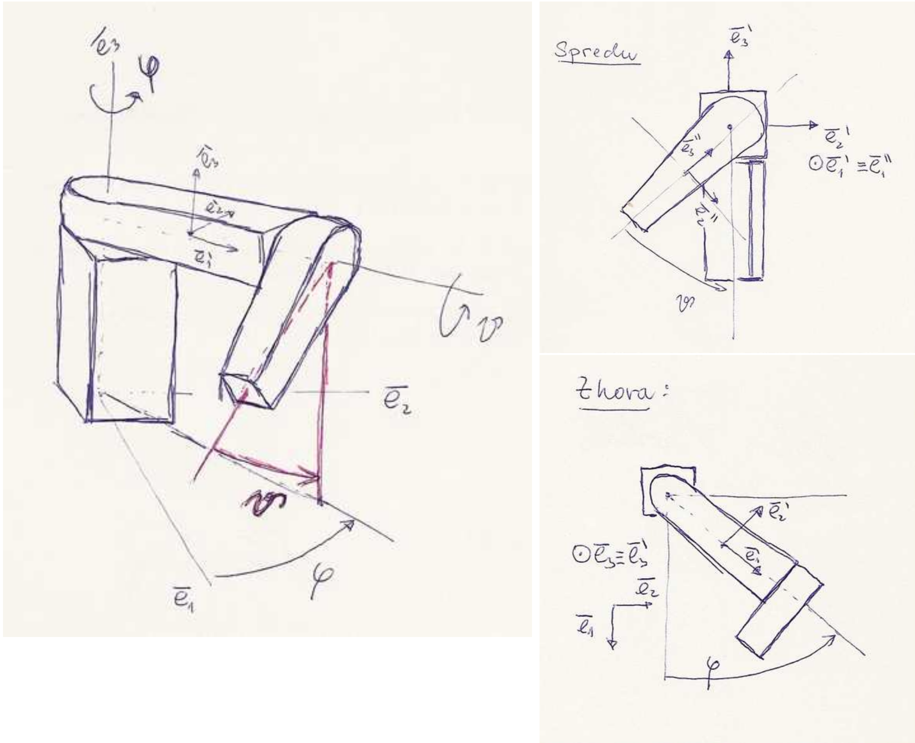


Obrázok 6: Manipulátor s plecom.

2.14 Dvoj-ramenný manipulátor s plecom

(Je aj v skriptách ale iným postupom a s nie celkom korektným výsledkom)

Postup je analogický predchádzajúcemu a preto budeme dáme len jednotlivé vzťahy:

1. Dva geometrické stupne voľnosti - ϕ a θ.

2. Označenie polôh ťažiska a počiatkov súradnicových sústav pevne spojených s každým i.t.t., voľba ich orientácie.

3. Vyjadrenie vektorov vo vhodných súradnicových sústavách:

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\phi}\vec{e}_3' = \dot{\phi}\mathcal{O}^{-\theta,1}[\vec{e}_3''] = \dot{\phi}(\sin(\theta)\vec{e}_2'' + \cos(\theta)\vec{e}_3''), \tag{121}$$

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\theta}\vec{e}_1' = \dot{\theta}\vec{e}_1'', \tag{122}$$

$$\vec{l} = l\vec{e}_1', \quad \vec{d} = -d\vec{e}_3'' = d(\sin(\theta)\vec{e}_2' - \cos(\theta)\vec{e}_3') \tag{123}$$

$$\vec{r}_1^* = r_1^*\vec{e}_1', \quad \vec{r}_2^* = \vec{l} + \vec{d} \tag{124}$$

$$\vec{v}_1^* = \frac{d\vec{r}_1^*}{dt} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1^* = \dot{\phi} r_1^* \vec{e}_2' \tag{125}$$

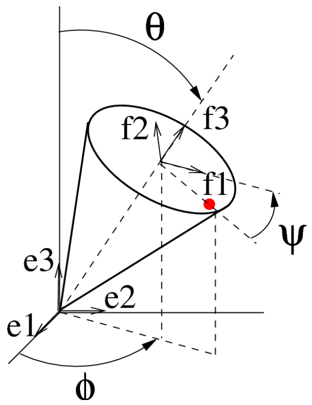
$$\vec{v}_2^* = \frac{d\vec{r}_2^*}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{l} + \vec{d}) = \vec{\omega}_1 \times \vec{l} + (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{d} \tag{126}$$

$$= -\dot{\phi} d\sin(\theta)\vec{e}_1' + (\dot{\phi} l - \dot{\theta} d\cos(\theta))\vec{e}_2' + \dot{\theta} d\sin(\theta)\vec{e}_3' \tag{127}$$

$$|\vec{v}_2^*|^2 = \dot{\phi}^2(d^2\sin^2(\theta) + l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta} l d\cos(\theta) \tag{128}$$

4. Kinetická energia oboch i.t.t.

$$K_1 = \frac{1}{2}m_1(r_1^*)^2\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\phi}^2, \quad I_1 = \vec{e}_3' \cdot \vec{\vec{I}}_1 \cdot \vec{e}_3' \tag{129}$$



Obrázok 7: Zotrvačník a v ňom použité označenia a orientácie sústav.

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \frac{1}{2}m_2|\vec{v}_2^*|^2 + \frac{1}{2}(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\cdot\vec{\vec{I}}_2\cdot(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) && (130)\\
&= \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\phi}^2(d^2\sin^2(\theta)+l^2) + \dot{\theta}^2 d^2 - 2\dot{\phi}\dot{\theta} l d\cos(\theta)\right) && (131)\\
&\quad + \frac{1}{2}I''_{11}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I''_{22}\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}I''_{33}\cos^2(\theta)\dot{\phi}^2, \quad I''_{ii} = \vec{e}''_i\cdot\vec{\vec{I}}_2\cdot\vec{e}''_i && (132)
\end{aligned}
$$

za predpokladu že tenzor zotrvačnosti ramena je diagonálny (rozumný predpoklad). Celková kinetická energia má potom tvar

$$
\begin{aligned}
K &= K_1 + K_2 && (133)\\
&= \frac{1}{2}\left(\tilde{I}_1 + A\sin^2(\theta) + B\cos^2(\theta)\right)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}_2\dot{\theta}^2 - M\cos(\theta)\dot{\theta}\dot{\phi} && (134)\\
\tilde{I}_1 &= m_1(r_1^*)^2 + I_1 + m_2 l^2 && (135)\\
A &= m_2 d^2 + I''_{22}, \quad B = I''_{33} && (136)\\
\tilde{I}_2 &= m_2 d^2 + I''_{11} && (137)\\
M &= m_2 l d && (138)
\end{aligned}
$$

5. Potenciálna energia oboch i.t.t.

$$U = -dm_2 g\cos(\theta)$$

6. Odvodiť Lagrangeove pohybové rovnice, t.j. parciálne derivácie...

2.15 Lagrangeova funckia pre gyroskop (zotrvačník)

(Nie je v skriptách)
S gyroskopom sme sa stretli pri zavedení formalizmu rotácii a pri odvodení Eulerovej pohybovej rovnice z 2. Newtonovej pohybovej rovnice i.t.t. Tam sme si aj zaviedli Eulerove uhly ϕ, θ, ψ pre popis polohy gyroskopu. Teraz si skonštruujeme si Lagrangeovu funkciu $L(\phi, \dot{\phi}, \theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) = E_K - U$ pomocou ktorej je odvodenie pohybových rovníc gyroskopu o niečo jednoduchšie. Kinetická energia je daná súčtom translačnej a rotačnej kinetickej energie. Rýchlosť ťažiska je

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2 = r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\dot{\phi}^2$$

Vektor uhlovej rýchlsti $\vec{\omega}$ má zložky (odvodili sme pri Eulerových rovniciach a zavedení rotácií a Eulerových uhloch na 3. prednáške.)

$$\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3} \omega^i \vec{f}_i = (-c\psi s\theta\dot{\phi} + s\psi\dot{\theta})\vec{f}_1 + (s\psi s\theta\dot{\phi} + c\psi\dot{\theta})\vec{f}_2 + (c\theta\dot{\phi} + \dot{\psi})\vec{f}_3$$

kde $\vec{f}_i$ sú jednotkové vektory v sústave pevne spojenej s zotrvačníkom. Pre kinetickú energiu nakoniec dostávame

$$E_K = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega^i\omega^j + mr^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2(\theta)\dot{\phi}^2\right)$$

kde tenzor zotrvačnosti vzhľadom na osi prechádzajúce ťažiskom a orientované pozdĺž $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ je

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix}$$

Potenciálna energia je jednoduchá,

$$U(\theta) = mgr\cos(\theta)$$

a nakoniec dostávame

$$L = \frac{1}{2}J(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos(\theta))^2 + \frac{1}{2}\tilde{I}\left(\dot{\theta}^2 + (\sin(\theta)\dot{\phi})^2\right) - mgl\cos(\theta)$$

kde $\tilde{I} = I + mr^2$.

2.16 Nepotenciálové sily na pravých stranách LPR.

- V odvodzovaní LPR sme zaviedli zovšeobecnené sily

$$Q_i^n = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

- Práca vykonaná nepotenciálovými silami pri zmene iba jednej zovšeobecnenej súradnice q_i , všetky ostatné $q_l, l \neq i$ nech sú konštantné, bude

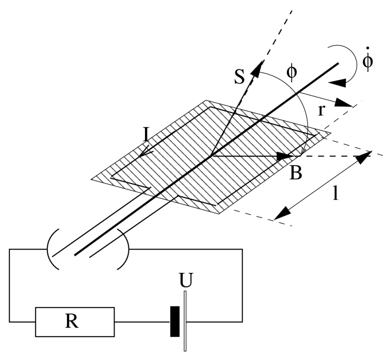
$$W_i = \int_1^2 \vec{F}_j \cdot d\vec{r}_j = \int_{q_i(t_1)}^{q_i(t_2)} \vec{Q}_i dq_i \tag{139}$$

  (nie sumácia cez i!!!). Potom ak poznáme prácu vykonanú pri zmene jednej zo zovšeobecnených súradníc ako funkciu konečnej hodnoty tejto súranice ($q_{i,f} = q_i(t_2)$) potom zovšeobecnenú silu nájdeme ako

$$Q_i^n = \frac{\partial}{\partial q_{i,f}} W_i.$$

- *Trecie sily*
  V lineárnom priblížení (ak sú zovšeobecnené rýchlosti malé) sa typicky stretneme s dvomi situáciami:

  1. Pri otáčaní okolo uhla ϕ: $Q^n = -k_1\dot{\phi}$
  2. Pri posuvnom pohybe o dĺžku x: $Q^n = -k_2\dot{x}$



Obrázok 8: Elektromechanický systém jednoduchého elektromotora.

Vo všeobecnosti pôsobia *proti* pohybu, no môžu byť aj nelineárnymi funkciami rýchlosti (napr. Stokesovo brzdenie vo viskóznej kvapaline, s ktorým sa oboznámime v hydrodynamike).

- *Moment sily od jednosmerného elektromotora*

$$Q^n = f(I(t), q_n(t)) \approx K(q_n(t))I(t),$$

kde $I(t)$ je prúd prechádzajúci elektromotorom a $K(q_n(t))$ je pre elektromotor charakteristická funckie uvažovanej zovšeobecnenej súradnice. V úlohách tohto typu treba riešiť dynamiku manipulátora spolu s dynamikou elektrických obvodov (mechatronika), s pohybovou rovnicou pre prúd

$$U_Z = RI(t) + \frac{d\Phi}{dt}. \tag{140}$$

kde U_Z je napätie na zdroji, R je celkový odpor obvodu, Φ je časovo premenný magnetický tok. Magnetický tok má samoindučnú časť, $L(t)I(t)$, kde $L(t)$ indukčnosť motora a časť pochádzajúcu z permanentného magneta, $\int \vec{B}_{mag} \cdot d\vec{S}$. $L(t)$ sa pri pohybe motora môže meniť s časom, čo modifikuje silovým účinok externého poľa magnetu B_{mag}.

Celkovo ale musí byť zachovaná energetická bilancia, t.j. práca vykonaná elektrickým prúdom na motore musí byť kompenzovaná poklesom energie nazhromaždenej v batérii (rsp. v inom zdroji).

- **Pohybové rovnice jednosmerného elektromotora** s jedným závitom v homog. magnetickom poli permanentného magnetu so zberačmi:

Tvar nepotenciálových síl pôsobiacich na otáčanie elektromotora možno získať z práce ktorú vykoná batéria na pootočenie rotora motora o uhol ϕ.

Celková práca, ktorú vykoná baréria za čas T sa získa prenásobením rovnice pre elektrický obvod, (140) prúdom a integrovaním cez tento čas,

$$W = \int_0^T U_Z I(t)dt = \int dtRI^2(t) + \frac{1}{2}LI^2(t)\Big|_0^T + \int dt \frac{1}{2}\frac{dL}{dt}I^2(t) + \int dt \left(\frac{d}{dt}\Phi_{mag}(t)\right) I(t).$$

Člen so samoindukciou je dôležitý pre lineárne motory kde sa často indukčnosť mení so zmenou súradnice, t.j.

$$\frac{d}{dt}L(t) = \frac{\partial L}{\partial q}\dot{q}.$$

Pre DC motory s komutujúcimi zberačmi (magnet je stator) sa indukčnosť s časom principiálne nemení; pri zanedbaní jej zmeny môžeme posledný člen napísať ako (pre $\phi \in (-\pi, 0)$; podľa obrázku)

$$W' = -\int_{t_1}^{t_2} dt BS\sin(\phi)\dot{\phi}I(t) = -\int_{\phi_1}^{\phi_2} BS\sin(\phi)I(t)d\phi$$

Tento má evidentne zmysel práce ktorú batéria vykoná na otáčaní (celkový príkon mínus Joulove straty na odpore a energia magnetického poľa vinutia na motore) a teda moment sily je

$$D = \left.\frac{\partial W'}{\partial \phi}\right|_{I=const} = -BS\sin(\phi)I(t).$$

Toto platí len kým sa vodiče vinutia na motore neprekomutujú. Typicky sa používa toľko závitov aby zapojený bol na bateriu vždy ten závit na ktorý je vyvinutý maximálny moment sily D, t.j. pre $\phi \approx \pi/2$.

Efekt zmeračov možno uvážiť tak, že výsledný moment sily má pre ľubovoľný uhol ϕ rovnaké znamienko, t.j.

$$D = -BS|\sin(\phi)|I(t).$$

Pre jednosmerný motor s jediným závitom bude pohybová rovnica

$$J\ddot{\phi} = K(\phi)I(t), K(\phi) = 2lrB|\sin(\phi)| \tag{141}$$

Spolu ňou je nevyhnutné riešiť aj "pohybovú rovnicu" pre elektrický prúd:

$$RI(t) + 2lrB|\sin(\phi)|\dot{\phi} = U_Z. \tag{142}$$

Rovnice (141) a (142) predstavujú pohybové rovnice jednosmerného elektromotora vyjadrené mamtematicky vo forme systému 2 nelineárnych diferenciálnych rovníc pre 2 funckie čas, $\phi(t)$ a $I(t)$.

- **Energetická bilancia v formalizme Lagrangeových rovníc**

Budeme uvažovať systém N hmotných bodov, s polohovými vektormi $\vec{r}_i$, nachádzajúci potenciálovom poli charakterizovanom celkovou potenciálnou energiou týchto bodov $U(\vec{r}_1, ..., \vec{r}_N)$. Naviac, nech na každý hmotný bod pôsobí aj nepotenciálová sila $\vec{F}_i$. Tento systém nech obsahuje N_v holonómnych väzieb tak že na jeho popis postačí M zovšeobecnených súradníc q_j. Ako už vieme, tieto spĺňajú Lagrange-Eulerove rovnice

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, j = 1, ..., M \tag{143}$$

Prácu, ktorú za čas T vykoná nepotenciálová sila Q_j (inak predstavujúcu zmes nepotenciálových síl $Q_j = \sum_i \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$) nájdeme podľa rovnice 139, t.j. vynásobením Lagrange-Eulerových rovníc s $\dot{q}_j$ a integrovaním cez čas T,

$$\int dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j. = W_j, j = 1, ..., M \tag{144}$$

(*Nasledovné nebolo odprednášané, ale pre úplnosť diskusii o energetickej bilancii*)
Celková práca nepotenciálových síl sa získa súčtom takýchto rovníc,

$$W^{nepot} = \sum_j \int dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j \tag{145}$$

Pretože Lagrangeova funckia je funkciou všetkých súradníc a ich rýchlostí plati,

$$\frac{d}{dt}L(q_1,...,q_M;\dot{q}_1,...,\dot{q}_M) = \sum_j\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right)$$

pomocou čoho dostaneme pre celkovú prácu nepotenciálových síl,

$$\begin{aligned}
W^{nepot} &= \sum_j \int dt \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j}\right)\dot{q}_j && (146)\\
&= \sum_j \int dt \left(\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)\dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\ddot{q}_j\right) - \int dt \frac{dL}{dt} && (147)\\
&= \int dt \frac{d}{dt}\left(\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right) - L|_{t=0}^{t=T} && (148)
\end{aligned}$$

Keď že prvý člen je

$$\begin{aligned}
\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j &= \sum_j \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j = \sum_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\sum_i \frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\dot{q}_j && (149)\\
&= \sum_j\sum_i \nabla_{\vec{v}_i}\left(\frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_j}\frac{dq_j}{dt} && (150)\\
&= \sum_j\sum_i \nabla_{\vec{v}_i}\left(\frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} && (151)\\
&= \sum_i \nabla_{\vec{v}_i}\left(\frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_i \nabla_{\vec{v}_i}\left(\frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\vec{v}_i && (152)\\
&= \sum_i \nabla_{\vec{v}_i}\left(\frac{1}{2}m_i|\vec{v}_i|^2\right)\vec{v}_i = \sum_i \left(m_i|\vec{v}_i|^2\right) = 2E_k, && (153)
\end{aligned}$$

a $L = E_k - U$, nájdeme vyjadrenie zákona zachovanie energie pre mechanickú sústavu,

$$W^{nepot} = (E_k + U)|_{t=0}^{t=T} \tag{154}$$

2.17 Variačný princíp a Lagrangeove rovnice

Pár nových pojmov

- Funkcionál - zobrazenie ktoré funkcii priradí číslo

  $$S[f(x)] : f(x) \to \vec{R}$$

  Príklad:

  $$S[f(x)] = \int_a^b k\{f(x)\}^2 dx$$

- Variácia funkcionálu - zmena funkčnej hodnoty funkcionálu ak “trochu” zmeníme funkciu $f(x)$ v ktorej funkcionál tútohodnotu nadobúda o $\delta f(x)$. Píšeme

  $$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = \int_a^b v(x)\delta f(x) dx$$

  pričom funkciu

  $$v(x') = \frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')}$$

  voláme funkcionálna derivácia.
  Príklad:

  $$\frac{\delta S[f(x)]}{\delta f(x')} = 2kf(x')$$

  Ako? Nech $\delta f(x)$ je malá zmena $f(x)$ potom

  $$\delta S[f(x)] = S[f(x) + \delta f(x)] - S[f(x)] = ... = \int_a^b 2kf(x)\delta f(x) dx$$

Matematická forma variačného princípu: Lagrangeova funkcia integrovaná cez čas počas ktorého študujeme pohyb nadobúda pre reálnu fyzikálnu trajektóriu extrém, t.j. funkcionálna derivácia je nulová.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t)) dt = 0 \tag{155}$$

kde $L(q_1, q_2, ..., q_M, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N)$ je Lagrangeova funkcia N zovšeobecnených súradníc q_i a k nim patriacim N zovšeobecnených rýchlostí $\dot{q}_i$ a výsledný tvar Lagrange-Eulerových rovníc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{156}$$