

# Intenzita a potenciál sústavy bodových nábojov

Peter Bokes

September 2022

## 1 Zadanie

Zobrazte vektory intenzity elektrického poľa a ekvipotenciály elektrického potenciálu sústavy dvoch bodových nábojov  $Q$  a  $-Q$ , vzdialených od seba o vzdialenosť  $d$ . Veličiny zobrazte v rovine, v ktorej ležia oba náboje.

## 2 Pomocný materiál k riešeniu

Zvolíme si súradnicovú sústavu tak, aby kladný náboj mal polohový vektor  $\vec{r}_1 = (d/2)\vec{j}$  a záporný náboj  $\vec{r}_2 = -(d/2)\vec{j}$ . Polia budeme zobrazovať len v rovine  $z = 0$ .

Intenzita elektrického poľa sústavy  $N$  nábojov je daná vzťahom

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N k_e \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1)$$

Vzťah predstavuje súčet (superpozíciu) príspevkov od jednotlivých nábojov v tvare

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = k_e \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (2)$$

V programe pracujeme so zložkami intenzity  $\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j}$  a polohového vektora  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ . Pomocou nich je napríklad  $x$ -ová zložka intenzity poľa náboja na pozícii  $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$  daná predpisom

$$E_x(x,y) = \frac{k_e Q}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \quad (3)$$

Vzťah implementujeme ako funkciu, ktorú môžeme využiť pre výpočet príspevkov k poľu od viacerých bodových nábojov

```

function [Ex,Ey] = EIntenzita(X,Y,q,x0,y0,eps=1.e-3)
    % funkcia spočíta zložky intenzity poľa bodového náboja
    % q      -- veľkosť náboja
    % x0, y0 -- súradnice polohy náboja
    r = sqrt( (X .- x0).^2 + (Y .- y0).^2 + eps^2);
    Ex = q.*(X .- x0)./r.^3;
    Ey = q.*(Y .- y0)./r.^3;
end

```

Premenná `eps` slúži na odstránenie singularity intenzity v mieste náboja. Konštantu  $k_e$  v programe nepoužívame; namiesto toho budeme zadávať do premennej predstavujúcej náboj  $q$  hodnotu náboja prenášobeneho s touto konštantou. Napríklad, ak  $Q = 2 \times 10^{-10} \text{ C}$ , potom  $q = k_e Q \approx 10^{10} \cdot 2 \times 10^{-10} = 2$ .

V jazyku GNU octave možno funkcie efektívne využívať tak, že namiesto jej volania so skalárnou premennou v jej argumente možno použiť vektor alebo maticu hodnôt, pre ktoré potrebujeme funkciu vyčísliť. Funkcia potom vráti vektor alebo maticu funkčných hodnôt. Aby sme získali graf intenzity a potenciálu potrebujeme ich vyhodnocovať na sieti bodov roviny  $x - y$ .  $x$ -ové súradnice týchto bodov sú v programe reprezentované maticou  $X$  a im zodpovedajúce  $y$ -ové súradnice maticou  $Y$ . Tieto matice sú vytvorené funkciou `meshgrid()` s argumentami určujúcimi minimálnu (`xmin`, `ymin`) a maximálnu hodnotu (`xmax`, `ymax`) súradníc bodov siete a veľkosť kroku medzi súradnicami dvoch nasledujúcich bodov (`dx`, `dy`). Intenzitu zobrazujeme na pomerne riedkej sieti (`dx = dy = 0.5`), aby sme na výslednom obrázku dokázali odlíšiť jednotlivé vektory intenzity z rôznych bodoch. Samotné zobrazenie vektorového poľa prevedie funkcia `quiver()`.

```

function JedenBodovyNabojE(q1 = 1.0, x0 = 0.0, y0 = 2.0)
%
% q1 .... e. náboj
% x1 .... vysunutie náboja v smere osi x
% y1 .... vysunutie náboja v smere osi y
%
% hranice a krok siete pozícií pre zobrazenie intenzity
xmin = -3; xmax = 3; dx = 0.5;
ymin = -4; ymax = 4; dy = 0.5;

% siet bodov v rovine pre výpočet intenzity (coarse grid)
[X,Y] = meshgrid(xmin:dx:xmax,ymin:dy:ymax);

% intenzita bodového náboja 1
[Ex1,Ey1] = EIntenzita(X,Y,q1,x0,y0);

% graf 1. náboja

```

```

quiver(X,Y,Ex1,Ey1,'b') % vytvorí samotný graf
hold on;
axis equal; grid on;    % nastavenia grafu
hold off;

####
function [Ex,Ey] = EIntenzita(X,Y,q,x0,y0,eps=1.e-6)
    % funkcia spočíta zložky intenzity poľa bodového náboja
    % q      -- veľkosť náboja
    % x0, y0 -- súradnice polohy náboja
    r = sqrt( (X .- x0).^2 + (Y .- y0).^2 );
    Ex = q.*(X .- x0)./r.^3;
    Ey = q.*(Y .- y0)./r.^3;
end

end

```

Elektrický potenciál poľa od náboja, ktorý je na pozícii  $\vec{r}_0$ , zapíšeme pomocou zložiek polohových vektorov nasledovne:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{k_e Q}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \quad (4)$$

V programe je potenciál implementovaný vo funkcii `EPotencial(X,Y,q,x0,y0)`. Na rozdiel od intenzity, ekvipotenciály budeme vyčísľovať na hustej sieti ( $X_f$  a  $Y_f$ ) s veľkosťou kroku 0,01. Výpočet ekvipotenciál s hodnotami zadanými v poli `Vn[]` prevedie funkcia `contour()`.

```

function JedenBodovyNabojV(q1 = 1.0, x0 = 0.0, y0 = 2.0)
%
% q1 .... e. náboj
% x1 .... vysunutie náboja v smere osi x
% y1 .... vysunutie náboja v smere osi y
%
% hranice a krok siete pozícií pre zobrazenie potenciálu
xmin = -3; xmax = 3; dx = 0.01;
ymin = -4; ymax = 4; dy = 0.01;

% siet bodov v rovine pre výpočet
[Xf,Yf] = meshgrid(xmin:dx:xmax,ymin:dy:ymax);

% úrovně napätia pre vykreslenie ekvipotenciál
Vn = [-2,-1,-0.5,-0.25,0,0.25,0.5,1,2];

```

```

% výpočet ekvipotenciál
V1 = EPotencial(Xf,Yf,q1,x0,y0);

% graf ekvipotenciál náboja
[c,h] = contour(Xf,Yf,V1,Vn);           % vytvorí graf ekvipotenciál
hold on;                                % nastavenia grafu
axis equal; grid on; colormap('copper'); % zobrazí hodnotu potenciálu
clabel(c,h);                             na ekvipotenciále
hold off;

###
function V = EPotencial(X,Y,q,x0,y0,eps=1.e-6)
    r = sqrt( (X.-x0).^2 + (Y.-y0).^2 + eps^2);
    V = (1-singular).*q./r;
end
end

```

Uvedené dva programy možno skombinovať do jedného, ktorý naraz zobrazí intenzitu aj potenciál. Opakovaným volaním funkcií pre intenzitu a potenciál možno pridať do priestoru ďalšie náboje. Superpozíciou získame výsledné pole, napr. pre intenzitu dvoch nábojov:

```

Ex = Ex1 + Ex2;
Ey = Ey1 + Ey2;

```

Výsledné pole zobrazujeme pomocou funkcie `quiver()`.

Na obrázku 1 sú zobrazené vektory intenzity spolu s ekvipotenciálami. Vektory intenzity nie je dobre vidieť, lebo ich veľkosť prudko klesá so vzdialenosťou od ich zdrojových bodových nábojov. Preto v poslednej časti programu zobrazíme len smerové vektory intenzity na bodoch riedkej siete. Tieto získame predelením vektora intenzity jeho veľkosťou,

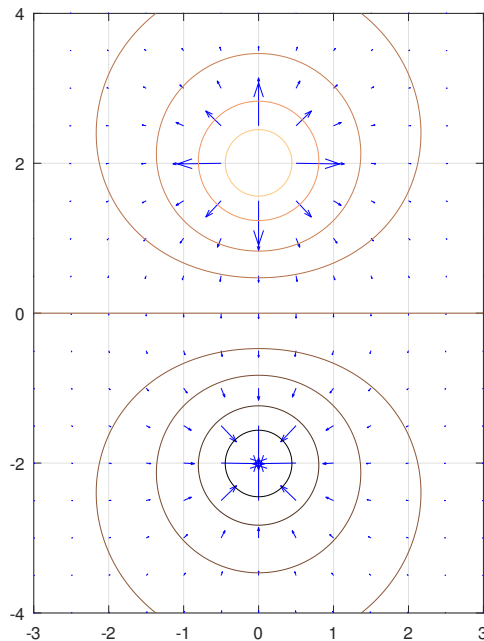
$$\vec{t}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}(\vec{r})}{|\vec{E}(\vec{r})|}. \quad (5)$$

V programe je táto rovnica implementovaná po zložkách v tvare

```

tx = Ex./sqrt(Ex.^2 + Ey.^2);
ty = Ey./sqrt(Ex.^2 + Ey.^2);

```



Obr. 1: Zobrazenie intenzity a potenciálu elektrického poľa dvoch bodových nábojov – elektrického dipólu.

### 3 Úlohy

1. Vytvorte jeden program, ktorý zobrazí intenzitu aj potenciál do spoločného grafu. Pre výpočet intenzity použite výrazne väčší krok siete ako pre potenciál.
2. Rozšírte program tak, aby zobrazoval pole dvoch opačných nábojov na dvoch odlišných pozíciách. Identifikujte ekvipotenciálu s nulovou hodnotou.
3. Upravte program tak, aby zobrazoval pole štyroch bodových nábojov: troch nachádzajúcich sa vo vrcholoch rovnoramenného trojuholníka s kladným nábojom  $q = 1.0$  a jeden náboj v ťažisku s hodnotou  $q' = -\sqrt{3}/3$ . Aká sila pôsobí na každý z nábojov? Obrázok porovnajte s výsledkom príkladu, ktorý sme riešili na prvej prednáške/prvom seminári.
4. Doskový kondenzátor má približne rovnomerne rozložený náboj na svojich doskách. Vzdialenosť medzi doskami je  $d$ . Upravte program tak, aby ste každú z dosiek modelovali ako štvorcovú sieť  $N \times N$  nábojov, vzdialených od seba o vami zvolenú vzdialenosť  $h \ll d$ . Celkový náboj na kladne nabitej doske bude v takomto modeli  $QN^2$ . Skúste z výsledkov určiť kapacitu kondenzátora a porovnajte ju so vzťahom pre kapacitu doskového kondenzátora pre rôzne hodnoty  $h, d$  a  $N = 2, 4, 8$ .