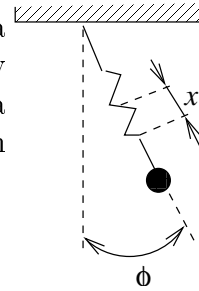


1. Nájdite Lagrangeovu funkciu a pohybové rovnice pre matematické kyvadlo s hmotnosťou m , na ktorom je časť závesného vlákna nahradená pružinou s tuhosťou k , ktorá sa môže počas kmitov predlžovať a skracovať (čo je označené na obrázku ako x). Dĺžka vlákna s pružinou v pokoji nech je l . Aká bude frekvencia malých kmitov takéhoto kyvadla?



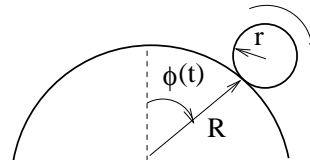
Re:

$$L(\phi, \dot{\phi}, x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (x+l)^2\dot{\phi}^2) - \frac{1}{2}kx^2 + mg(x+l)\cos(\phi) \quad (1)$$

$$\omega_1 = \sqrt{k/m} \quad (2)$$

$$\omega_2 = \sqrt{g/(l+x_0)}, x_0 = mg/k \quad (3)$$

2. Nájdite Lagrangeovu funkciu a pohybovú rovnicu pre valček s polomerom r , valiaci sa po vršku valcového tvaru s polomerom R v dôsledku gravitácie. Hmotnosť valčeka je m a jeho moment zotrvačnosti vzhľadom na jeho os symetrie nech je I .

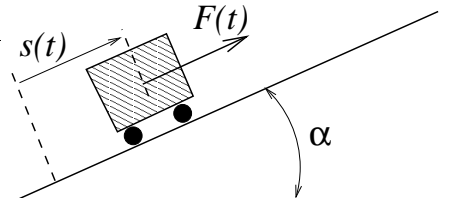


Re:

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}m(R+r)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I(R/r+1)^2\dot{\phi}^2 + mg(R+r)\cos(\phi)$$

+ rovnice...

3. Ťaháme vozík s hmotnosťou m hore po rovine, ktorá zvierá uhol α s vodorovným smerom. Pôsobíme pritom takou silou $F(t)$, že dĺžka dráhy, ktorú prejde ťažisko vozíka závisí od času nasledovným spôsobom



$$s(t) = \frac{s_M}{2} (1 - \cos(\pi t/T)).$$

Akou silou $F(t)$ ho ťaháme, ak medzi kolesami vozíka a rovinou pôsobí trecia sila $F^t = -k\dot{s}$ a na vozík pôsobí tiaž (g)? Aká je Lagrangeova funkcia a Lagrangeova pohybová rovnica pre tento problém? Akú vykonáme prácu v čase od $t = 0$ do $t = T$? Ako sa zmení Lagrangeova funkcia a pohybová rovnica, ak sklon roviny je premenný, a známy ako funkcia urazenej dráhy $\alpha(s)$? Otáčanie koliesok ako stupeň voľnosti zanedbajte.

Re:

$$L(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg\sin(\alpha)s \quad (4)$$

$$F(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} - \frac{\partial L}{\partial s} + k\dot{s} = m\ddot{s} + mg\sin(\alpha) + k\dot{s} \quad (5)$$

$$W = \int_0^T F(t)\dot{s}dt = 0 + mg\sin(\alpha)s_M + \frac{\pi^2}{8} \frac{k s_M^2}{T} \quad (6)$$

Pre premenný sklon (nie v čase, ale v priestore premenný)

$$\tilde{L}(s, \dot{s}) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - mg \int_0^s ds' \sin(\alpha(s'))$$