3. Vo valcovitej nádobe je voda s hladinou vo výške h nad dnom. Ako vysoko má byť otvor v stene, keď voda má ním striekať čo najďalej na vodorovnú podložku? ($h' = h/2$).

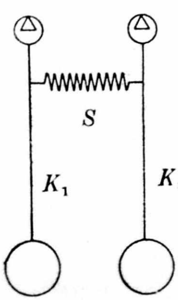
4. Nádoba tvaru valca má v bočnej stene dva otvory nad sebou, a to vo výškach h_1 a h_2 nad dnom. V akej výške má byť hladina vody nad dnom, aby voda striekala z obidvoch otvorov do rovnakej vzdialenosti na vodorovnú podložku? ($h = h_1 + h_2$).

5. Za aký čas vytečie polovica kvapaliny z valcovitej nádoby s prierezom S, ktorá má v dne otvor s účinným prierezom s, keď začiatočná výška hladiny nad dnom je h_0?

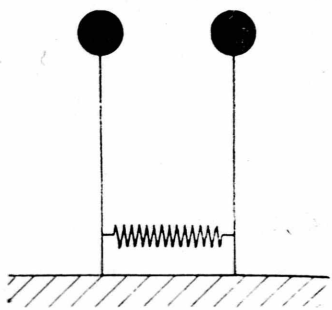
$$t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{h_0}{g}}\,(\sqrt{2} - 1)$$

8. VLNIVÝ POHYB HMOTNÉHO PROSTREDIA

8.1. Spriahnuté kyvadlá. Majme na mysli dve rovnaké kyvadlá K_1 a K_2, zavesené tak, že môžu kývať len v spoločnej rovine *(obr. 8.1)*. Kyvadlá nech sú spojené blízko pri závesoch pomocou slabej špirály S, ktorá predstavuje ich vzájomné spriahnutie (väzbu). Prostredníctvom tejto väzby každé z obi-



Obr. 8.1



Obr. 8.2

dvoch kyvadiel účinkuje na druhé silou závislou od okamžitej výchylky obidvoch kyvadiel, takže pohyby kyvadiel nie sú od seba nezávislé; hovoríme, že kyvadlá sú spriahnuté. Keď udelením vhodnej začiatočnej rýchlosti rozkývame len jedno kyvadlo, napríklad K_1, nastane zaujímavý úkaz. Periodicky sa meniacimi silami vzájomnej väzby rozkýva sa pomaly aj druhé kyvadlo, ktoré postupne preberá energiu kyvadla prvého. Pritom amplitúda kývania prvého kyvadla sa zmenšuje, až napokon sa toto po určitom čase v blízkosti svojej rovnovážnej polohy na okamžik celkom zastaví. V tom okamihu, ak kyvadlá nie sú tlmené, prakticky celá začiatočná energia prvého kyvadla prešla už na kyvadlo druhé a opísaný dej začne prebiehať rovnakým spôsobom v opačnom zmysle. Pri voľnej väzbe (slabá špirála blízko pri závesoch kyvadiel) prechádza energia z jedného kyvadla na druhé pomaly, pri tesnej väzbe (špirála je silnejšia, alebo je ďalej od závesov kyvadiel) prechod energie je rýchlejší.

Namiesto dvoch kyvadiel môžeme mať na mysli aj dve rovnaké, na svoje rovnovážne polohy pružne viazané hmotné guľôčky, predstavujúce dva *spriahnuté lineárne bodové oscilátory (obr. 8.2)*. Vyšetríme počtene priebeh ich pohybu v najjednoduchšom prípade, t. j. za predpokladu, že pohyb je netlmený a guľôčky sa môžu pohybovať len vo svojej spoločnej priamke.

Rovnako veľké hmotnosti obidvoch oscilátorov nech sú m a ich okamžité výchylky z rovnovážnych polôh u_1 a u_2. Výchylky u_1 a u_2 splňujú diferenciálne rovnice:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} = -K u_1 - c(u_1 - u_2)$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} = -K u_2 - c(u_2 - u_1)$$

alebo, ak zavedieme označenie $K + c = C$, rovnice:

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u_1}{\mathrm{d}t^2} + C u_1 = c u_2$$

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u_2}{\mathrm{d}t^2} + C u_2 = c u_1 \qquad (1)$$

pričom podiel

$$k = \frac{c}{C} = \frac{c}{c + K} < 1 \qquad (2)$$

sa nazýva *koeficient spriahnutia.*

Ak jeden z obidvoch oscilátorov držíme pevne v jeho rovnovážnej polohe, pohyb druhého splňuje diferenciálnu rovnicu

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -Cu$$

Voľný oscilátor môže teda v tom prípade konať harmonický pohyb s kruhovou frekvenciou $\omega = \sqrt{C/m}$, ktorú budeme nazývať vlastnou kruhovou frekvenciou totožných spriahnutých oscilátorov. S jej použitím rovnice (1) môžeme písať takto:

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2u_1}{dt^2} + u_1 = ku_2 \tag{3}$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{d^2u_2}{dt^2} + u_2 = ku_1$$

Dosadením vyjadrenia u_2 z rovnice prvej do rovnice druhej dostávame diferenciálnu rovnicu pre výchylku u_1:

$$\frac{d^4u_1^2}{dt^4} + 2\omega^2\frac{d^2u_1}{dt^2} + \omega^4(1 - k^2)\,u_1 = 0 \tag{4}$$

Vyhovuje jej integrál $u_1 = C\,e^{at}$, ak koeficient α je koreňom charakteristickej rovnice

$$\alpha^4 + 2\omega^2\alpha^2 + \omega^4(1 - k^2) = 0$$

Korene tejto rovnice sú všetky štyri imaginárne:

$$\alpha_{1,\,2,\,3,\,4} = \pm\, i\omega\sqrt{1 \pm k}$$

alebo, ak položíme $\omega\sqrt{1 + k} = \omega_1$, $\quad \omega\sqrt{1 - k} = \omega_2$,

$$\alpha_{1,2} = \pm\, i\omega_1, \qquad \alpha_{3,4} = \pm\, i\omega_2$$

Všeobecný integrál rovnice (4) je preto

$$u_1 = C_1\,e^{i\omega_1 t} + C_2\,e^{-i\omega_1 t} + C_3\,e^{i\omega_2 t} + C_4\,e^{-i\omega_2 t} \tag{5}$$

pričom integračné konštanty C_i sú určené začiatočnými podmienkami. Dosadením výsledku (5) do prvej z rovníc (3) pre výchylku u_2 vychádza:

$$u_2 = -C_1\,e^{i\omega_1 t} - C_2\,e^{-i\omega_1 t} + C_3\,e^{i\omega_2 t} + C_4\,e^{-i\omega_2 t} \tag{6}$$

Ak v čase $t = 0$ bolo $u_1 = u_2 = 0$, $\dfrac{du_1}{dt} = v$ a $\dfrac{du_2}{dt} = 0$, konštanty C_i sú:

$$C_1 = -\frac{iv}{4\,\omega_1}, \; C_2 = \frac{iv}{4\,\omega_1}, \; C_3 = -\frac{iv}{4\,\omega_2}, \; C_4 = \frac{iv}{4\,\omega_2}$$

takže

$$u_1 = -\frac{iv}{4\,\omega_1}\,(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) - \frac{iv}{4\,\omega_2}\,(e^{i\omega_2 t} - e^{-i\omega_2 t}) =$$

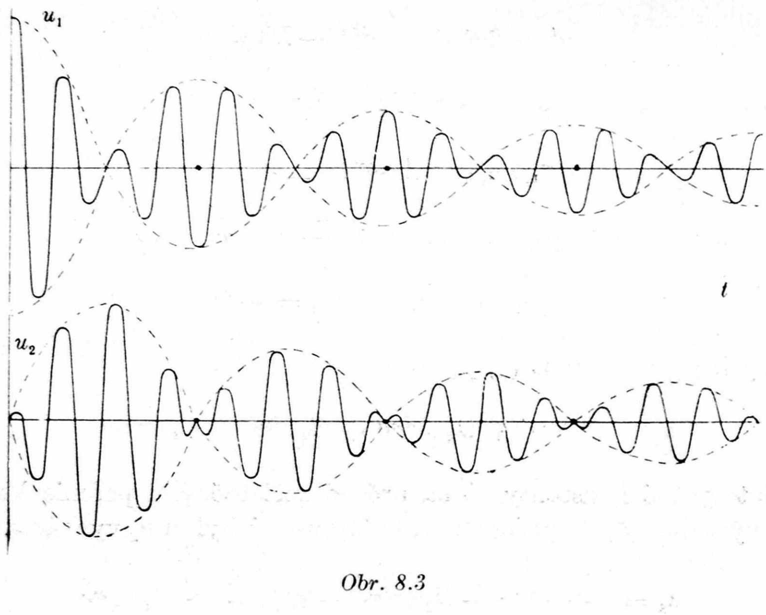
$$= \frac{v}{2\,\omega_1}\sin\omega_1 t + \frac{v}{2\,\omega_2}\sin\omega_2 t \tag{7}$$

$$u_2 = \frac{iv}{4\omega_1}(e^{i\omega_1 t} - e^{-i\omega_1 t}) - \frac{iv}{4\omega_2}(e^{i\omega_2 t} - e^{-i\omega_2 t}) =$$

$$= -\frac{v}{2\omega_1}\sin\omega_1 t + \frac{v}{2\omega_2}\sin\omega_2 t =$$

$$= \frac{v}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t + \pi) + \frac{v}{2\omega_2}\sin\omega_2 t \tag{8}$$

Získané výsledky sa zhodujú s pohybom spriahnutých kyvadiel, opísaných na začiatku tohto článku. Podľa vzorcov (7) a (8) pri začiatočných podmienkach, ako boli uvedené, pohyb obidvoch lineárnych oscilátorov je súčet dvoch harmo-



Obr. 8.3

nických kmitov s nerovnakými, ale — ak vzájomná väzba oscilátorov je slabá — málo odlišnými frekvenciami $\omega_2 = \omega\sqrt{1-k}$ a $\omega_1 = \omega\sqrt{1+k} > \omega_2$ a málo odlišnými amplitúdami. V čl. 2.21 sme sa presvedčili, že súčet takýchto dvoch kmitaní je harmonický pohyb s periodicky sa meniacou amplitúdou. V našom prípade na začiatku počítania času — keďže v tomto okamžiku obidve harmonické zložky pohybu prvého oscilátora sa zhodujú vo fáze, zatiaľ čo tie isté zložky druhého oscilátora sú v opačnej fáze — amplitúda pohybu prvého oscilátora je práve najväčšia a začína sa zmenšovať, avšak amplitúda pohybu druhého oscilátora je najmenšia a začína sa zväčšovať. Pretože ω_1 je väčšie ako ω_2, oscilátory si vymenia úlohy po uplynutí času $T'/2$, určeného rovnicou

$(\omega_1 - \omega_2)\dfrac{T'}{2} = \pi$, takže frekvencia striedania maximálnych a minimálnych hodnôt amplitúd obidvoch oscilátorov, ktorá sa rovná frekvencii výmeny energie medzi nimi, je

$$\nu' = \frac{1}{T'} = \nu_1 - \nu_2 = \frac{1}{2\pi}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{\omega}{2\pi}(\sqrt{1+k} - \sqrt{1-k}) \doteq \nu k$$

Toto striedanie je teda tým rýchlejšie, čím je vzájomná väzba obidvoch oscilátorov tesnejšia. Časové rozvinutie takéhoto pohybu obidvoch oscilátorov pre prípad, že sa uplatňuje aj tlmenie, predstavuje *obr. 8.3.*

Práve podrobne opísaný priebeh pohybu dvoch spriahnutých oscilátorov sme dostali pri začiatočných podmienkach, ktoré značili, že z obidvoch oscilátorov nachádzajúcich sa v rovnovážnych polohách len jednému bola udelená začiatočná rýchlosť v. Keby sme však boli aj druhému oscilátoru udelili rovnakú začiatočnú rýchlosť, ale v opačnom smere, teda rýchlosť $-v$, integračné konštanty vo vzorcoch (5) a (6) by boli

$$C_1 = -\frac{iv}{2\omega_1}, \qquad C_2 = \frac{iv}{2\omega_1}, \qquad C_3 = C_4 = 0$$

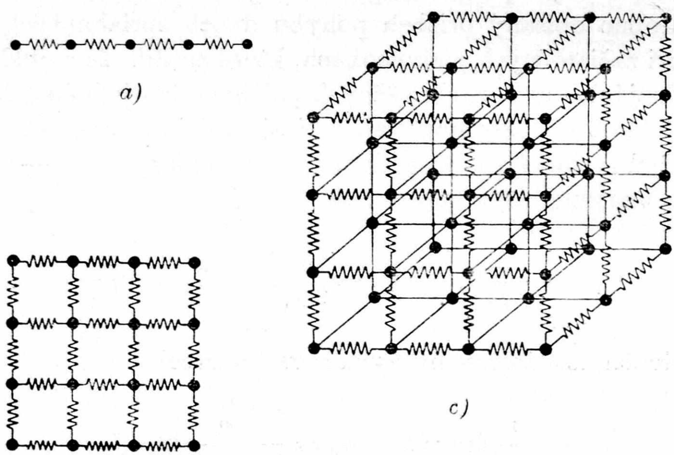
a pohyb obidvoch oscilátorov by vyjadrovali vzorce:

$$u_1 = \frac{v}{\omega_1}\sin\omega_1 t, \qquad u_2 = -\frac{v}{\omega_1}\sin\omega_1 t$$

Podľa týchto výsledkov pohyb dvoch spriahnutých oscilátorov pri vhodných začiatočných podmienkach prebieha tak, že si oscilátory nevymieňajú energiu; pohyb každého z nich je ustálený.

Z väčšieho počtu oscilátorov možno vytvoriť jednorozmerné *(obr. 8.4a)*, dvojrozmerné *(obr. 8.4b)* alebo aj trojrozmerné sústavy *(obr. 8.4c)* spriahnutých oscilátorov, upravené tak, že jednotlivé oscilátory môžu sa v nich vzdialiť zo svojich rovnovážnych polôh buď vo všetkých, buď len v niektorých význačných smeroch. Vlastnosti týchto zložitejších sústav oscilátorov sa podobajú vlastnostiam najjednoduchšej takejto sústavy, vlastnostiam dvoch spriahnutých oscilátorov, pričom — najmä pri trojrozmerných sústavách — bezprostredná pružná, od ostatných oscilátorov sústavy nezávislá väzba jednotlivých oscilátorov na ich rovnovážne polohy nie je ani potrebná. Práve tak ako pohyb dvoch spriahnutých oscilátorov aj pohyb týchto zložitejších sústav oscilátorov podľa začiatočných podmienok môže byť v podstate dvojaký: ak uvedieme do pohybu len jeden oscilátor sústavy, jeho energia pôsobením väzieb medzi susednými oscilátormi sa postupne prenesie na všetky oscilátory; keď však do vhodného pohybu uvedieme súčasne niekoľko oscilátorov sústavy, môže sa stať, že niektoré oscilátory sústavy sa nezačnú pohybovať a energia ostatných sa nebude meniť.

8.2. Základné vlastnosti vlnivého pohybu. Mechanické vlastnosti pružného hmotného prostredia sa veľmi podobajú vlastnostiam trojrozmernej sústavy spriahnutých oscilátorov. Za stavu pokoja sa súčet síl, objemových a plošných, pôsobiacich na nepríliš malý objemový element hmotného prostredia rovná nule.



a) b) c)

Obr. 8.4

Keď však niektorý objemový element neohraničeného pružného hmotného prostredia alebo pružného telesa z jeho rovnovážnej polohy prudko a do malej vzdialenosti vychýlime, pôvodnú rovnováhu v pružnom prostredí na jednom mieste porušíme. Za tohto stavu nielen sily účinkujúce na vychýlený objemový element, ale ani sily pôsobiace na susedné objemové elementy nie sú už v rovnováhe. Začnú sa preto pohybovať aj susedné objemové elementy a *rozruch* sa šíri určitou, vždy konečnou rýchlosťou na všetky strany.

Takéto šírenie sa rozruchu najlepšie môžeme pozorovať na pôvodne pokojnej vodnej hladine, keď sa jej na jednom mieste dotkneme, alebo hodíme na ňu malý kameň. Okolo miesta rozruchu vznikne niekoľko sústredných kruhových vĺn, ktorých polomer sa na rozsiahlej vodnej hladine s časom rovnomerne zväčšuje. Podľa tohto veľmi známeho javu šírenie sa krátkodobého alebo trvale udržiavaného rozruchu v pružnom hmotnom prostredí nazýva sa