$T_1 : T_2 = m : n$ vyplýva, že $T_1 n = T_2 m$. Ak m a n sú najmenšie celé čísla, ktoré túto úmeru spĺňajú, perióda pohybu je $T = nT_1 = mT_2$, teda výsledná frekvencia je $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{nT_1} = \dfrac{1}{mT_2} = \dfrac{\nu_1}{n} = \dfrac{\nu_2}{m}$.

Na *obr. 2.32* sú zostrojené pohybové krivky (Lissajousove) pre rôzne fázové rozdiely, v prvom riadku pre pomer $\nu_1 : \nu_2 = 1 : 2$ (v hudobnej terminológii príma s oktávou), v druhom riadku pre pomer $\nu_1 : \nu_2 = 2 : 3$ (príma s kvintou). Pohodlne môžeme Lissajousove krivky získať pomocou katódového oscilografu, v ktorom fluoreskujúca stopa katódových lúčov na stene obrazovky pomocou striedavých elektrických polí je nútená konať harmonické pohyby v dvoch smeroch na seba kolmých, s dvoma frekvenciami, ktoré vzájomne od seba nezávisia a ktoré možno ľubovoľne voliť.

2.19. Tlmený harmonický pohyb. Za účinku sily, ktorá je úmerná výchylke hmotného bodu z jeho rovnovážnej polohy, vzniká pohyb harmonický, prebiehajúci podľa vzorcov odvodených v predošlom článku len vtedy, keď súčasne na hmotný bod neúčinkuje už nijaká iná sila. Pri pohybe vo vzduchu alebo kvapaline musí však hmotný bod prekonávať odpor prostredia, ktorý pohyb brzdí, tlmí, až nakoniec pohyb úplne prestane. Odpor prostredia nezávisí od polohy pohybujúceho sa bodu, ale od jeho rýchlosti. Pri malej rýchlosti je rýchlosti úmerný a pôsobí proti rýchlosti. Pri tlmenom harmonickom pohybe účinkujú teda dve sily: sila $\mathbf{f}_1$, úmerná výchylke ($\mathbf{f}_1 = -k_1^2\mathbf{r}$), a sila $\mathbf{f}_2$, úmerná rýchlosti ($\mathbf{f}_2 = -k_2^2\mathbf{v}$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2$). Pre tlmený harmonický pohyb platí teda rovnica

$$m\mathbf{a} = -k_1^2\mathbf{r} - k_2^2\mathbf{v}$$

alebo rovnica

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{k_1^2}{m}\mathbf{r} - \frac{k_2^2}{m}\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -\omega_0^2\mathbf{r} - 2b\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$$

t. j.

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} + 2b\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\mathbf{r} = 0 \tag{1}$$

keď sme položili

$$\frac{k_1^2}{m} = \omega_0^2, \qquad \frac{k_2^2}{m} = 2b$$

ω_0 by bola kruhová frekvencia harmonického pohybu, keby nebolo tlmenia, veličina b sa volá koeficient útlmu.

Rovnici (1) vyhovuje riešenie

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{e}^{\alpha t} \tag{2}$$

kde $\boldsymbol{a}$ je ľubovoľný vektor. Konštantu α nájdeme dosadením funkcie (2) a jej derivácií do rovnice (1) a riešením takto získanej charakteristickej rovnice

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Partikulárne riešenia rovnice (1) sú teda

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{a}_1 \, \mathrm{e}^{\alpha_1 t} \qquad \text{a} \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{a}_2 \, \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$$

a všeobecný integrál, keďže vektory $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ sú ľubovoľné, rovná sa súčtu nájdených partikulárnych integrálov,

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1 \, \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \boldsymbol{a}_2 \, \mathrm{e}^{\alpha_2 t} \tag{3}$$

pretože diferenciálna rovnica (1) je lineárna a homogénna.

Rýchlosť tlmeného harmonického pohybu je

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}_1 \alpha_1 \, \mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \boldsymbol{a}_2 \alpha_2 \, \mathrm{e}^{\alpha_2 t}$$

Integračné konštanty $\boldsymbol{a}_1$ a $\boldsymbol{a}_2$ vyplývajú zo začiatočných podmienok, z polohy hmotného bodu $\boldsymbol{r}_0$ a z jeho rýchlosti $\boldsymbol{v}_0$ na začiatku pohybu ($t = 0$).

Keď však charakteristická rovnica má jeden koreň dvojnásobný (pri $b^2 = \omega_0^2$), všeobecný integrál diferenciálnej rovnice je

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1 \, \mathrm{e}^{-bt} + \boldsymbol{a}_2 t \, \mathrm{e}^{-bt} \tag{4}$$

ako sa môžeme presvedčiť dosadením.

Priebeh tlmeného pohybu harmonického je podstatne iný, podľa toho, či má charakteristická rovnica dva korene imaginárne, jeden koreň dvojnásobný, alebo dva korene reálne. Podrobnejšie vykonáme riešenie len pre tlmený harmonický pohyb v priamke, ktorý vznikne napríklad vtedy, keď hmotnému bodu v jeho rovnovážnej polohe ($\boldsymbol{r} = 0$) udelíme začiatočnú rýchlosť $\boldsymbol{v}_0$.

A. Periodický pohyb. Pri malom útlme je $b^2 - \omega_0^2 < 0$ a korene α_1 a α_2 sú komplexné. Označme v tom prípade kladnú hodnotu $\omega_0^2 - b^2 = \omega^2$, takže bude $b^2 - \omega_0^2 = -\omega^2$, $\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \omega\mathrm{i}$ a $\alpha_{12} = -b \pm \omega\mathrm{i}$.

Keď pre $t = 0$ je aj $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 = 0$, z rovnice (3) vyplýva, že $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}_1$, takže môžeme písať: $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}_2 = -\boldsymbol{a}$, a máme:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(\mathrm{e}^{\alpha_1 t} - \mathrm{e}^{\alpha_2 t}) \tag{5}$$

Po obidvoch stranách znamienka rovnosti v rovnici (5) vystupujúce vektory sú rovnobežné, rovnajú sa sebe preto aj ich veľkosti, teda ak veľkosť výchylky označíme u, bude

$$u = a(e^{a_1 t} - e^{a_2 t}) = a(e^{(-b+\omega i)t} - e^{(-b-\omega i)t}) = a\,e^{-bt}(e^{\omega t i} - e^{-\omega t i}) =$$
$$= a\,e^{-bt}(\cos \omega t + i \sin \omega t - \cos \omega t + i \sin \omega t) = 2ai\,e^{-bt} \sin \omega t =$$
$$= C\,e^{-bt} \sin \omega t \tag{6}$$

a

$$v = \frac{du}{dt} = C\omega\,e^{-bt} \cos \omega t - bC\,e^{-bt} \sin \omega t \tag{7}$$

kde $C = \dfrac{v_0}{\omega}$. Pri malom tlmení vzniká teda harmonický pohyb s kruhovou frekvenciou $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$, menšou, než je kruhová frekvencia netlmeného pohybu. Jeho perióda $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$ je väčšia. Jeho amplitúda $C\,e^{-bt}$ sa s časom zmenšuje a blíži sa k nule. Krajnými polohami prechádza hmotný bod v časoch t_i, ktoré vyplývajú z rovnice $v = 0$, t. j.

$$\operatorname{tg} \omega t_i = \frac{\omega}{b}, \qquad t_i = \frac{1}{\omega} \operatorname{arctg} \frac{\omega}{b}$$

Čas, ktorý uplynie medzi dvoma krajnými polohami idúcimi za sebou, je teda $t_{i+1} - t_i = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{T}{2}$, takže čas, ktorý uplynie medzi dvoma po sebe idúcimi výchylkami na tú istú stranu, je $t_{i+2} - t_i = T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

Podiel dvoch po sebe idúcich výchyliek (nerovnakých) na tú istú stranu je

$$\lambda = \frac{u(t_i)}{u(t_{i+2})} = \frac{C\,e^{-bt_1} \sin \omega t_i}{C\,e^{-bt_{i+2}} \sin \omega t_{i+2}} = e^{bT} \tag{8}$$

a nazýva sa *útlm*. Prirodzený logaritmus útlmu sa volá *logaritmický dekrement* tlmeného harmonického pohybu

$$\delta = \ln \lambda = bT \tag{9}$$

Koeficient útlmu

$$b = \frac{\delta}{T} = \frac{\ln \lambda}{T} \tag{10}$$

určí sa teda ľahko z útlmu λ a periódy T. Časové rozvinutie harmonického, málo tlmeného pohybu predstavuje krivka na *obr. 2.33a*.

B. Aperiodický pohyb. Pri veľkom tlmení je $b^2 - \omega_0^2 > 0$ a korene charakteristickej rovnice

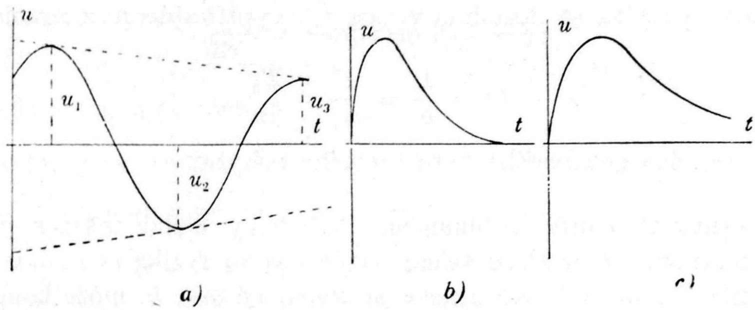
$$\alpha_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}, \qquad \alpha_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

sú reálne. Podľa rovnice (5) výchylka u je v tom prípade jednoducho

$$u = a(e^{\alpha_1 t} - e^{\alpha_2 t}) \tag{11}$$

a rýchlosť

$$v = a(\alpha_1 e^{\alpha_1 t} - \alpha_2 e^{\alpha_2 t}) \tag{12}$$



Obr. 2.33

Integračná konštanta a vyplýva zo začiatočnej rýchlosti v_0,

$$a = \frac{v_0}{\alpha_1 - \alpha_2} = \frac{v_0}{2\sqrt{b^2 - \omega^2}}$$

Výchylka je najväčšia v čase t_m, ktorý vyplýva z rovnice $v = 0$, t. j.

$$\alpha_1 e^{\alpha_1 tm} - \alpha_2 e^{\alpha_2 tm} = 0$$

$$e^{tm(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$t_m = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \, . \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \tag{13}$$

Čas t_m, potrebný na dosiahnutie maximálnej výchylky, nezávisí teda od začiatočnej rýchlosti. Priebeh pohybu predstavuje krivka na *obr. 2.33b*.

C. Hraničný pohyb. Keď sa tlmenie pri tlmenom pohybe harmonickom zväčšuje, stáva sa pohyb práve aperiodickým, keď $b^2 = \omega_0^2$. V tom prípade charakteristická rovnica má jediný koreň dvojnásobný,

$$\alpha = -b$$

a všeobecné riešenie rovnice (1) je dané vzorcom (5) alebo, v prípade pohybu, v priamke v tvare skalárnom,

$$u = (a_1 + a_2 t)\, \mathrm{e}^{-bt} \tag{14}$$

Keď však v čase $t = 0$ bolo aj $u = 0$, vtedy $a_1 = 0$, $a_2 = a$ a závislosť výchylky od času je *(obr. 2.33c)*

$$u = at\, \mathrm{e}^{-bt} \tag{15}$$

Pre rýchlosť vychádza

$$v = a\, \mathrm{e}^{-bt}(1 - bt) \tag{16}$$

Ostávajúca integračná konštanta a vyplýva zo začiatočnej rýchlosti v_0, $a = v_0$. Maximálna výchylka sa dosiahne v čase t_m, vyplývajúcom z rovnice $v = 0$, t. j.

$$t_m = \frac{1}{b} = \frac{1}{\omega_0} = \frac{T_0}{2\pi} \tag{17}$$

kde T_0 je perióda netlmeného harmonického pohybu.

2.20. Vynútené kmity, rezonancia. Periodický alebo takmer periodický pohyb hmotného bodu alebo telesa nazýva sa vo fyzike aj kmitavý pohyb. Predstavme si malé teliesko hmoty m upevnené tak, že môže konať tlmené kmity harmonické, ktorých kruhová frekvencia, keby tlmenia nebolo, by bola ω_1 (napríklad kovovú guľku na zvislom oceľovom drôte). Na toto teleso nech účinkuje harmonicky sa meniaca vonkajšia sila vyznačujúca sa inou kruhovou frekvenciou ω_2. Keď sila $\mathbf{f}$ zachováva stále tenže smer, môžeme ju písať: $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 \sin \omega_2 t$, alebo v tvare skalárnom: $f = f_0 \sin \omega_2 t$. Diferenciálna rovnica vznikajúceho pohybu je potom (pozri čl. 2.19)

$$m \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} = -k_1^2 u - k_2^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + f_0 \sin \omega_2 t$$

kde u značí veľkosť okamžitej výchylky. Keď vydelíme túto rovnicu hmotou m a zavedieme substitúcie $\dfrac{k_1^2}{m} = \omega_1^2$, $\dfrac{k_2^2}{m} = 2b$, $\dfrac{f_0}{m} = a$, dostaneme ju v tvare

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 2b \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_1^2 u = a \sin \omega_2 t \tag{1}$$

Nebyť vonkajšej sily, bola by to diferenciálna rovnica tlmeného pohybu harmonického, dávajúca — pri pomerne malom tlmení ($b < \omega_1$) — všeobecné riešenie

$$u = C\, \mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t - \varphi_1)$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_1^2 - b^2}$. V našom prípade všeobecným integrálom rovnice (1), s pravou stranou, je však funkcia

$$u = C\, \mathrm{e}^{-bt} \sin(\omega t - \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t - \varphi_2)$$