- **Predstava numerického riešenia časovo-závislých PDR** Použijeme spätné zobrazenie na diskrétny model, diskretizáciou priestorovej premennej:

$$\frac{\partial v(x_n,t)}{\partial t} = c^2\frac{q(x_n+\Delta x,t)-2q(x_n,t)+q(x_n-\Delta x)}{(\Delta x)^2} \tag{182}$$

$$\frac{\partial q(x_n,t)}{\partial t} = v(x_n,t) \tag{183}$$

v bodoch $x_n = x_0 + n\Delta x$, pre $n = 2,\ldots,N-1$ + okrajové podmienky pre x_1 a x_N.

Použijeme Eulerovu metódu riešenia výsledných obyčajných diferenciálnych rovníc tak že diskretizujeme aj čas, $t \in (0,T) \rightarrow t_i = i\delta, i = 0,1,2,\ldots,M$:

$$v(x_n,t_{i+1}) = v_(x_n,t_i) + c^2\frac{q(x_{n+1},t_i)-2q(x_n,t_i)+q(x_{n-1},t_i)}{(\Delta x)^2}\delta \tag{184}$$

$$q(x_n,t_{i+1}) = q(x_n,t_i) + v(x_n,t_i)\delta \tag{185}$$

Tieto rovnice môžeme riešiť iteračne numericky, začínajúc s *počiatočnou podmienkou* $v(x_n,t=0) = v_0(x_n)$ a $q(x_n,t=0) = q_0(x_n)$.

Na prednáške boli aj obrázky ako propagujeme o krok δ a 2δ.

V praxi sa používajú podstatne efektívnejšie metódy napr. na diskretizáciu priestorových premenných - rozvoj do konečnej bázy a na časové propagovanie Lanczosova diagonalizácia v Krylovovom podpriestore priestoru generovanom vyššie spomenutou konečnou bázou.

3.2 Pojmy a veličiny v dynamike kontinua v 3D

1. **Lagrangeov prístup k popisu kontinua**.
Predpoklad popisu kontinua - hmotné elementy kontinua s konštantnou hmotnosťou menia svoj tvar a veľkosť sa hýbu po dráhach, ktoré sa navzájom nepretínajú, $\vec{r}(t,\vec{r}_0)$. Polohový vektor $\vec{r}_0$ označuje počiatočnú polohu elementu v čase $t=0$. Z tejto predstavy dostávame, že rýchlosť elementu kontinua bude
$$\vec{v}_L(t,\vec{r}_0) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t,\vec{r}_0) = \frac{dx(t,\vec{r}_0)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t,\vec{r}_0)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t,\vec{r}_0)}{dt}\vec{k}$$
Zrýchlenie elementu kontinua pomocou Lagrangeovho pohľadu:
$$\vec{a}(t,\vec{r}_0) = \frac{d}{dt}\vec{v}_L(t,\vec{r}_0)$$

Eulerov prístup k popisu kontinua.
$\vec{v}(\vec{r},t)$ - rýchlostné vektorové pole udávajúce *lokálnu* rýchlosť kontinua v mieste $\vec{r}$ a čase t. Toto priamo súvisí s rýchlosťou elementu,
$$\vec{v}_L(t,\vec{r}_0) = \vec{v}(\vec{r}(t,\vec{r}_0),t)$$
Zrýchlenie elementu vyjadrené pomocou rýchlostného poľa potom bude
$$\vec{a}(t,\vec{r}_0) = \frac{d\vec{v}_L(t,\vec{r}(t,r_0))}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}(x(t,\vec{r}_0),y(t,\vec{r}_0),z(t,\vec{r}_0),t) \tag{186}$$
$$\begin{aligned} &= \frac{\partial\vec{v}(x(t,\vec{r}_0),y(t,\vec{r}_0),z(t,\vec{r}_0)}{\partial t} + \frac{\partial\vec{v}(x(t,\vec{r}_0),y(t,\vec{r}_0),z(t,\vec{r}_0)}{\partial x}\frac{dx(t,\vec{r}_0)}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial\vec{v}(x(t,\vec{r}_0),y(t,\vec{r}_0),z(t,\vec{r}_0)}{\partial y}\frac{dy(t,\vec{r}_0)}{dt} + \frac{\partial\vec{v}(x(t,\vec{r}_0),y(t,\vec{r}_0),z(t,\vec{r}_0)}{\partial z}\frac{dz(t,\vec{r}_0)}{dt} \end{aligned} \tag{187}$$
$$= \frac{\partial\vec{v}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla\vec{v}(\vec{r},t) \tag{188}$$

kde $\nabla\vec{v}(\vec{r},t)$ je gradient z vektorového poľa (výsledok takej operácie je tenzor).

Člen s gradientom rýchlostného poľa je dôvodom komplikácií hydrodynamiky: je inherentne nelineárny vzhľadom na rýchlostné pole.
Nájdený výraz pre deriváciu veličiny spojenej s hýbucim sa kontinuom (v tomto prípade rýchlosť v_L) podľa času,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}(\vec{r},t)\cdot\nabla \tag{189}$$

nazývame **hydrodynamická derivácia**. Predstavuje rýchlosť zmeny takej vlastnosti kontinua, ktorá je viazaná na samotný materiál kontinua a teda je ním "unášaná".

2. **Pojem hustoty hmotnosti**

$$\rho(\vec{r},t) : M_\Omega(t) = \int_\Omega d^3r\rho(\vec{r},t) \tag{190}$$

Príklady iných polí:

(a) Hustota elektrického náboja, $\rho^e(\vec{r},t) = \frac{e}{m_e}\rho(\vec{r},t)$ kde $\rho(\vec{r},t)$ je hustota hmotnosti elektrónov, e je náboj jedného elektrónu a m_e jeho hmotnosť.

(b) Hustota častíc i-teho druhu (potrebné pri chemických reakciách)

$$n^i(\vec{r},t) \quad : \quad N^i_\Omega(t) = \int_\Omega d^3rn^i(\vec{r},t) \tag{191}$$

$$\rho(\vec{r},t) = \sum_i M^i_o n^i(\vec{r},t) \tag{192}$$

(c) Špecifická vnútorná energia (potrebné pri vedení tepla)

$$u(\vec{r},t) \quad : \quad U_{\Omega(t)}(t) = \int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\vec{r},t)u(\vec{r},t) \tag{193}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt} \tag{194}$$

kde posledná rovnica predstavuje 1. vetu termodynamickú.

3. Pojem vektorového poľa hustoty **toku hmotnosti** $\vec{j}_\rho(\vec{r},t)$:

$\vec{j}_\rho \cdot d\vec{S}dt =$ "hmotnosť ktorá preide plôškou $d\vec{S}$ za krátky čas dt"

$$\frac{\Delta M}{dt} = \frac{\Delta l dS}{dt}\rho = \frac{\vec{v}dt\cdot d\vec{S}}{dt}\rho \tag{195}$$

$$\vec{j}_\rho(\vec{r},t) = \vec{v}(\vec{r},t)\rho(\vec{r},t) \tag{196}$$

4. **Rovnica kontinuity** - odvodenie pomocou *ľubovoľnej no nehybnej* oblasti Ω.

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega d^3r\rho(\vec{r},t) = -\int_\Sigma d\vec{S}\cdot\vec{j}_\rho(\vec{r},t) \Rightarrow \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{\rho}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)) = 0 \tag{197}$$

Rovnica kontinuity použitím hydrodynamickej derivácie,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0 \tag{198}$$

Poznámka: pre nestlačiteľnú kvapalonu máme $\frac{d\rho}{dt} = 0$ t.j. $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ čo vytvára analógiu medzi stacionárnym elektrickým poľom vo vákuu a rýchlostným poľom nestlačiteľnej kvapaliny.

Poznámka 2: Rovnica kontinuity sa dá získať aj z ľubovolného objemu $\Omega(t)$, ale takého že objem $\Omega(t)$ sa hýbe s kontinuom (t.j. jeho hranice sú pevne spojené s určitými bodmi kontinua), t.j.

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} d^3r\rho(\vec{r},t) = 0.$$

Tento postup bol v zime 2009 odprednášaný.