstavuje v atóme prúd veľkosti $I = e/T$, kde T je doba obehu elektrónu, pričom $vT = 2\pi R$. Magnetický moment μ atómu s obiehajúcim elektrónom vyjadríme vzťahom

$$\mu = IS = \frac{e}{T} \pi R^2 = \frac{m_e v}{m_e v} \frac{e \pi R^2}{T} = \frac{e}{m_e} \frac{R m_e v}{v T} \pi R = \frac{e}{m_e} \frac{R m_e v}{2\pi R} \pi R = \frac{e}{2m_e} L = \gamma L ,$$

pričom pre gyromagnetický pomer sme dostali hodnotu $\gamma = e/2m_e$. Výsledok bol odvodený pre zjednodušený model atómu vodíka, ale podobný výsledok platí aj pre vlastné magnetické momenty elektrónu, či protónu. Veľkosť gyromagnetického pomeru protónu $\gamma = 2,675 \times 10^8 \text{ (A} \cdot \text{m}^2)/(\text{J} \cdot \text{s})$.

Pre úplnosť uvedieme aj všeobecnú definíciu magnetického momentu mikroskopickkej prúdovej hustoty lokalizovanej v objeme V :

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{r} \times \mathbf{J}_\mu \, d\tau ,$$

platnú aj v prípade, keď mikroskopická prúdová hustota nemá charakter náboja obiehajúceho po kružnici.

V prípade tenkého vodiča v tvare kružnice s polomerom R , prierezom S a konštantnou prúdovou hustotou $J = I/S$ bude polohový vektor objemového elementu vodiča vždy kolmý na prúdovú hustotu a výsledok ich vektorového násobenia bude orientovaný kolmo na rovinu v ktorej vodič leží, a v súhlase s pravidlom pravej ruky vzhľadom na orientáciu prúdu. Integrand je konštantný a výsledný magnetický moment bude zhodný s definíciou (10.3.1.2)

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} R \frac{I}{S} 2\pi R S = I \pi R^2 \mathbf{n}$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor udávajúci orientáciu magnetického momentu prúdovej slučky.

D2 Rovnica pre vektorový potenciál a odvodenie vzťahu (10.2.5.6)

Vyjdeme z rovnice (10.4.3.2), ktorú splňa magnetická indukcia $\mathbf{B}$ a z definície vektorového potenciálu vzťahom $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Využitím identity $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ nájdeme:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (10.D2.1)$$

Vektorový potenciál nie je svojou definíciou určený jednoznačne; pri ľubovoľnej funkcii $f(\mathbf{r})$ vedie aj $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r})$ k identickej indukcii magnetic-kého poľa:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}' - \nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}',$$

pretože $\nabla \times \nabla f(\mathbf{r}) = 0$ pre ľubovoľnú funkciu $f(\mathbf{r})$. Možnosť výberu rôzneho vektorového potenciálu sa nazýva jeho *kalibrácia*. V takzvanej coulombickej kalibrácii sa od vektorového potenciálu požaduje splnenie dodatočnej podmienky $\text{div } \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Ak by sme poznali vektorový potenciál, ktorý tejto podmienke nevyhovuje, $\nabla \cdot \mathbf{A}' = g(\mathbf{r}) \neq 0$, potom vektorový potenciál v coulombickej kalibrácii z neho nájdeme pomocou kalibračnej funkcie, ktorá je riešením Poissonovej rovnice $\nabla^2 f = g$, lebo potom bude platiť:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}' - \nabla^2 f = g - g = 0.$$

Dosadením vzťahu (10.D2.1) do rovnice (10.4.3.2) nájdeme rovnicu pre vektorový potenciál v coulombickej kalibrácii:

$$-\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}_c. \quad (10.D2.2)$$

V analógii s riešením Poissonovej rovnice v elektrostatike, môžeme priamo napísať Riešenie: aj pre vektorový potenciál:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \quad (10.D2.3)$$

V špeciálnom prípade tenkého prúdovodiča, ktorého dĺžkový element $d\mathbf{r}' = \mathbf{n}' dl$ je rovnobežný s vektorom prúdovej hustoty $\mathbf{J}_c = J_c \mathbf{n}'$, zvolíme si objemový element integrácie v tvare $d\tau' = d\mathbf{S}' \cdot d\mathbf{r}' = dS dl$. Uvážením, že $J_c dS' = I$ je veľkosť prúdu v prúdovodiči, dostaneme vzťah (10.2.5.6):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

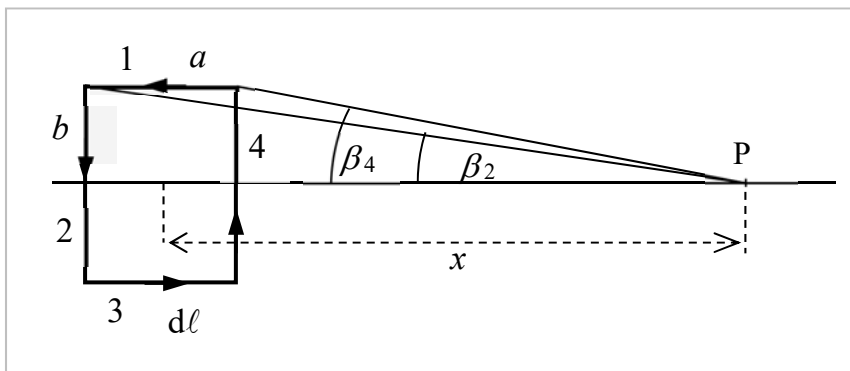
Z posledného vzťahu vieme nájsť aj Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah (10.2.1.6), a to pomocou rotácie vektorového potenciálu a vzťahu:

$$\nabla \times \frac{\mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Vidíme teda, že Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah je riešením rovnice (10.4.3.2) pre magnetickú indukciu v prípade, ak ľubovoľne tvarovaným tenkým vodičom tečie stály elektrický prúd.

D3 Magnetické pole v rovine prúdovej slučky

Odvodenie vzťahu (10.3.3.4) sa zjednoduší, ak použijeme závit s tvarom obdĺžnika, so stranami veľkosti a, b , ktorému sa pripisuje magnetický moment veľkosti $m_m = IS = Iab$. Smer príslušného vektora $\mathbf{m}_m$ závisí od smeru pohybu nábojov v závite, rovnako ako v kruhovom závite.



Predpokladáme, že rozmery závit a, b v porovnaní so vzdialenosťou x bodu P od závit $sú$ zanedbateľné. Preto strany obdĺžnika označené číslicami 1 a 3 vzhľadom na faktickú rovnobežnosť ich dĺžkových elementov $d\ell$ s polohovým vektorom $\mathbf{r}$, smerujúcim do bodu P, neprispievajú v tomto bode k magnetickému poľu. Vektorový súčin takýchto elementov $I d\ell$ s polohovým vektorom $\mathbf{r}$, ktorý vystupuje v Biotovom-Savartovom-Laplaceovom vzťahu, sa rovná nule. Treba vypočítať a vektorovo sčítať príspevky od strán označených číslicami 2 a 4. Výpočet je veľmi podobný ako v prípade veľmi dlhého priameho vodiča, (výpočet vedúci k výsledku 10.2.2.3), odlišnosť je iba v integračných hraniciach. Výpočet príspevkov od strán 2 a 4 vedie k výsledkom:

$$B_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{\sin \beta_2}{(x + a/2)}, \quad B_4 = \frac{\mu_o I}{2\pi} \frac{\sin \beta_4}{(x - a/2)}. \quad (10.3.3.7)$$

Vektory $\mathbf{B}_2$ a $\mathbf{B}_4$ majú v bode P opačný smer, preto tieto výsledky treba navzájom odčítať. Väčší je príspevok od strany 4, lebo je k bodu P bližšie, takže určuje aj smer výsledného vektora $\mathbf{B}$ v tomto bode. Ďalšou úpravou pre veľkosť výsledného vektora $\mathbf{B}$ dostaneme:

$$\begin{aligned} B_{G2} = B_4 - B_2 &= \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[\frac{\sin \beta_4}{(x - a/2)} - \frac{\sin \beta_2}{(x + a/2)} \right] \cong \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[\frac{\text{tg } \beta_4}{(x - a/2)} - \frac{\text{tg } \beta_2}{(x + a/2)} \right] \cong \\ &= \frac{\mu_o I}{2\pi} \left[\frac{(b/2x)}{(x - a/2)} - \frac{(b/2x)}{(x + a/2)} \right] = \frac{\mu_o Ib}{4\pi x} \left[\frac{x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}}{(x^2 - a^2/4)} \right] \cong \frac{\mu_o Ib}{4\pi x} \frac{a}{x^2} \end{aligned}$$

a konečne

$$B_{G2} = \frac{\mu_o Iab}{4\pi x^3} = \frac{\mu_o \mathbf{m}_a}{4\pi x^3}. \quad (10.3.3.8)$$

Vektor $\mathbf{m}_a$ podľa usporiadania na Obr. 10.3.3.1 smeruje k čitateľovi, ale vektor $\mathbf{B}$ v bode P smeruje na opačnú stranu, lebo bližšia časť závitú svojimi účinkami v bode P prevláda. Preto vo vektorovom tvare vzťahu (10.3.3.8) musí vystupovať znamienko mínus:

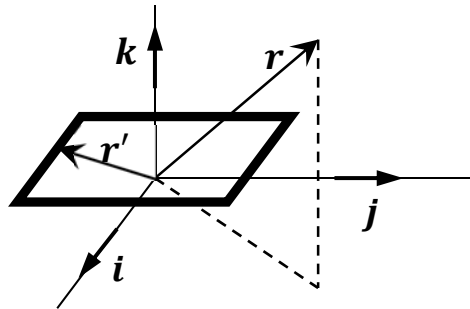
$$B_{G2} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_a}{x^3}, \quad (10.3.3.9)$$

čím sa dosiahla úplná zhoda so vzťahom (10.3.3.4).

D4 Vektorový potenciál a magnetické pole prúdovej slučky

Ak vektorový potenciál budeme počítat' vo vzdialenostiach oveľa väčších ako sú rozmery prúdovej obdĺžnikovej slučky so stranami a, b , tak podobne ako pri potenciáli elektrického dipólu, môžeme výraz $(1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ vo všeobecnom vzťahu pre vektorový potenciál (10.D2.3) rozvinúť do Taylorovho radu, a zanedbať členy druhého a vyššieho rádu premennej $\mathbf{r}'$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r} \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} \iiint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{J}(\mathbf{r}') d\tau \quad (10.D4.1)$$



Prúdovú hustotu v lineárnych segmentoch slučky, (rovnobežné s jednotkovými vektormi $\mathbf{i}$ resp. $\mathbf{j}$), budeme považovať za konštantnú, pričom v jednotlivých segmentoch má tvar:

1. $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -I/S\mathbf{i}$
 2. $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -I/S\mathbf{j}$
 3. $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = +I/S\mathbf{i}$
 4. $\mathbf{J}(\mathbf{r}) = +I/S\mathbf{j}$
- (10.D4.2)

kde I je prúd vo vodiči slučky a S veľkosť prierezu tohto vodiča. Zo zápisu (10.D4.2) vidno, že súčet týchto štyroch príspevkov je nulový. Tomuto súčtu je úmerný objemový integrál prúdovej hustoty a teda aj prvý člen v rovnici (10.D4.1) je nulový.

Objemový integrál v druhom člene rozpíšeme ako súčet integrálov cez lineárne segmenty slučky:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \iiint_1 \mathbf{r}' J(\mathbf{r}') d\tau = - \iiint_1 \mathbf{r}' d\tau \frac{I}{S} \mathbf{i} = -\frac{b}{2} \mathbf{j} S a \frac{I}{S} \mathbf{i} = -\frac{abl}{2} \mathbf{j} \mathbf{i} \\
2. \quad & \iiint_2 \mathbf{r}' J(\mathbf{r}') d\tau = - \iiint_2 \mathbf{r}' d\tau \frac{I}{S} \mathbf{j} = +\frac{a}{2} \mathbf{i} S b \frac{I}{S} \mathbf{j} = +\frac{abl}{2} \mathbf{i} \mathbf{j} \\
3. \quad & \iiint_3 \mathbf{r}' J(\mathbf{r}') d\tau = + \iiint_3 \mathbf{r}' d\tau \frac{I}{S} \mathbf{i} = -\frac{b}{2} \mathbf{j} S a \frac{I}{S} \mathbf{i} = -\frac{abl}{2} \mathbf{j} \mathbf{i} \\
4. \quad & \iiint_4 \mathbf{r}' J(\mathbf{r}') d\tau = + \iiint_4 \mathbf{r}' d\tau \frac{I}{S} \mathbf{j} = +\frac{a}{2} \mathbf{i} S b \frac{I}{S} \mathbf{j} = +\frac{abl}{2} \mathbf{i} \mathbf{j}
\end{aligned}$$

Po dosadení do rovnice (10.D4.1) pre vektorový potenciál magnetického dipólu nájdeme vyjadrenie:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot Iab(\mathbf{i}\mathbf{j} - \mathbf{j}\mathbf{i})}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{Iab(x\mathbf{j} - y\mathbf{i})}{r^3} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_m \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (10.D4.3)$$

kde $\mathbf{m}_m = Iab\mathbf{k}$ je moment magnetického dipólu prúdovej slučky.

Magnetickú indukciu nájdeme ako rotáciu vektorového potenciálu

$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$, s využitím vzťahu pre dvojnásobný vektorový súčin $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})\mathbf{c}$:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\mathbf{m}_m \nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{m}_m \cdot \nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right).$$

Jednotlivé členy upravíme nasledovne:

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\nabla \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} = \frac{3}{r^3} - \mathbf{r} \cdot \frac{3\mathbf{r}}{r^5} = 0,$$

$$\nabla \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{k}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}\mathbf{r}}{r^5},$$

Pomocou ktorých nájdeme výsledok uvedený v rovnici (10.3.3.2):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right).$$

D5 Magnetizácia a magnetické pole

Pre vektorový potenciál magnetického poľa vytváraného magnetickým dipólom platí vzťah (10.D4.2):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3},$$

ktorý použitím princípu superpozície a definície magnetizácie prejde na tvar:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d\tau'. \quad (10.D5.1)$$

Použitím vzťahu:

$$\nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3},$$

kde ∇' predstavuje operáciu gradient podľa súradníc vektora $\mathbf{r}'$, upravíme rovnicu (10.D5.1) nasledovne:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' = \\ &= -\frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \nabla' \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d\tau' + \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau'. \end{aligned}$$

Prvý člen upravíme pomocou Gaussovej vety na plošný integrál (viď poznámka nižšie):

$$-\frac{\mu_o}{4\pi} \iiint d\mathbf{S} \times \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS.$$

Vektorový potenciál magnetického poľa so spojitým rozložením magnetizácie v látke možno teda napísať v tvare:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_o}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS + \frac{\mu_o}{4\pi} \iiint \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau',$$

kde prvý člen predstavuje príspevok od efektívnej povrchovej prúdovej hustoty $\mathcal{J}_\mu = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}$ a druhý člen od mikroskopickej prúdovej hustoty v objeme materiálu $\mathcal{J}_\mu = \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r})$. Tento výsledok je v zhode s fyzikálnym významom magnetizácie, ktorý sme našli v časti (8.4.2).

Poznámka: Gaussovu vetu možno použiť aj na zmenu objemového integrálu z rotácie vektorovej funkcie na integrál cez plochu uzatvárajúcu uvažovaný objem. Ak totiž objemový integrál skalárne vynásobíme s ľubovoľným konštantným vektorom dostávame:

$$\iiint \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) d\tau = \iiint \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{a}) d\tau = \oiint (\mathbf{F} \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \oiint (d\mathbf{S} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}.$$

Pretože táto rovnosť platí pre ľubovoľný vektor $\mathbf{a}$, musí platiť aj rovnica:

$$\iiint \nabla \times \mathbf{F} d\tau = \oiint d\mathbf{S} \times \mathbf{F}.$$

D6 Súvis magnetizácie s povrchovými prúdmi

V prípade magnetov je typická situácia, keď v objeme magnetu je jeho magnetizácia konštantná, a teda aj $\text{rot } \mathbf{M} = 0$, a na rozhraní magnetu a jeho okolia sa magnetizácia skokovo zmení na nulu, t. j. nie je v tomto mieste diferencovateľná. V tomto prípade môžeme deformovať integračnú krivku na pravej strane rovnice (10.4.2.2b) až tesne k vnútornému povrchu magnetu bez zmeny výsledku integrálu, nakoľko v magnete je $\text{rot } \mathbf{M} = 0$. Použitím vektora vonkajšej normály povrchu $\mathbf{n}$ potom nájdeme:

$$\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\text{pod povrchom}} (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) \cdot (-\mathbf{n} \times d\mathbf{r}).$$

Integračný element $-\mathbf{n} \times d\mathbf{r}$ je kolmý na integračnú krivku, ležiacu na povrchu magnetu. Takýto element je analógiou plošného elementu $d\mathbf{S}$ dvojrozmernej plochy v trojrozmernom priestore. Veličina $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ má potom význam efektívnej povrchovej prúdovej hustoty, zodpovedajúcej nevykompenzovanej mikroskopickej prúdovej hustoty vytvárajúcej magnetické pole v okolí magnetu (viď tiež Dodatok D5). Efektívna povrchová prúdová hustota je dôsledkom skokového vynulovania magnetizácie na povrchu magnetu podobne, ako je indukovaný viazaný povrchový náboj $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ dôsledkom skokového vynulovania elektrickej polarizácie na povrchu polarizovaného dielektrika.

SÚHRN VZŤAHOV

definícia magnetickej indukcie	$\mathbf{F}_m = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Lorentzova sila	$\mathbf{F} = QE + Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Ampérová sila	$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$
moment sily pôsobiaci na prúdovú slučku	$\mathbf{M}_F = I\mathbf{S} \times \mathbf{B}$
Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah	$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$
veľkosť magnetickej indukcie v okolí veľmi dlhého priameho vodiča	$B = \frac{\mu_o I}{2\pi R}$
veľkosť magnetickej indukcie na osi kruhového závitu	$B_r = \frac{\mu_o I}{2R} \sin^3 \beta$
cirkulácia vektora magnetickej indukcie	$\oint \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \pm \mu_o I$
definícia magnetického toku	$\Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
druhá Maxwelllova rovnica v integrálnom a v diferenciálnom tvare	$\oiint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$
definícia vektorového potenciálu	$\text{rot } \mathbf{A} = (\nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{B}$
vektorový potenciál budený vodičom elektrického prúdu	$\mathbf{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{l}}{r}$
definičný vzťah ampéra	$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_o I_1 I_2}{2\pi R}$
definičný vzťah magnetického momentu	$\mathbf{M}_F = \mathbf{m}_m \times \mathbf{B}$
potenciálna energia magnetického dipólu	$E_p = -m_m B \cos \varphi = -\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{B}$
magnetická indukcia v okolí magnetického dipólu	$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\mathbf{m}_m \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}_m}{r^3} \right]$

definícia vektora magnetizácie $\mathbf{M}$	$\mathbf{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{m}_{mi}}{\Delta\tau}$
definícia magnetickej polarizácie $\mathbf{J}_m$	$\mathbf{J}_m = \mu_o \mathbf{M}$
definícia intenzity magnetického poľa $\mathbf{H}$	$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B} - \mathbf{J}_m}{\mu_o}$
materiálový vzťah v magnetizme	$\mathbf{B} = \mu_o \mathbf{H} + \mathbf{J}_m$
zákon celkového prúdu	$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = I_M$
zavedenie magnetickej susceptibility χ	$\mathbf{J}_m = \chi \mu_o \mathbf{H}$, resp. $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$
relatívna permeabilita μ_r	$\mu_r = (1 + \chi)$
permeabilita	$\mu = \mu_o \mu_r$

SLOVNÍK

Ampérov magnetický moment → magnetický moment

Ampérova sila – sila pôsobiaca na vodič elektrického prúdu v magnetickom poli

Biotov-Savartov-Laplaceov vzťah (vzorec)– vzťah na výpočet magnetickej indukcie v okolí vodičov elektrického prúdu

cirkulácia intenzity magnetického poľa – integrál intenzity magnetického poľa po uzavretej krivke v magnetickom poli; rovná sa súčtu všetkých makroskopických prúdov spriahnutých s integračnou krivkou; pozri aj zákon celkového prúdu

cirkulácia magnetickej indukcie – integrál magnetickej indukcie po uzavretej krivke v magnetickom poli; rovná sa súčtu všetkých prúdov (makroprúdov aj mikroprúdov) spriahnutých s integračnou krivkou, vynásobenému magnetickou konštantou μ_0

Coulombov magnetický moment – skalárny násobok (Ampérovho) magnetického momentu magnetickou konštantou

definícia ampéra – *do mája 2019*: jeden ampér je taký konštantný elektrický prúd pretekajúci dvomi priamymi rovnobežnými nekonečne dlhými vodičmi zanedbateľného kruhového prierezu, vzájomne vzdialenými 1 meter vo vákuu, ktorý vytvára medzi týmito vodičmi silu veľkosti 2×10^{-7} newtona na meter dĺžky vodiča. *Od mája 2019* je ampér definovaný na základe konvenčnej hodnoty elementárneho náboja, ktorého definovaným násobkom je coulomb; vodičom tečie prúd 1 A, ak za sekundu prierezom vodiča pretečie 1 coulomb

diamagnetické látky – látky zoslabujúce vonkajšie magnetické pole; magnetické momenty ich molekúl sú mimo magnetického poľa nulové, ich relatívna permeabilita je menšia ako 1 a magnetická susceptibilita záporná

feromagnetické látky – látky výrazne zosilňujúce vonkajšie magnetické pole; ich molekuly majú vlastné magnetické momenty, ktoré pod Curieho teplotou majú tendenciu orientovať sa navzájom rovnobežne aj v neprítomnosti vonkajšieho magnetického poľa; majú vysokú relatívnu permeabilitu

Gaussove polohy – špeciálne body v priestore v okolí magnetického dipólu, a to v predĺžení vektorovej priamky jeho magnetického momentu (prvá Gaussova poloha), resp. v rovine kolmej na túto priamku (druhá Gaussova poloha)

gyromagnetický pomer – pomer magnetického momentu (elementárnej) častice a jej momentu hybnosti

indukčné čiary – myslené uzavreté čiary (krivky) v magnetickom poli, ktoré majú tú vlastnosť, že v každom ich bode sú dotyčnice rovnobežné s vektorom magnetickej indukcie

intenzita magnetického poľa (H) – vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole v prostredí, závisiaca len od makroskopických elektrických prúdov, ale nie od mikroskopických prúdov, t. j. od magnetických dipólov prítomných v látke; je to podiel magnetickej indukcie a permeability prostredia; jednotka: ampér na meter (A/m)

Larmorova frekvencia – frekvencia precesného pohybu častice, ktorá má magnetický moment a moment hybnosti, vo vonkajšom magnetickom poli

Lorentzova sila – súčet magnetickej sily a elektrickej sily, ktoré pôsobia na elektricky nabitú časticu pohybujúcu sa v elektromagnetickom poli; často sa za Lorentzovu silu pokladá len jej časť – magnetická sila

magnetická indukcia (B) – vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole, definovaná na základe silových účinkov magnetického poľa na pohybujúce sa elektricky nabitú časticu; jednotka: tesla (T)

magnetická konštanta, permeabilita vákua (μ_0) – skalárna konštanta vystupujúca v Biotovom–Savartovom–Laplaceovom zákone vo vákuu; jej hodnota pôvodne bola určená experimentálne, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ (kg m)/(A}^2\text{s}^2\text{)}$, neskôr bola považovaná za jednu zo základných fyzikálnych konštánt

magnetická polarizácia (J_m) – vektorová veličina charakterizujúca magnetický stav látky, skalárny násobok magnetizácie magnetickou konštantou; jednotka: tesla (T)

magnetická sila – sila pôsobiaca v magnetickom poli na vodiče elektrického prúdu, alebo na pohybujúce sa elektricky nabitú časticu

magnetická susceptibilita (χ) – bezrozmerná veličina sprostredkujúca vzťah medzi intenzitou magnetického poľa a magnetizáciou; pri diamagnetických látkach je záporná, pri feromagnetických značne väčšia než 1

magnetické pole – fyzikálne pole v okolí vodičov elektrického prúdu alebo magnetických dipólov, v ktorom na iné vodiče prúdu, alebo na pohybujúce sa elektricky

nabité častice, pôsobí (magnetická) sila; na magnetický dipól pôsobí v magnetickom poli aj moment síl

magnetický dipól – objekt s magnetickým momentom, napr. tyčový magnet, prúdová slučka

magnetický moment, Ampérov magnetický moment (m_m) – vektorová veličina kvantitatívne charakterizujúca magnetický dipól, definovaná pomocou momentu síl, ktorý na dipól pôsobí v homogénom magnetickom poli; jednotka: $A \cdot m^2$

magnetický tok (Φ) – skalárna veličina – plošný integrál vektora magnetickej indukcie; jednotka: weber (Wb)

magnetizácia (M) – veličina charakterizujúca magnetický stav látky – vektorový súčet magnetických momentov atómov látky, pripadajúci na jednotku objemu; jednotka: ampér na meter (A/m)

materiálový vzťah – v magnetickom poli vzťah medzi vektormi magnetickej indukcie, intenzity magnetického poľa a magnetizáciou, resp. magnetickou polari-záciou

Maxwellova rovnica 2. – rovnica vyjadrujúca skutočnosť, že magnetické pole je nežriedlové, t. j. že indukčné čiary sú uzavreté, takže indukčný tok cez uzavretú plochu je nulový

paramagnetické látky – látky slabo zosilňujúce vonkajšie magnetické pole; magnetické momenty ich molekúl sú nenulové, ale mimo magnetického poľa neusporiadané; ich relatívna permeabilita je > 1

permeabilita (μ) – konštanta charakterizujúca magnetické vlastnosti materiálu – súčin magnetickej konštanty a relatívnej permeability; jednotka: $(kg \cdot m)/(A^2 \cdot s^2)$

permeabilita vákua $\rightarrow$ magnetická konštanta

relatívna permeabilita (μ_r) – bezrozmerná veličina charakterizujúca prostredie; udáva, koľkokrát je magnetická indukcia vytvorená makroskopickými prúdmi v prostredí väčšia, než vo vákuu

spriahnuté prúdy – elektrické prúdy prechádzajúce plochou, ktorá je preložená zvolenou uzavretou integračnou čiarou

tesla (T) – jednotka magnetickej indukcie v SI

vektorový potenciál (A) – vektorová veličina charakterizujúca magnetické pole – analógia skalárneho potenciálu elektrostatického poľa; vektorovou operáciou rotácia sa z vektorového potenciálu získa magnetická indukcia

weber (Wb) – jednotka magnetického toku: $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$

zákon celkového prúdu, zákon prietoku – zákon, podľa ktorého sa cirkulácia intenzity magnetického poľa rovná súčtu všetkých spriahnutých makroskopických elektrických prúdov

zákon prietoku → zákon celkového prúdu

ÚLOHY

Sily v magnetickom poli

1. Elektrón (hmotnosť m_e , náboj e) vletel do homogénneho magnetického poľa kolmo na indukčné čiary. V magnetickom poli sa začal pohybovať po kružnici s dobou obehu T . Vypočítajte veľkosť B vektora magnetickej indukcie tohto poľa. Aká by bola doba obehu T_1 v magnetickom poli s indukciou $B_1 = 10^{-2}$ T?

Výsledok: $B = \frac{(2\pi m_e)}{(eT)}$, $T_1 = 3,6 \times 10^{-9}$ s.

2. Elektrón (m_e , e) urýchlený elektrickým napätím $U = 1$ kV, vletí do homogénneho magnetického poľa s indukciou veľkosti $B = 2 \times 10^{-3}$ T, pričom vektor jeho rýchlosti $\mathbf{v}$ zvierá s vektorom $\mathbf{B}$ uhol $\beta = 30^\circ$. Vypočítajte veľkosť rýchlosti v elektrónu, polomer R a stúpanie s skrutkovice, po ktorej sa bude elektrón pohybovať.

Výsledok: $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$, $R = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{m_e U}{2e}}$, $s = \sqrt{3} \frac{2\pi}{B} \sqrt{\frac{m_e U}{e}}$.

3. V kruhovom urýchl'ovači, ktorého homogénne magnetické pole má magnetickú indukciu veľkosti B , sa pohybuje protón (m_p , e) po kružnici s polomerom R . Akým elektrickým napätím U bol protón urýchlený pred vstupom do magnetického poľa urýchl'ovača?

Výsledok: $U = \frac{1}{2} \frac{eB^2 R^2}{m_p}$.

4. V homogénnom magnetickom poli, ktorého vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ má horizontálny smer, sa nachádza veľmi dlhý vodič, ktorého hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky je $\lambda = dm/dl$. Vodič je uložený horizontálne, kolmo na vektor magnetickej indukcie. Aký veľký prúd I_1 musí prechádzať vodičom, aby magnetická sila kompenzovala jeho tiaž?

Výsledok: $I = \lambda g/B$.

5. Veľmi dlhý priamy vodič je uložený horizontálne a prechádza ním prúd I_1 . Pod ním vo vzdialenosti x , v spoločnej vertikálnej rovine, je uložený druhý veľmi dlhý priamy vodič, ktorého hmotnosť pripadajúca na jednotku dĺžky je $\lambda = dm/dl$. Vodičom prechádza prúd I_2 . Pri akej vzdialenosti x_1 sa tiaž vodiča kompenzuje magnetickou silou? Aký smer musí mať prúd I_2 vzhľadom na prúd I_1 ?

Výsledok: $x_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi g \lambda}$.

6. Vektor $\mathbf{B}$ magnetickej indukcie homogénneho poľa je rovnobežný s osou z karteziánskej súradnicovej sústavy a má smer jednotkového vektora $\mathbf{k}$. V tomto poli sa nachádza dlhý priamy vodič, ktorý leží v rovine x, y , s osou x zvierá uhol β a prechádza ním prúd I_1 . Akou veľkou silou F_1 pripadajúcou na jednotku dĺžky musíme pôsobiť na vodič, aby zostal v pokoji? Aký smer má táto sila? Ak touto silou premiestnime vodič o vzdialenosť L v smere sily, akú prácu W vykonáme?

Výsledok: $\frac{dF_1}{dl} = I_1 B$, $\frac{dW}{dl} = I_1 B L$.

7. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom sa nachádza obdĺžnikový závit so stranami veľkosti a, b . Strana a je rovnobežná s vodičom, a vzdialená od neho o vzdialenosť c . Vypočítajte veľkosť výslednej sily F pôsobiacej na závit, ak vodičom prechádza prúd I_1 , závitom prúd I_2 . Aký je smer tejto sily? Aký moment síl M_F pôsobí na závit?

Výsledok: $F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a b}{2\pi c(c+b)}$, $M_F = 0$.

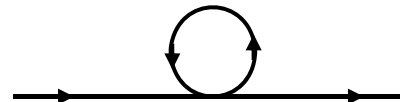
Magnetické pole v okolí vodičov prúdu

8. Po obvodu tenkého kruhového kotúča s polomerom R , zhotoveného z elektricky nevodivého materiálu, je rovnomerne rozložený elektrický náboj Q . Kotúč sa spolu s nábojom otáča frekvenciou f okolo osi, ktorá je kolmá na jeho rovinu a prechádza jeho stredom. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie B a intenzity magnetického poľa H v strede kotúča.

Výsledok: $B = \frac{\mu_0 Q f}{2R}$, $H = \frac{Q f}{2R}$.

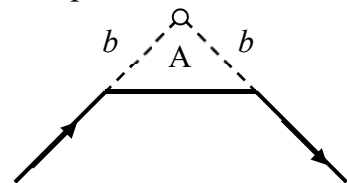
9. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým prechádza prúd I_1 , má na jednom mieste kruhovú slučku s polomerom R . Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie uprostred slučky.

Výsledok: $B = \frac{\mu_0 I_1}{2R} (1 + 1/\pi)$.



10. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým prechádza prúd I_1 je dvakrát zalomený po 45° . Určte veľkosť a smer vektora magnetickej indukcie v bode A podľa obrázku. Bod A je od obidvoch zalomení vzdialený o b .

Výsledok: $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi b}$.



11. K začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy pozdĺž osi x priteká elektrický prúd veľkosti I (vektor prúdovej hustoty má opačný smer ako jednotkový vektor $\hat{i}$). Tam sa rozvetvuje, polovica smeruje pozdĺž osi y , polovica pozdĺž osi z . Vypočítajte veľkosť a súradnice B_x, B_y, B_z , vektora magnetickej indukcie v bode $A(0, a, a)$.

Výsledok: $B = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi a}$, $B_x = 0$, $B_y = B \frac{\sqrt{2}}{2}$, $B_z = -B \frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Kruhový závit s polomerom R a veľmi dlhý priamy vodič ležia v jednej rovine. Dlhý vodič prechádza bodom, ktorý leží vo vzdialenosti $a = 3R$ od stredu závitov. Akým smerom musia prechádzať prúdy závitom resp. vodičom, a aký musí byť pomer ich veľkostí, aby v strede závitov bola magnetická indukcia nulová?

Výsledok: $\frac{I_{kr}}{I_v} = \frac{1}{3\pi}$.

13. Kruhový závit s polomerom R leží v rovine (y, z) a závit s polomerom $2R$ v rovine (x, z) . Obidva závity majú stredu v začiatku karteziánskej súradnicovej sústavy a každým z nich prechádza prúd veľkosti I . Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie a jeho súradnicu B_z v začiatku súradnicovej sústavy.

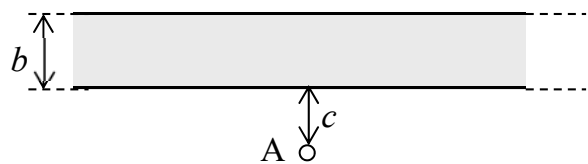
Výsledok: $B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sqrt{1 + 1/4}$, $B_z = 0$.

14. Dlhým priamym vodičom uloženým v osi x karteziánskej súradnicovej sústavy prechádza prúd I_1 (v kladnom smere osi x) a vodičom uloženým v osi y prúd I_2 (v zápornom smere osi y). Vypočítajte, aká je veľkosť vektora magnetickej indukcie v bode $A(a, b, 0)$ a jeho súradnice B_x, B_y, B_z .

Výsledok: $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\frac{I_2}{a} - \frac{I_1}{b} \right)$, $B = |B|$.

15. Cez veľmi dlhý priamy vodič s tvarom pásu šírky b prechádza prúd I , ktorý je rovnomerne rozložený po celej šírke vodiča. Aká veľká je magnetická indukcia B vo vzdialenosti c od okraja vodiča?

Výsledok: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln \frac{c+b}{c}$.



16. Vypočítajte veľkosť vektora magnetickej indukcie uprostred závitov, ktorý má tvar rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky $a = 10$ cm, keď ním prechádza elektrický prúd $I = 2$ A.

Výsledok: $B = \frac{9\mu_0 I}{2\pi a}$.

17. Vypočítajte magnetickú indukciu v strede plochej cievky s tvarom štvorca (strana má dĺžku $a = 10$ cm), ktorá má $N = 30$ závitov a prechádza ňou prúd $I = 3$ A.

Výsledok: $B = N \frac{\mu_o I}{\pi a} \sqrt{2}.$

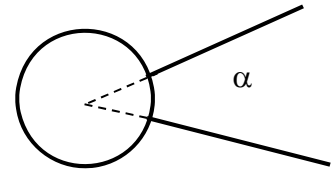
18. Tenký drôt je sformovaný do tvaru štvorca so stranou $a = 10 \text{ cm}$. Závít leží vo vertikálnej rovine, zhodnej s rovinou magnetického poludníka a v jeho strede je uložená magnetka ukazujúca na sever. Potom cez štvorcový závit necháme prechádzať prúd I . Aký veľký musí byť tento prúd, aby sa magnetka od pôvodného smeru vychýlila o uhol $\alpha = 45^\circ$? Horizontálna zložka zemského magnetického poľa má veľkosť $B_z = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$.

Výsledok: $I = B_z \frac{\pi a}{\mu_o \sqrt{2}}.$

19. Kruhový závit má polomer R a prechádza ním elektrický prúd. Intenzita magnetického poľa v strede závitú má veľkosť H_s . Akú intenzitu H_A má pole na osi závitú vo vzdialenosti a od stredu závitú?

Výsledok: $H_A = H_s \frac{R^3}{(a^2 + R^2)^{3/2}}.$

20. K tenkému kruhovému prstencu s elektrickým odporom R a polomerom r sú radiálne pripojené dva veľmi dlhé priame vodiče tak, že ležia v rovine prstenca a navzájom zvierajú uhol α . Jedným vodičom prúd prichádza, v mieste styku s prstencom sa rozdeľuje a druhým vodičom odchádza. Aká veľká je magnetická indukcia v strede prstenca?



Výsledok: $B = 0.$

21. Veľmi dlhým priamym dutým vodičom, ktorého prierez má tvar medzikružia s vnútorným polomerom r_1 a vonkajším polomerom r_2 prechádza prúd I , pričom hustota prúdu je v celom priereze vodiča rovnaká. Vypočítajte veľkosť intenzity magnetického poľa v dutine H_d , vo vodiči H_v a mimo vodiča H_m .

Výsledok: $H_d = 0, \quad H_v = \frac{I}{2\pi x} \frac{x^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad H_m = \frac{I}{2\pi x}.$

22. Veľmi dlhý priamy vodič, ktorým prechádza prúd I , je zahnutý do pravého uhla. Aká je veľkosť a smer vektorov $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ v bode P , ktorý je od miesta zohnutia – v predĺžení jednej časti vodiča – vzdialený o a ? Aká je veľkosť týchto vektorov vo vákuu a v prostredí s relatívnou permeabilitou μ_r ?

Výsledok: $B_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_o I}{2\pi a}, \quad B_1 = \frac{1}{2} \frac{\mu_o \mu_r I}{2\pi a}, \quad H_1 = H_2 = \frac{1}{2} \frac{I}{2\pi a}.$

Magnetický tok

23. Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú obdĺžnikovým závitom so stranami a, b , ak sa tento nachádza v homogénnom magnetickom poli. Strana b je na vektor magnetickej indukcie $\mathbf{B}$ kolmá, strana a s ním zvierá uhol $\beta = 60^\circ$.

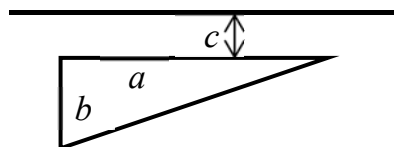
Výsledok: $\Phi = Bab \sin \beta$.

24. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým prechádza prúd I , sa nachádza obdĺžnikový závit so stranami a, b . Strana a je rovnobežná s vodičom, pričom vzdialenosť medzi závitom (jeho bližšou stranou) a vodičom je c . Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom.

Výsledok: $\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c}$.

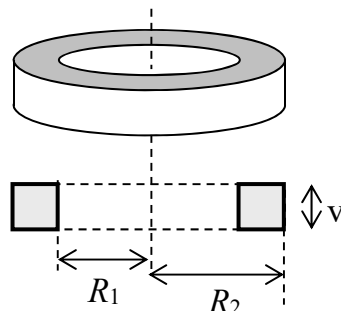
25. V jednej rovine s veľmi dlhým priamym vodičom, ktorým prechádza prúd I , je umiestnený závit v tvare pravouhlého trojuholníka (odvesny s dĺžkami a, b), pričom odvesna a je rovnobežná s vodičom a vzdialená od neho o c . Vypočítajte magnetický tok Φ cez plochu ohraničenú závitom.

Výsledok: $\Phi = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \left[\left(1 + \frac{c}{b}\right) \ln \frac{c+b}{c} - 1 \right]$.



26. Cievka je navinutá na prstencovom jadre z materiálu, ktorého relatívna permeabilita $\mu_r = 5$. Jadro má pravouhlý prierez (obrázok). Cievka má $N = 150$ rovnomerne navinutých závitov. Vypočítajte intenzitu magnetického poľa $H(x)$ v jadre, ako funkciu vzdialenosti od stredu jadra a magnetický tok Φ jadrom. Cievkou prechádza prúd I_1 .

Výsledok: $H = \frac{NI_1}{2\pi x}$, $\Phi = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 I_1 v}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$.



Magnetický moment

27. Na obvodu tenkého nemagnetického kotúča s polomerom R je rovnomerne rozložený elektrický náboj Q . Kotúč sa spolu s nábojom otáča uhlovou rýchlosťou ω okolo osi kolmej na rovinu kotúča a prechádzajúcej jeho stredom. Aký veľký prúd I_1 predstavuje rotujúci náboj? Aký je magnetický moment m_m rotujúceho kotúča?

Výsledok: $I_1 = \frac{Q\omega}{2\pi}$, $m_m = \frac{Q\omega R^2}{2}$

28. Plochá cievka s $N = 20$ závitmi, priemerom kruhových závitov $d = 4$ cm, je zavesená na vlákne a prechádza ňou prúd $I = 4$ A. Os cievky je vodorovná a s rovinou magnetického poludníka zvierá uhol $\alpha = 30^\circ$. Akým momentom síl M_F pôsobí

zemské magnetické pole na cievku, keď horizontálna zložka magnetickej indukcie zemského poľa má veľkosť $B_Z = 2 \times 10^{-5} \text{ T}$?

Výsledok: $M_F = \frac{\pi}{4} N I d^2 B \sin \alpha$.

29. Magnetka kompasu kmitá v zemskom magnetickom poli s periódou $T_1 = 0,7 \text{ s}$. Aká veľká je magnetická indukcia B_2 poľa, v ktorom magnetka kmitá s periódou $T_2 = 0,1 \text{ s}$? Magnetická indukcia zemského poľa $B_Z = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$.

Výsledok: $B_2 = B_Z \frac{T_1^2}{T_2^2}$.

30. Plochá cievka má $N = 50$ kruhových závitov s priemerom $d = 4 \text{ cm}$, a prechádza ňou prúd $I_1 = 2 \text{ A}$. Vypočítajte veľkosť magnetickej indukcie vo vzdialenosti $l = 100 \text{ cm}$ od stredu cievky v prvej a v druhej Gaussovej polohe.

Výsledok: $B_{G2} = \frac{\mu_0 I d^2}{16 l^3}$, $B_{G1} = 2 B_{G2}$.

31. V homogénnom magnetickom poli s indukciou $\mathbf{B}$ sa nachádza závit s tvarom rovnostranného trojuholníka (strana má dĺžku a), pričom normála na rovinu závitu zvierá s vektorom $\mathbf{B}$ uhol $\alpha = 45^\circ$. Aký moment síl M_F pôsobí na závit, a akú má potenciálnu energiu W_p v tomto poli, ak ním prechádza prúd I ?

Výsledok: $M_F = \frac{\sqrt{6}}{8} I a^2 B$, $W_p = -\frac{\sqrt{6}}{8} I a^2 B$.

32. Plochá rovinná cievka má $N = 1000$ závitov, pričom každý z nich ohraničuje plochu s efektívnym obsahom $S_1 = 500 \text{ cm}^2$. Cievka sa nachádza v magnetickom poli s indukciou $B_1 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ T}$. Aký veľký prúd I_1 musí prechádzať cievkou, aby na ňu pôsobil krútiaci moment $M_k = 50 \text{ N}\cdot\text{m}$?

Výsledok: $I_1 = \frac{M_k}{N S_1 B}$.

Zoznam použitej literatúry

Učebnice

- Ilkovič D.: Vektorový počet, JČMF + Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1950
Garaj J.: Základy vektorového počtu, SVTL, 1957
Ilkovič D.: Fyzika I, II, 4. vydanie, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1968
Horák Z, Krupka F.: Fyzika, SNTL Praha, ALFA Bratislava, 1976
Veis Š., Martišovits V., Maďar J.: Mechanika a molekulová fyzika,
ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1978
Štrba A.: Optika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1979
Čičmanec P.: Elektrina a magnetizmus, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1980
Hajko V., Daniel-Szabó J.: Základy fyziky, VEDA, Bratislava 1980
Krempaský J.: Fyzika, ALFA Bratislava, SNTL Praha, 1982
Čulík F., Noga M.: Úvod do statist. fyziky a termodynamiky, ALFA, Bratislava 1982
Kvasnica J.: Teorie elektromagnetického pole, Academia, Praha 1985

Friš S. E., Timoreva A. V.: Kurs obščej fiziki I, II, III, GITTL, Moskva 1951
The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley Publ. Comp. London 1964
Javorskij B. M., Detlaf A. A.: Příručka fyziky, SVTL, Bratislava 1965
Beiser A.: Úvod do moderní fyziky, Academia, Praha 1975
Saveljev I. V.: Kurs obščej fiziki I, II, Nauka, Moskva 1977, 1988
Dobrinski-Krakau-Vogel: Physik fuer Ingenieure, Teubner Verl., Stuttgart 1993
Halliday D., Resnick R.: Fundamentals of Physics, John Wiley, New York 1986

Zbierky príkladov

- Sacharov D. I., Kosminkov I. S.: Sbornik zadač po fizike, Učpedgiz, Moskva 1952
Hajko V. a kol.: Fyzika v príkladoch, 4. vydanie, ALFA, Bratislava 1971
Lindner H.: Riešené úlohy z fyziky, ALFA, Bratislava 1973
Saveljev I. V.: Sbornik voprosov i zadač po obščej fizike, Nauka, Moskva 1982
Krempaský a kol.: Fyzika - Príklady a úlohy, STU, Bratislava 1989, 2000

Iné zdroje

- Garaj a kol.: Fyzikálna terminológia, SPN Bratislava, 1987
Tilich J. a kol.: Slovník školské fyziky, SPN Praha, 1988
Mechlová E., Košťál K.: Výkladový slovník fyziky, Prometheus Praha 1999
Norma STN ISO 31 – Veličiny a jednotky, SÚTN Bratislava, 1997

Ivan Červeň, Peter Bokes

Fyzika po kapitolách, časť 10.
Magnetické pole

Vydala Slovenská technická univerzita v Bratislave
vo vydavateľstve STU SPEKTRUM v roku 2023

Rozsah 64 strán, 30 obrázkov, 3,995 AH, 4,125 VH

85 – 226 – 23

ISBN 978-80-227-5353-1