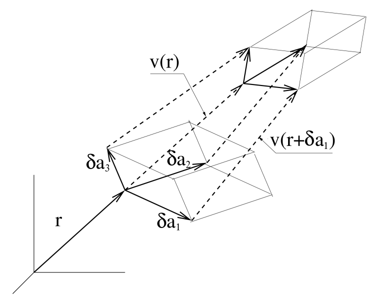
Poznámka: pre nestlačiteľnú kvapalonu máme $\frac{d\rho}{dt} = 0$ t.j. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ čo vytvára analógiu medzi stacionárnym elektrickým poľom vo vákuu a rýchlostným poľom nestlačiteľnej kvapaliny.

Poznámka 2: Rovnica kontinuity sa dá získať aj z ľubovolného objemu $\Omega(t)$, ale takého že objem $\Omega(t)$ sa hýbe s kontinuom (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua), t.j.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} d^3 r \rho(\vec{r},t) = 0.$$

Tento postup bol v zime 2009 odprednášaný.

5. (V 2009 neodprednášam, je to len pre zvedavých) **Základná veta kinematiky kontinua** - najvšeobecnejší pohyb dostatočne malého elementu kontinua je paralelný prenos, otočenie a roztiahnutie (stlačenie) v 3 lineárne nezávislých smeroch [3].



$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{r}+\delta\vec{a}_i) &\approx \vec{v}(\vec{r}) + \delta\vec{a}_i \cdot \nabla_{\vec{r}}\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(\vec{r}) + (\vec{v}(\vec{r})\nabla)\cdot\delta\vec{a}_i \\ &= \vec{v}(\vec{r}) + \vec{\omega}(\vec{r})\times\delta\vec{a}_i + \frac{d}{dt}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r})\cdot\delta\vec{a}_i + \mathscr{O}(|\delta\vec{a}_i|^2),\end{aligned}$$

kde

$$\vec{\omega}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{v}(\vec{r})$$

predstavuje lokálnu rotáciu kontinua (evidentne všetky $\delta\vec{a}_i$ sa natočia o uhol $\vec{\omega}(\vec{r})dt$) a

$$\frac{d}{dt}\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left((\vec{v}(\vec{r})\nabla) + \nabla\vec{v}(\vec{r})\right)$$

predstavuje časovú zmenu tenzora deformácia kontinua. Ak lokálne natočíme súradnicový systém tak aby $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}$ bol diagonálny dostaneme (ak zvolíme $\delta\vec{a}_i$ ako vlastné vektory $\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}(\vec{r})$)

$$\Delta\delta a_i = \varepsilon_{ii}\delta a_i, \quad i = 1,2,3$$

a pre relatívnu zmenu dostatočne malého objemu (s daným množstvom hmotnosti)

$$\delta V/V = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \mathrm{Tr}\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon}.$$

Alebo, použitím časových derivácií

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho(\vec{r})}\frac{d\rho(\vec{r})}{dt} = \frac{d}{dt}\mathrm{Tr}\,\overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} = \nabla\cdot\vec{v}$$

(rovnica kontinuity)

6. **Pohybová rovnica kontinua** (Newtonova pohybová rovnica)

   (a) Sily
   Sily, ktoré pôsobia na vybraný objem kontinua $\Omega(t)$, fixovaný na hmotu kontinua, t.j. s nemennou celkovou hmotnosťou, môžeme rozdeliť na *krátko-dosahové* a *d'aleko-dosahové*.

   (b) Krátko-dosahové sily pôsobia cez plochu $\Sigma(t)$, ktorá uzatvára objem $\Omega(t)$. Popisujeme ich pomocou *tenzora napätia* - ten dáva silu, ktorou pôsobí vonkajší materiál na element plochy $d\vec{S}$,

$$d\vec{F} = d\vec{S}\cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t), \tag{199}$$

$$\vec{F} = \int_{\Sigma(t)} d\vec{S}\cdot \overleftrightarrow{\sigma}(\vec{r},t). \tag{200}$$

   Príklady:

   i. Tlak predstavuje záporné napätie pre izotrópne prostredie

$$\overleftrightarrow{\sigma} = -p(\vec{r},t)\overleftrightarrow{1}, \tag{201}$$

   pretože čo do veľkosti vieme, že $dF = pdS$, a orientácia je taká, že ak prostredie okolo oblasti $\Omega(t)$ je charakterizované tlakom p, potom prostredie pôsobí smerom do $\Omega(t)$, t.j. proti smeru orientácie obopínajúcej tento objem (uzavretá plocha je vždy orientovaná smerom von) čím nachádzame

$$d\vec{F} = -d\vec{S}p$$

   čo sa dá zapísať aj ako rovnica (201).
   Samotný tlak p sa neberie ako nová neznáma veličina, ale určuje sa pomocou lokálnej hustoty $\rho(\vec{r},t)$, t.j.

$$p(\vec{r},t) = f(\rho(\vec{r},t)).$$

   kde funkcia $f()$ má najčastejšie mocninný charakter.
   Napr. pre mono-molekulárne plyny blízke k ideálnym platí stavová rovnica

$$pV = nRT,$$

   kde p je tlak plynu, V je jeho objem, n látkové množstvo, R molárna plynová konštanta a T termodynamická teplota plynu. Vyjadrením látkového množstva n pomocou hmotnosti m a mólovej hmotnosti M_m, $n = m/M_m$ dostaneme

$$p(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\frac{R}{M_m}T$$

   V princípe aj teplota bude mať závislosť od miesta a času, $T(\vec{r},t)$ no pre jej uváženie je potrebné uvažovať aj rovnicu vedenia tepla ku ktorej sa vrámci našich prednášok už nedostaneme.

   ii. Viskózne sily sa prejavujú pomocou tenzora napätia. Motivácia ku viskozite - tangenciálne sily, a intuitívny vzťah

$$F_y = \eta\frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

   (pre detailný výklad viď poznámky z prednášok)
   Presná definícia pre nestlačiteľné kontinuum je

$$\overleftrightarrow{\sigma}_\eta = (\vec{i}\vec{j}+\vec{j}\vec{i})(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}) + (\vec{i}\vec{k}+\vec{k}\vec{i})(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}) + (\vec{j}\vec{k}+\vec{k}\vec{j})(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}) \tag{202}$$

čo možno vektorovo zapísať aj ako

$$\overleftrightarrow{\sigma}_\eta = \eta(\nabla\vec{v} + \vec{v}\nabla - \frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{v}\overleftrightarrow{1}), \tag{203}$$

kde operácia $\nabla\vec{v}$ je nám už znány výraz pre gradient vektorového poľa (vyskytol sa pri zavedení hydrodynamickej derivácie)

$$\nabla\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i}\vec{i} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\vec{i}\vec{j} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\vec{i}\vec{k} + ... = \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

a operácia $\vec{v}\nabla$ je predstavuje výraz

$$\vec{v}\nabla = \frac{\partial v_x}{\partial x}\vec{i}\vec{i} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\vec{i}\vec{j} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\vec{i}\vec{k} + ... = \left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$$

Prvé dva členy v (203) teda predstavujú symetrizáciu vyšši uvedenej metice derivácií (pre vylúčenie čistej rotácie), posledný vylúčenie tzv. objemovej viskozity súvisiacej so stláčaním kontinua. η sa nazýva *dynamický koeficient viskozity*. Tvar (203) je platný aj pre stlačiteľné viskózne kontinuum.
Používa sa aj definícia koeficientu *kinematickej viskozity*, γ

$$\gamma = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\gamma] = \mathrm{m^2s^{-1}}$$

Pre predstavu, pre vodu máme $\gamma \approx 0.01\mathrm{cm^2s^{-1}}$.
Do pohybovej rovnice neslačiteľnej kvapaliny vstupuje tenzor viskozity v tvare

$$\nabla\cdot\overleftrightarrow{\sigma}_\eta = \eta\Delta\vec{v}. \tag{204}$$

(c) Ďaleko-dosahové sily sú buď gravitačného alebo elektro-magnetického pôvodu a môžeme ich vyjadriť pomocou sily pôsobiacej na jednotku hmotnosti kontinua (špecifickej sily) $\vec{f}(\vec{r},t)$,

$$d\vec{F} = \int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\vec{r},t)\vec{f}(\vec{r},t). \tag{205}$$

Príklady:

i. špecifická gravitačná sila v homogénnom gravitačnom poli, $\vec{f}(\vec{r},t) = \vec{g}$.
ii. špecifická Lorentzova sila (elektromagnetická sila)

$$\vec{f}(\vec{r},t) = \frac{q}{m_q}\left(\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\right),$$

kde q/m_q je pomer náboju a hmotnosti častíc tvoriace študované kontinuum a $\vec{E}$ a $\vec{B}$ sú polia elektrickej intenzity a magnetickej indukcie.

Niekedy môžeme zapísať špecifickú silu tvare potenciálu, t.j.

$$\vec{f}(\vec{r},t) = -\nabla\phi(\vec{r},t),$$

Napr. pre elektrostatické polia

$$f(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\frac{q}{m_q}\vec{E}(\vec{r}) = -\rho(\vec{r},t)\frac{q}{m_q}\nabla\phi_E(\vec{r}),$$

kde $\phi_E(\vec{r})$ je elektrostatický potenciál, alebo pre gravitačné pole

$$f(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{g} = -\rho(\vec{r},t)\nabla(-\vec{g}\cdot\vec{r}),$$

kde $-\vec{g}\cdot\vec{r} = gh$ je gravitačný potenciál v homogénnom gravitačnom poli (h má zmysel výšky).

(d) Samotná rovnica sa odvodí z Newtonoveho pohybového zákona

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F},$$

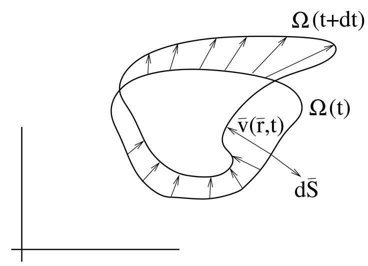
kde $\vec{P}$ je hybnosť časti kontinua uzavretého v oblasti $\Omega(t)$,

$$\vec{P} = \int dm\vec{v} = \int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t),$$

a $\vec{F}$ je celková sila čo na túto časť kontinua pôsobí, t.j.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)}\rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)d^3r = \int_{\Omega(t)} d\vec{F} + \int d\vec{S}\cdot\overset{\leftrightarrow}{\sigma}.$$

s výsledkom (tu nasleduje použitie hydrodynamickej derivácie a Gaussobej vety, spravil na tabulu, viď poznámky z prednášok.)



Zmena objemu $\Omega(t)$, pevne spojenom s kontinuom, za malý čas dt.

Výsledná **pohybová rovnica kontinua** potom je:

$$\rho(\vec{r},t)\left(\frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla\vec{v}(\vec{r},t)\right) = \nabla\cdot\overset{\leftrightarrow}{\sigma}(\vec{r},t) + \vec{f}(\vec{r},t). \tag{206}$$

Táto nám dáva diferenciálnu rovnicu pre časovú zmenu rýchlostného poľa v ľubovoľnom mieste kontinua. Spolu s rovnicou kontinuity a rovnicou pre tenzor napätia tvoria tento systém uzavretý systém rovníc ktorý je typicky nutné riešiť numerickými metódami.